数理解析研究所講究録 第2115巻 2019年 1-10

Some explicit formulas for random β-transformations

大阪市立大学 数学研究所　鈴木　新太郎
Shintaro Suzuki
Osaka City University Advanced Mathematical Institute

1　はじめに

β を 1 より大きい実数とする. 以下, $\mathbb{N}$ で正の整数全体の集合, $\mathbb{R}$ で実数全体の集合をあらわす. また実数 $r \in \mathbb{R}$ に対し, $q < r$ をみたす最大の整数 q を $[r]$ であらわす. 区間 $J_\beta := [0, [\beta]/(\beta-1)]$ 上の点 x が整数列 $\{a_n\} \in \{0, 1, \ldots, [\beta]\}^{\mathbb{N}}$ を用いて

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\beta^n}$$

とあらわされているとき, 上式の右辺のような x の表現をここでは x の β-展開とよぶことにする. β を 2 以上の整数 N とすると, 上式の右辺は x の N-進小数展開である ($J_N = [0,1]$ であることに注意). N-進小数展開に関して, 可算集合 $A = \{b_1/N + \cdots + b_k/N^k \mid k \geqq 1, b_i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}\} \setminus \{0\}$ 上の点を除き $x \in J_N$ はただ 1 通りの N-進小数展開 (A 上では 2 通り) であらわされることはよく知られている. 大変興味深いことに, $\beta > 1$ が 2 以上の整数でない場合には, $x \in J_\beta$ は非可算無限通りの β-展開であらわされ得るという結果が Erdős らによって示されている.

定理 1.1 (Erdős, Joó and Komornik [6]). $1 < \beta < (1+\sqrt{5})/2$ のとき, $x \in (0, 1/(\beta-1))$ は非可算無限通りの β-展開であらわされる.

定理 1.2 (Sidorov [11]). $(1+\sqrt{5})/2 \leqq \beta < 2$ のとき, *Lebesgue* 測度に関してほとんどいたるところの点 $x \in (0, 1/(\beta-1))$ は非可算無限通りの β-展開であらわされる.

Dajani と de Vries は論文 [3] において上述の Sidorov による結果を, ランダム β-変換とよばれるある種のランダム力学系のエルゴード的性質を応用することによって一般の場合に拡張している. この変換はすべての β-展開を生成する力学系として知られている. 以下ではそのランダム β-変換について説明する.

2　ランダム β-変換

定義

以下, $\beta > 1$ は非整数とし, J_β の右端点を $c(\beta)$ とあらわす. つまり $c(\beta) = [\beta]/(\beta-1)$ とおく. デジット関数 $d_\beta^1 : J_\beta \to \{0, 1, \cdots, [\beta]\}$ を

$$d_\beta^1(x) = \begin{cases} [\beta x] & x \in \big[0, [\beta]/\beta\big), \\ [\beta] & x \in \big[[\beta]/\beta, c(\beta)\big]. \end{cases}$$

とおき, 変換 $T_{\beta,1} : J_\beta \to J_\beta$ を

$$T_{\beta,1}(x) = \beta x - d_\beta^1(x) \ \ (x \in J_\beta)$$

で定義する. 変換 $T_{\beta,1}$ を greedy 変換と呼ぶ. また

$$l_\beta(x) = c(\beta) - x \ \ (x \in J_\beta)$$

で与えられる反転写像 $l_\beta : J_\beta \to J_\beta$ を用い, 変換 $T_{\beta,0} : J_\beta \to J_\beta$ を

$$T_{\beta,0}(x) = l_\beta \circ T_{\beta,1} \circ l_\beta^{-1}(x) \ \ (x \in J_\beta)$$

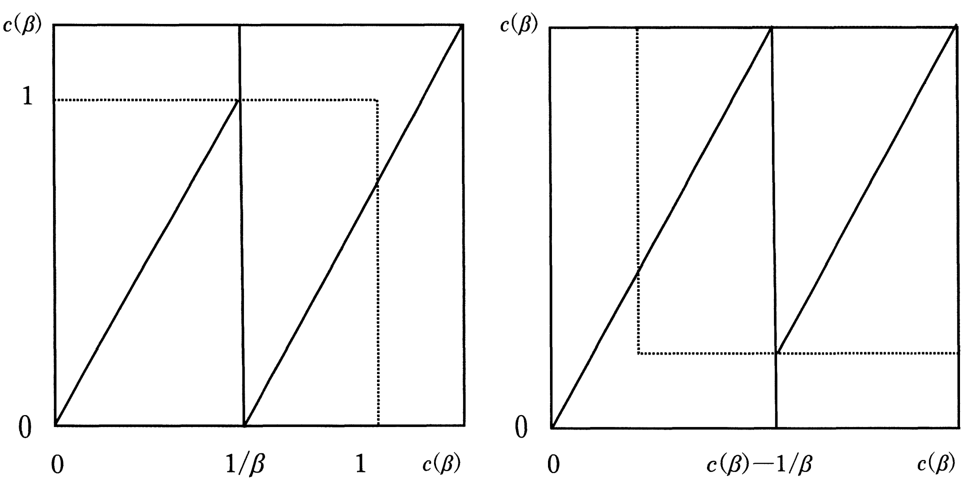
で定義する. 簡単な計算により,

$$T_{\beta,0}(x) = \beta x - d_\beta^0(x) \ \ (x \in J_\beta)$$

であることがわかる. ここで $d_\beta^0(x) = [\beta] - d_\beta^1(l_\beta(x))$. 変換 $T_{\beta,0}$ を lazy 変換とよぶ.

$1 < \beta < 2$ のとき, 各変換は下図のようになる.

$T_{\beta,1}$ の図　　　　$T_{\beta,0}$の図



区間 J_β の分割 $\{E_k\}_{k=0}^{[\beta]} \cup \{S_k\}_{k=1}^{[\beta]}$ を次のように定義する:

$$E_k = \Big(\frac{[\beta]}{\beta(\beta-1)} + \frac{k-1}{\beta}, \frac{k+1}{\beta}\Big) \ (k = 1, \cdots, [\beta]-1),$$
$$E_0 = \Big[0, \frac{1}{\beta}\Big), \quad E_{[\beta]} = \Big(\frac{[\beta]}{\beta(\beta-1)} + \frac{[\beta]-1}{\beta}, c(\beta)\Big],$$

$$S_k = \Big[\frac{k}{\beta}, \frac{[\beta]}{\beta(\beta-1)} + \frac{k-1}{\beta}\Big] \quad (k = 1, \cdots, [\beta]).$$

定義より, $x \in E_k$ のとき $T_{\beta,1}(x) = T_{\beta,0}(x)$ かつ $d_\beta^1(x) = d_\beta^0(x)$, $x \in S_k$ のとき $T_{\beta,1}(x) = T_{\beta,0}(x) - 1$ かつ $d_\beta^1(x) = d_\beta^0(x) + 1$ が成り立っている. つまり集合 $E := \bigcup_{k=0}^{[\beta]} E_k$ 上では 2 つの変換は一致し, 各 E_k 上で 2 つのデジット関数 d_β^1 と d_β^0 の値は等しく k となる. 集合 $S := \bigcup_{k=1}^{[\beta]} S_k$ 上では 2 つの変換は (ちょうど 1 だけ) 異なり, 各 S_k 上で 2 つのデジット関数 d_β^1 と d_β^0 の値はそれぞれ k, $k-1$ となる.

ランダム β-変換は次のように定義される. Ω で 0-1 無限列全体の集合 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ をあらわすとし, $\sigma : \Omega \to \Omega$ をその上の左シフト: $\sigma((w_i)_{i=1}^\infty) = (w_{i+1})_{i=1}^\infty$ $\big((w_i)_{i=1}^\infty \in \Omega\big)$ とする. 変換 $K_\beta : \Omega \times J_\beta \to \Omega \times J_\beta$ を

$$K_\beta(\omega, x) = \begin{cases} (\omega, T_{\beta,\omega_1}(x)) & \text{if } (\omega, x) \in \Omega \times E, \\ (\sigma\omega, T_{\beta,\omega_1}(x)) & \text{if } (\omega, x) \in \Omega \times S \end{cases}$$

で定義し, ランダム β-変換とよぶ. 直感的な説明として, ランダム β-変換は, 点 $x \in J_\beta$ が 2 つの変換 $T_{\beta,1}$ と $T_{\beta,0}$ が異なる集合 S 上にある場合にはコインを投げその結果に応じていずれかの変換を x に作用させるが, 2 つの変換が一致する集合 E 上にある場合にはコインを投げずに x に $T_{\beta,1}(T_{\beta,0})$ を作用させるという変換である. ランダム β-変換を用いて, 各点 $x \in J_\beta$ の β-展開を以下のようにして得ることができる.

ランダム β-展開

$pr_1 : \Omega \times J_\beta \to \Omega$ で Ω への射影, $pr_2 : \Omega \times J_\beta \to J_\beta$ で J_β への射影をあらわすとする. また $\pi_1 : \Omega \to \{0,1\}$ で $\{0,1\}$ への射影をあらわすとすると, ランダム β-変換の定義から, 自然数 $n \in \mathbb{N}$ と $(\omega, x) \in \Omega \times J_\beta$ に対し,

$$pr_2(K_\beta^{n-1}(\omega, x)) = \frac{d_\beta^{\pi_1 \circ pr_1(K_\beta^{n-1}(\omega,x))}(pr_2(K_\beta^{n-1}(\omega, x)))}{\beta} + \frac{pr_2(K_\beta^n(\omega, x))}{\beta}$$

が成り立つ．この等式をくり返し用いることにより，

$$
\begin{aligned}
x &= pr_2(\omega, x) \\
&= \frac{d_\beta^{\pi_1 \circ pr_1(\omega,x)}(pr_2(\omega,x))}{\beta} + \frac{pr_2(K_\beta(\omega,x))}{\beta} \\
&= \frac{d_\beta^{\pi_1 \circ pr_1(\omega,x)}(pr_2(\omega,x))}{\beta} + \frac{d_\beta^{\pi_1 \circ pr_1(K_\beta(\omega,x))}(pr_2(K_\beta(\omega,x)))}{\beta^2} + \frac{pr_2(K_\beta^2(\omega,x))}{\beta^2} \\
&= \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{d_\beta^{\pi_1 \circ pr_1(K_\beta^{n-1}(\omega,x))}(pr_2(K_\beta^{n-1}(\omega,x)))}{\beta^n} + \frac{pr_2(K_\beta^N(\omega,x))}{\beta^N}
\end{aligned}
$$

が成り立ち，$0 \leqq pr_2(K_\beta^N(\omega, x) \leqq c(\beta)$ であることから，x の β-展開

$$
x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_\beta^{\pi_1 \circ pr_1(K_\beta^{n-1}(\omega,x))}(pr_2(K_\beta^{n-1}(\omega,x)))}{\beta^n}
$$

が各 $\omega \in \Omega$ ごとに得られる．これを (ω に関する)x のランダム β-展開とよぶ．ランダム β-展開の性質として以下のことが知られている．以下 $(\omega, x) \in \Omega \times J_\beta$ に対し，

$$
d_n(\omega, x) = d_\beta^{\pi_1 \circ pr_1(K_\beta^{n-1}(\omega,x))}(pr_2(K_\beta^{n-1}(\omega,x))) \quad (n \geqq 1)
$$

とおく．また $\leqq_{lex}$ で $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上の辞書式順序をあらわす．つまり $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}, \{\omega_i^{'}\}_{i=1}^{\infty} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対し，

$$
\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty} \leqq_{lex} \{\omega_i^{'}\}_{i=1}^{\infty} \Leftrightarrow \{\omega_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\omega_i^{'}\}_{i=1}^{\infty} \text{またはある } n \geqq 1 \text{ が存在し}, \omega_n < \omega_n^{'}
$$

で $\in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上の順序を定める．

定理 2.1 (Dajani and de Vries [3])**.** $x \in J_\beta$ のランダム β-展開の展開係数列に対し，以下の関係が成り立つ．$\omega, \omega^{'} \in \{0.1\}^{\mathbb{N}}$ に対し，

$$
\omega \leqq_{lex} \omega^{'} \text{ならば } \{d_i(\omega, x)\}_{i=1}^{\infty} \leqq_{lex} \{d_i(\omega^{'}, x)\}_{i=1}^{\infty}.
$$

定理 2.2 (Dajani and de Vries [3])**.** 与えられた $x \in J_\beta$ の β-展開 $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i/\beta^i$ に対し，ある $\omega \in \Omega$ が存在し，$\{d_i(\omega, x)\}_{i=1}^{\infty} = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ が成り立つ．

上の定理 2.1 から，とくに $\omega^{(0)} = (0, 0, \dots)$ と $\omega^{(1)} = (1, 1, \dots)$ に関するランダム β-展開 (各々 lazy 変換, greedy 変換のみ用いて生成される β-展開) の係数列は，辞書式順序でそれぞれ最小，最大となる．また，定理 2.2 は，与えられた x の β-展開に対し，その β-展開をランダム β-展開によって実現することができるということ，つまり全ての β-展開をランダム β-展開として表現することができるということを主張している．

以上の結果を合わせると, 辞書式順序として各点の最小の β-展開の展開係数列を生成する lazy 変換と, 最大の係数列を生成する greedy 変換のいずれかをうまく選びながら合成することにより, 展開係数列がその 2 つの中間にあるような β-展開をすべて表現することができるということがわかる. 以上のランダム β-展開の性質から, ランダム β-変換に対しても決定論的な β-変換の場合と同様に (たとえば [5],[8],[10] を参照), 変換のエルゴード理論的研究を通じて, β-展開に関する統計量, たとえば, (自然な測度に対し) ほとんどいたるところの点 $x \in J_\beta$ を β-展開したときに展開係数としてある数がどのぐらいの頻度で出現するか (相対頻度) 等を調べることは興味深い問題であると考えられる.

3 変換のエルゴード的性質

以下, $\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{B}(J_\beta)$ でそれぞれ Ω, J_β 上の Borel 集合体をあらわす (Ω にはシリンダー集合族から生成される位相が入っているとする). $p \in (0,1)$ とし, m_p で $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ 上の $(1-p, p)$-Bernoulli 測度, λ_β で $(J_\beta, \mathcal{B}(J_\beta))$ 上の正規化された Lebesgue 測度をあらわすとする. スキュープロダクト変換 $R_\beta : \Omega \times J_\beta \to \Omega \times J_\beta$ を

$$R_\beta(\omega, x) = (\sigma\omega, T_{\beta,\omega_1}(x)) \quad (\omega, x) \in \Omega \times J_\beta$$

で定義する. ランダム β-変換 K_β とスキュープロダクト変換 R_β は直積確率空間 $(\Omega \times J_\beta, \mathcal{B}(\Omega) \otimes \mathcal{B}(J_\beta), m_p \otimes \lambda_\beta)$ 上の非特異変換となる. ランダム β-変換 K_β は通常のランダム力学系 R_β と若干定義が異なるが, 次の補題が成り立つ.

補題 3.1 (Dajani and de Vries [4]). μ を $(J_\beta, \mathcal{B}(J_\beta)$ 上の *Borel* 確率測度とする. このとき

$$m_p \otimes \mu \circ K_\beta^{-1} = m_p \otimes \mu \circ R_\beta^{-1}.$$

が成り立つ.

上の補題から, $m_p \otimes \lambda_\beta$ に関して絶対連続な K_β-不変確率測度の考察は R_β のそれに帰着されるため, 区分的 C^2 級拡大写像によるスキュープロダクト変換（ランダム力学系）に関して知られている結果を適用することができる.

定理 3.2 (Dajani and de Vries [4]). (1) $m_p \otimes \lambda_\beta$ に関して絶対連続な K_β-不変確率測度 $\hat{\mu}_{\beta,p}$ がただひとつ存在し, それは直積測度: $\hat{\mu}_{\beta,p} = m_p \otimes \mu_{\beta,p}$ であらわされる.

(2) 可測力学系 $(K_\beta, m_p \otimes \mu_{\beta,p})$ はエルゴード的である.

この結果は Pelikan [9] による結果を変換 R_β に適用することにより従うが, そこからは $\mu_{\beta,p}$ の密度関数の具体的な表示は得られない. ランダム β-変換の場合, 先で説明

した β-展開との関係から, 密度関数の表示が与えられると, β-展開に関する統計量の定量的評価や, 統計量と β の代数的性質との関係性などのより深い考察が可能となるため, その表示を具体的に求めることは重要である. 先行研究において Dajani と de Vries [4] が β が特殊な代数的整数であるとき, Kempton [7] が $p=1/2$ の場合に密度関数 $h_{\beta,p}$ の明示公式を求めているが, 本講演での主定理のうちの 1 つはそれらの結果を一般の β と p の場合に拡張したものである.

4 主定理

本節では講演で紹介した主定理とその証明の概略について解説する. 以下 $n \geq 1$ と $\omega_1 \cdots \omega_n \in \{0,1\}^n$ に対して $T_{\beta,\omega_1\cdots\omega_n} = T_{\beta,\omega_n} \circ \cdots \circ T_{\beta,\omega_1}$ と定める. $n=0$ のとき $T_{\beta,\omega_1\cdots\omega_n}$ は恒等関数であると解釈する. 次の主定理の (1) と (3) は論文 [12] の結果をもとにしている.

定理 4.1. (1) $m_p \otimes \lambda_\beta$ に関して絶対連続な K_β-不変確率測度 $\hat{\mu}_{\beta,p} = m_p \otimes \mu_{\beta,p}$ に対し, $\mu_{\beta,p}$ の密度関数を $f_{\beta,p}$ であらわすとする. 関数 $\phi_{\beta,p} : J_{\beta,p} \to \mathbb{R}$ を

$$\phi_{\beta,p} = \chi_{[0,1]} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^n} \sum_{\omega_1\cdots\omega_n} m_p([\omega_1 \cdots \omega_n]_1^n) \chi_{[0,T_{\beta,\omega_1\cdots\omega_n}(1)]}$$

とおく. ここで χ_A は集合 A の示性関数をあらわす. また

$$C(\beta,p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^n} \sum_{\substack{\omega_1\cdots\omega_n; \\ \omega_n=0}} d_\beta^0(T_{\beta,\omega_1\cdots\omega_{n-1}}(1)) m_{1-p}([\omega_1 \cdots \omega_n]_1^n)$$

とおく. ここで $[\omega_1 \cdots \omega_n]_1^n$ は長さ n のシリンダー集合をあらわす. さらに

$$\rho_{\beta,p} = C(\beta,p)\phi_{\beta,p} + C(\beta,1-p)\phi_{\beta,1-p} \circ l_\beta$$

とおくと, 密度関数 $f_{\beta,p}$ は

$$f_{\beta,p} = \frac{\rho_{\beta,p}}{\int_{J_\beta} \rho_{\beta,p} d\lambda_\beta}$$

で与えられる.

(2) 可測力学系 $(K_\beta, m_p \otimes \mu_{\beta,p})$ の測度論的エントロピー $h_{m_p\otimes\mu_{\beta,p}}(K_\beta)$ は

$$h_{m_p\otimes\mu_{\beta,p}}(K_\beta) = \log\beta + \mu_{\beta,p}(S)(-p\log p - (1-p)\log(1-p))$$

で与えられる.

(3) $1 \in J_\beta$ がただひとつの β-展開をもつとき (このとき β は *univoque number* とよばれる), $\mu_{\beta,p}(S)$ は p によらない. よって測度論的エントロピー $h_{m_p\otimes\mu_{\beta,p}}(K_\beta)$ は p の関数として $p=1/2$ で最大値をとる.

上の定理 (1) から, β-展開に関する統計量の評価やそれと β の代数的性質との関係性, また β と p をパラメータと考えた場合の密度関数 $f_{\beta,p}$ の挙動を考察することが可能となる (詳しくは論文 [12] を参照). またエルゴード定理から $\mu_{\beta,p}(S)$ はほとんどいたるところの点のランダムオービットが集合 S を通過する相対頻度をあらわしているが, 上の定理 (3) は, β が univoque number であればその相対頻度が p に関し一定であるという興味深い性質を示している.

証明の概略を与える前に, 上の定理 (1) の証明に必要な Perron-Frobenius 作用素を定義する. Perron-Frobenius 作用素の基本的な性質は [1] などを参照頂きたい.

Perron-Frobenius 作用素

$(X, \mathcal{B}, m)$ を確率空間とし, T をその上の非特異変換 (T は可測写像かつ任意の $A \in \mathcal{B}$ に対し, $m(A) = 0$ ならば $m(T^{-1}(A)) = 0$ をみたす) とする. このとき T の m に関する Perron-Frobenius 作用素 $\mathcal{L}_{T,m} : L^1(m) \to L^1(m)$ を

$$\mathcal{L}_{T,m} f = \frac{d}{dm} \int_{T^{-1}(\cdot)} f dm \quad (f \in L^1(m))$$

で定義する. ここで d/dm は m に関するラドン・ニコディム微分をとる操作をあらわす.

以下では, $X = J_\beta, \mathcal{B} = \mathcal{B}(J_\beta), m = \lambda_\beta, T = T_{\beta,i}$ $(i = 0, 1)$ とする. また $\mathcal{L}_{T_{\beta,i}} = \mathcal{L}_{T_{\beta,i},\lambda_\beta}$ $(i = 0, 1)$ と略記する. $f \in L^1(\lambda_\beta)$ に対し, $\mu_f(\cdot) = \int_{(\cdot)} f d\lambda_\beta$ とおく. ここで,

$$\mathcal{L}_{R_\beta} = p\mathcal{L}_{T_{\beta,1}} + (1-p)\mathcal{L}_{T_{\beta,0}}$$

とおくと, $f \in L^1(\lambda_\beta)$ に対し, $m_p \otimes \mu_f \circ R_\beta^{-1} = m_p \otimes \mu_f$ が成り立つことと f が作用素 $\mathcal{L}_{R_\beta}$ の固定点となること, すなわち $\mathcal{L}_{R_\beta} f = f$ が成り立つことは同値となる.

証明の概略

(1) 作用素 $\mathcal{L}_{R_\beta}$ の線形性と上で説明したことから $\mathcal{L}_{R_\beta}\rho_{\beta,p} = \rho_{\beta,p}$ であることを示せばよい. いま, $f \in L^1(\lambda_\beta)$ に対し

$$\mathcal{L}_{T_{\beta,i}} f(x) = \sum_{x = T_{\beta,i}(y)} \frac{1}{\beta} \cdot f(y) \quad \lambda_\beta\text{-}a.e.\ x \in J_\beta$$

が成り立つことから, $n \geqq 1$ と $\omega_1 \cdots \omega_n \in \{0,1\}^n$ に対し, 次の式が得られる.

$$\mathcal{L}_{T_{\beta,1}} \chi_{[0, T_{\beta,\omega_1\cdots\omega_n}(1)]} = \frac{1}{\beta}\Big(d_\beta^1(T_{\beta,\omega_1\cdots\omega_n}(1))\chi_{[0,1]} + \chi_{[0, T_{\beta,\omega_1 \cdots\omega_n 1}(1)]}\Big).$$

この式を用いると, 関係式

$$\begin{aligned}
&p\mathcal{L}_{T_{\beta,1}}\rho_{\beta,p} \\
&=\Big\{C(\beta,p)D(\beta,1-p)+C(\beta,1-p)C(\beta,p)\Big\}\chi_{[0,1]} \\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\beta^n}\sum_{\substack{\omega_1\cdots\omega_n;\\ \omega_n=1}} m_p([\omega_1\cdots\omega_n]_1^n) \\
&\cdot\Big(C(\beta,p)\chi_{[0,T_{\beta,\omega_1\cdots\omega_n}(1)]}+C(\beta,1-p)\chi_{[T_{\beta,\omega_1\cdots\omega_n}(l_\beta 1),c(\beta)]}\Big)
\end{aligned}$$

が得られる. ここで

$$D(\beta,p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\beta^n}\sum_{\substack{\omega_1\cdots\omega_n;\\ \omega_n=1}} d_\beta^1(T_{\beta,\omega_1\cdots\omega_{n-1}}(1))m_{1-p}([\omega_1\cdots\omega_n]_1^n).$$

スキュープロダクト変換 R_β を用いた 1 の β-展開との関係から

$$C(\beta,p)+D(\beta,p)=\int_\Omega\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_\beta^{\omega_n}(T_{\beta,\omega_1\cdots\omega_{n-1}}(1))}{\beta^n}dm_{1-p}(\omega)=1$$

が成り立つことより, 結局

$$\begin{aligned}
p\mathcal{L}_{T_{\beta,1}}\rho_{\beta,p}&=B^0(\beta,p)\chi_{[0,1]} \\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\beta^n}\sum_{\substack{\omega_1\cdots\omega_n;\\ \omega_n=1}} m_p([\omega_1\cdots\omega_n]_1^n) \\
&\cdot\Big(B^0(\beta,p)\chi_{[0,T_{\beta,\omega_1\cdots\omega_n}(1)]}+B^0(\beta,1-p)\chi_{[T_{\beta,\omega_1\cdots\omega_n}(l_\beta 1),c(\beta)]}\Big).
\end{aligned}$$

となることがわかる. この式と関係式 $\mathcal{L}_{T_{\beta,0}}\rho_{\beta,1-p}=\mathcal{L}_{T_{\beta,1}}\rho_{\beta,p}\circ l_\beta$ から, 所望の式

$$\mathcal{L}_{R_\beta}\rho_{\beta,p}=(p\mathcal{L}_{T_{\beta,1}}+(1-p)\mathcal{L}_{T_{\beta,0}})\rho_{\beta,p}=\rho_{\beta,p}$$

を得る.

(2) $\Omega\times J_\beta$ の分割 $\mathcal{A}$ を

$$\mathcal{A}=\{A\times B\in\Omega\times J_\beta \mid A\in\{[0]_1^1,[1]_1^1\},B\in\{E_0,\cdots,E_{[\beta]},S_1,\cdots,S_{[\beta]}\}$$

で定義すると, 分割 $\mathcal{A}$ は可測力学系 $(K_\beta,m_p\otimes\mu_{\beta,p})$ のジェネレーターとなることがわかる. $n\geqq 1$ に対し

$$\mathcal{A}^{(n)}=\{I_0\cap K_\beta^{-1}I_1\cap\cdots\cap K_\beta^{-(n-1)}I_{n-1}\mid I_i\in\mathcal{A},0\leqq i\leqq n-1\}$$

とおき, $(\omega,x)\in\Omega\times J_\beta$ に対し $A^{(n)}(\omega,x)$ で点 (ω,x) の属する $\mathcal{A}^{(n)}$ の元をあらわすとすると, $A^{(n)}(\omega,x)$ は (長さ q のシリンダーセット) $\times$ (長さ C/β^nの区間) というか

たちであらわされる．ここで $q=\sum_{i=0}^{n-1}\chi_{\Omega\times S}(K_\beta^i(\omega,x))$, C は β にのみ依存する正の定数．このことと，可測集合 $A\times B$ によらない正数 $D>0$ が存在して，

$$D^{-1}\cdot m_p\otimes\mu_{\beta,p}(A\times B)\leqq m_p\otimes\lambda_\beta(A\times B)\leqq D\cdot m_p\otimes\mu_{\beta,p}(A\times B)$$

が成り立つことから，Shannon-McMillan-Breiman の定理より結果が従う．

(3) β が univoque number であるとすると，$1\in J_\beta$ のランダムオービット $T_{\beta,\omega_1\cdots\omega_n}(1)$ $(n\geqq 0,\omega_1\cdots\omega_n\in\{0,1\})$ は S を通過しない (S を通過するとき，$1\in J_\beta$ は 2 つ以上の β-展開であらわされる) ことから，$m\geq 1$ と $\omega_1\cdots\omega_m,\hat{\omega}_1\cdots\hat{\omega}_m\in\{0,1\}^m$ に対し，

$$T_{\beta,\omega_1\cdots\omega_n}(1)=T_{\beta,\hat{\omega}_1\cdots\hat{\omega}_m}(1)$$

が成り立つ．よって明示公式から

$$h_{\beta,p}=ph_{\beta,1}+(1-p)h_{\beta,1}\circ l_\beta$$

が従う．ここで $h_{\beta,1}=\rho_{\beta,1}/\int_{J_\beta}\rho_{\beta,1}d\lambda_\beta$．また $l_\beta(S)=S$ であることから

$$\mu_{\beta,p}(S)=\int_S h_{\beta,1}d\lambda_\beta$$

が成り立ち，右辺が p によらないことから結果が従う．

参考文献

[1] A. Boyarsky and P. Góra, Laws of Chaos. Invariant measures and dynamical systems in one dimension, Probability and its Applications, Birkhäuser, Boston, MA, 1997.

[2] K. Dajani and C. Kraaikamp, *Random β-expansions*, Ergod.Th. & Dynam.Sys. **23** (2003), 461-479.

[3] K. Dajani and M. de Vries, *Measures of maximal entropy for random β-expansions*, J. Eur. Math. Soc. **7** (2005), 51–68.

[4] K. Dajani and M. de Vries, *Invariant densities for random β-expansions*, J. Eur. Math. Soc. **9** (2007), 157–176.

[5] A. Gel'fond, *A common property of number systems*, Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. **23** (1959), 809–814.

[6] P. Erdős, I. Joó, and V. Komornik, *Characterization of the unique expansions $1=\sum_{i=1}^{\infty}q^{-n_i}$ and related problems*, Bull. Soc. Math. France. **118** (1990), 377–390.

[7] T. Kempton, *On the invariant density of the random β-transformation*, Acta Math. Hungar. **142** (2014), 403–419.

[8] W. Parry, *On the β-expansions of real numbers*, Acta. Math. Acad. Sci. Hunger. **11** (1960), 401–416.

[9] S. Pelikan, *Invariant densities for random maps of the interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **281** (1984), 813–825.

[10] A. Rényi, *Representations for real numbers and their ergodic properties*, Acta. Math. Acad. Sci. Hunger. **8** (1957), 477–493.

[11] N. Sidorov, *Almost every number has a continuum of β-expansions*, Amer. Math. Month. **110** (2003), 838–842.

[12] S. Suzuki, *Invariant density functions of random β-transformations*, to appear in Ergod.Th. & Dynam.Sys.