数理解析研究所講究録 第2115巻 2019年 83-90

QUENCHED CENTRAL LIMIT THEOREM FOR RANDOM EXPANDING MAPS

(ランダムな拡大写像の急冷型中心極限定理)

中野 雄史
北見工業大学 工学部

1. はじめに

拡大写像をはじめとするカオス的な力学系においては，**転移作用素**（trasnfer operator）と呼ばれる力学系に付随する作用素のスペクトルを解析することで，多様な統計的性質が理解されることが知られている．特に，転移作用素のスペクトル・ギャップ（の安定性）の証明を通して力学系の中心極限定理を示す方法は**Nagaëv の方法**と呼ばれ，1980～90 年代に大きな進展を遂げた．

一方でごく近年，ランダム力学系の（急冷型）中心極限定理の証明においても，Nagaëv の方法が有用であることが Dragičević たち [5] によって示された．本稿は，Nagaëv の方法と Dragičević らの結果を紹介することを目的とする.[1] 本稿は，鄭容武氏（広島大）と J. Wittsten 氏（Lund 大）との共同研究をもとにしている．

2. 急冷型極限定理の問題とその背景

確率論における古典的な問題意識として，次のようなものがある：X を距離空間，μ をその上の Borel 確率測度とし，$\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ を確率空間 (X,μ) 上の平均 0，分散 1 の同分布な確率過程とする．

問題 1. $S_n=\varphi_0+\varphi_1+\cdots+\varphi_{n-1}:X\to\mathbb{R}$ は漸近的にどのように振る舞うか？

例えば大数の法則は $\mathcal{O}(n)$ での，中心極限定理は $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ での一つの回答を与える．古典的には，$\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ が独立である場合にこれらの極限定理が成り立つことが知られているが，$\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ が独立でない場合でも様々な設定で極限定理が成り立つことが知られており，その一つに力学系の極限定理がある．

具体的には次のような問題が考えられてきた．X をコンパクトで滑らかな Riemann 多様体とし，$f:X\to X$ をその上の滑らかな（少なくとも $\mathscr{C}^1$ 級の）写像とする．さらに μ を f-不変な（つまり，任意の Borel 集合 $A\subset X$ について $\mu(f^{-1}A)=\mu(A)$ が成り立つ）X 上の確率測度とする．このとき任意の滑らかな関数 $\varphi:X\to\mathbb{R}$ について $\{\varphi\circ f^n\}_{n\geq 0}$ は確率空間 (X,μ) 上の同分布な確率過程になることに注意されたい．次の問題が重要である：

問題 2. $S_n=\varphi+\varphi\circ f+\cdots+\varphi\circ f^{n-1}:X\to\mathbb{R}$ は漸近的にどのように振る舞うか？

以下に紹介するように，f が十分にカオス的であるとき（e.g. 拡大写像），大数の法則や中心極限定理が成り立つことが知られている．これを正確に述べる前に，さらにランダム力学系についても同様の問題を考えることにしよう．

$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ を確率空間とし，$\sigma:\Omega\to\Omega$ を測度保存的な（つまり $\mathbb{P}$ が σ-不変な）可逆かつ可測な変換とする．このとき可測写像 $F:\mathbb{N}_0\times\Omega\times X\to X$ が（σ 上の）**ランダム力学系**（random dynamical system；以下 **RDS** と略す）であるとは，$F(n,\omega,\cdot)$ を $f_\omega^{(n)}$ と書くとき

$$f_\omega^{(0)}=\mathrm{id}_X \quad \text{および} \quad f_\omega^{(n+m)}=f_{\sigma^m\omega}^{(n)}\circ f_\omega^{(m)}$$

[1]その背景について，6 節も参照していただきたい．

が任意の $\omega \in \Omega$, $n, m \in \mathbb{N}_0$ について成り立つことをいう（この定義は Arnold [2] による；「ランダム力学系」という用語は文脈によって定義が異なるので注意されたい）．このとき σ は**駆動系**（driving system）と呼ばれ，$F(1, \omega, \cdot)$ を f_ω と書けば，

$$(2.1) \qquad F(n, \omega, \cdot) \equiv f_\omega^{(n)} = f_{\sigma^{n-1}\omega} \circ f_{\sigma^{n-2}\omega} \circ \cdots \circ f_\omega$$

が成り立つことが簡単にわかる．((2.1) はちょうど通常の力学系での，写像 $f : X \to X$ の n 回合成 $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ \circ f$ に対応している．）逆に，可測写像 $\Omega \times X \ni (\omega, x) \mapsto f_\omega(x)$ が与えられたとき (2.1) によって定まる F は RDS となることがすぐにわかる（これを（σ 上の）f **から誘導される RDS** と呼ぶ）．

$\mathcal{B}$ を X の Borel σ-代数とする．関数 $\mu : \Omega \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ が F-**不変確率測度**であるとは，(1) 任意の $\omega \in \Omega$ について $\mu_\omega := \mu(\omega, \cdot)$ が X 上の確率測度，(2) 任意の $A \in \mathcal{B}$ について $\omega \mapsto \mu_\omega(A)$ が可測，(3) ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ と任意の $A \in \mathcal{B}$ について

$$(2.2) \qquad \mu_\omega(f_\omega^{-1} A) = \mu_{\sigma\omega}(A) \cdot$$

が成立することをいう．μ を F-不変な確率測度とし，$\varphi : X \to \mathbb{R}$ を滑らかな関数とする．このとき，$\varphi \circ f_\omega^{(n)}$ は (X, μ_ω) 上の確率変数であって，その分布測度は φ の $(X, \mu_{\sigma^n\omega})$ に対する分布測度と一致することが (2.2) より簡単にわかる．次の問題が考えられる：

問題 3. ほとんどすべての ω について，$S_{n,\omega} = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f_\omega^{(j)}$ は漸近的にどのように振る舞うか？

この形式での極限定理の問題は**急冷型**（quenched）と言われ，**徐冷型**（annealed）の問題「$\bar{S}_n = E_{\mathbb{P}}\left[\sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f_{(\cdot)}^{(j)}\right]$ は漸近的にどのように振る舞うか？」と対比される．(「急冷型／徐冷型」は確率論から流用された用語となる．また，本稿の文脈ではつねに急冷型の極限定理の方が強い結果となる．)

3. 力学系の中心極限定理

（ランダムな）拡大写像については以下のような結果が知られている．$f_0 : X \to X$ が**拡大写像**であるとは，定数 $C > 0, \lambda_0 > 1$ が存在して

$$|Df_0^n(x)v| \geq C\lambda^n |v|, \quad x \in X, v \in T_x X$$

が成り立つことをいう．拡大写像は，ただ 1 つ絶対連続でエルゴード的な不変確率測度を持つことが知られているが（[18]），これを μ^0 とかく．$\varphi : X \to \mathbb{R}$ を滑らかで $E_{\mu^0}[\varphi] = 0$ を満たすような関数とし，$\varphi_n = \varphi \circ f_0^n$，$S_n = \varphi_0 + \cdots + \varphi_{n-1}$ とする．μ^0 が f_0-不変であることから，Birkhoff のエルゴード定理より（(X, μ^0) 上の確率過程 $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ について）大数の強法則が成り立つ：μ^0 に関してほとんど確実に $\lim_{n\to\infty} S_n/n = 0 = E_{\mu^0}[\varphi]$．

また,「統計的分散」が 0 でない場合，中心極限定理も成立することが知られている．

定理 4 (Gordin [8]). 上で定められた S_n について，

$$\Sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{E_{\mu^0}[|S_n|^2]}{n} > 0$$

が成り立つとする．このとき，$\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ について中心極限定理が成り立つ．つまり，任意の $a < b$ について，

$$\lim_{n\to\infty} \mu^0 \left(a \leq \frac{S_n}{\sqrt{b}} \leq b \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma^2}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2\Sigma^2}} dt$$

が成り立つ．

次にランダム力学系の中心極限定理を考える．f_0 のノイズ強度 ϵ の微少摂動 $f \equiv f_\epsilon$ を，$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の $\mathscr{C}^2(X, X)$-値確率変数であって

$$\operatorname*{ess\,sup}_\omega d_{\mathscr{C}^2}(f_\omega, f_0) \leq \epsilon$$

を満たすものとする．ただし $f_\omega = f(\omega)$．また ϵ は，ほとんどすべての ω について $f_\omega : X \to X$ が拡大写像である程度に十分小さいものとする．$\sigma : \Omega \to \Omega$ を 2 節の条件を満たすようなものとし（簡単のためにさらにエルゴード性を仮定する），F を σ 上の f から誘導される RDS とする．

このとき，やはりただ一つ絶対連続でエルゴード的な不変確率測度 μ が存在することが知られている（つまり，ほとんどすべての ω について μ_ω は絶対連続であって，μ_ω に関してほとんどすべての x について $\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n,\omega}(x)}{n} = 0$．ただし，$S_{n,\omega} = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f_\omega^{(j)}$ であって，$\varphi : X \to \mathbb{R}$ はほとんど確実に $E_{\mu_\omega}[\varphi] = 0$ を満たすような滑らかな関数；[12] より）．

次の急冷型中心極限定理が成り立つ．

定理 5 (Kifer [13])．上で定められた $\omega \mapsto S_{n,\omega}$ について，

$$\bar{\Sigma}^2 := E_{\mathbb{P}}[\Sigma^2_{(\cdot)}] > 0, \quad \Sigma^2_\omega := \lim_{n\to\infty} \frac{E_{\mu_\omega}[|S_{n,\omega}|^2]}{n}$$

が成り立つとする．このとき，ほとんどすべての ω に関して $\{\varphi \circ f_\omega^{(n)}\}_{n\geq 0}$ の急冷型中心極限定理が成り立つ：任意の $a < b$ について，

$$\lim_{n\to\infty} \mu_\omega \left(a \leq \frac{S_{n,\omega}}{\sqrt{b}} \leq b \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\Sigma}^2}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2\bar{\Sigma}^2}} dt.$$

Remark 6. 拡大写像の極限定理は定理 4（および絶対連続でエルゴード的な不変確率測度の唯一存在性）の他にも多くの発展があった．例えば，相関関数の指数的減衰，大偏差値原理，局所極限定理，almost sure invariant principle，Berry-Esséen inequality, Erdös-Rényi laws，dynamical Borel-Cantelli lemmas，concentration inequalities などが知られている（[3, 4, 1, 5] およびその参考文献を参照）．また，$\Sigma^2 = 0$ となる条件が（局所極限定理とともに）盛田健彦氏 [16] によって研究された．

ランダム拡大写像の極限定理についても（Dragičević らの結果 [5] 以前に）いくつか極限定理が知られていた（例えば [15, 11] など）が，決定論的な力学系と比べると不明なことが多かった．例えば，ランダム拡大写像の急冷型の局所極限定理は [5] の Nagaëv の方法の導入によりはじめて証明された．

4. Nagaëv の方法

力学系の中心極限定理の証明にはマルチンゲールの中心極限定理の適用（[8]）など様々な方法があるが，本稿では Nagaëv の方法と呼ばれる関数解析的・スペクトル理論的方法を紹介する．Nagaëv [14] は，1957 年の論文でマルコフ連鎖の研究のため，遷移確率を核とする積分作用素のスペクトル解析を行った．この手法は，80 年代に Rousseau-Egele [17] や Guivarc'h & Hardy [9] らによって力学系の中心極限定理の文脈に拡張された．これらの詳しい経緯や Nagaëv の方法の詳細な説明については，Hennion & Hervé [10] と Gouëzel [6] を参照してほしい．

4.1. **概要.** （通常の力学系に対する）Nagaëv の方法は，次の手順に分けられる．

- **Step 1**. Lévy の連続性定理の適用：中心極限定理を**特性関数** $\mathrm{char}(\frac{S_n}{\sqrt{n}})$ の各点収束に帰着する
- **Step 2**. $\mathrm{char}(\frac{S_n}{\sqrt{n}})$ を**ねじれ転移作用素**の合成 $(\mathcal{L}_{\frac{t}{\sqrt{n}}})^n$ を使って書き直す
- **Step 3**. 任意の小さな θ に対する $\mathcal{L}_\theta$ の**擬コンパクト性**（スペクトル・ギャップ）を示す
- **Step 4**. $\mathcal{L}_\theta$ の最大固有値 $\lambda(\theta)$ の θ に関する 2 次の Taylor 展開を計算する

Remark 7. 上記の手順は，独立同分布な確率過程 $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ に対する次の中心極限定理の古典的な証明の流れと対応している．

- **Step 1′**. Lévy の連続性定理の適用：中心極限定理を特性関数 $\mathrm{char}(\frac{S_n}{\sqrt{n}})$ の各点収束に帰着する
- **Step 2′**. $\mathrm{char}(\frac{S_n}{\sqrt{n}}) = \mathrm{char}(S_n)(\frac{t}{\sqrt{n}}) = (\mathrm{char}(\varphi)(\frac{t}{\sqrt{n}}))^n$ に注意する（独立同分布性より）
- **Step 3′**. $\mathrm{char}(\varphi)(\theta)$ の θ に関する 2 次の Taylor 展開を計算する

力学系の中心極限定理の文脈では，$(\mathrm{char}(\varphi)(\frac{t}{\sqrt{n}}))^n$ の代わりとして $(\lambda(\frac{t}{\sqrt{n}}))^n$ を考えることになる．

4.2. **ねじれ転移作用素.** μ^0 の密度関数を $h_0 : X \to \mathbb{R}$ とかき，X の正規化された Lebesgue 測度を Leb とする．Lévy の連続性定理より，定理 4 を示すには，任意の $t \in \mathbb{R}$ について

$$\mathrm{char}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)(t) := E_{\mu^0}\left[e^{i\frac{S_n}{\sqrt{n}}t}\right] = \int e^{i\frac{S_n}{\sqrt{n}}t} h_0 \, d\mathrm{Leb}$$

が，$n \to \infty$ で，平均 0，分散 Σ^2 の正規分布の特性関数である $e^{-\frac{\Sigma^2 t^2}{2}}$ に収束することを示せば十分であり，これを以下の目標とする．

$\mathrm{char}(\frac{S_n}{\sqrt{n}})(t) = \mathrm{char}(S_n)(\frac{t}{\sqrt{n}})$ なので，$\mathrm{char}(S_n)(\theta)$ の $\theta = 0$ 周りでの様子を解析する．そのためには，次の定義が重要である．$\varphi : X \to \mathbb{R}$ は S_n の定義に用いられた平均 0 の滑らかな関数であったことを思い出してほしい．

Definition 8. f_0 の転移作用素（transfer operator）$\mathcal{L} : \mathscr{C}^1(X) \to \mathscr{C}^1(X)$ を

$$\mathcal{L}u(x) = \sum_{f_0(y)=x} \frac{u(y)}{|\det Df_0(y)|}, \quad u \in \mathscr{C}^1(X),\ x \in X$$

で定義する．ただし $\mathscr{C}^1(X)$ は X 上の複素数値関数全体の空間である．さらに，$\theta \in \mathbb{R}$ について f_0 のねじれ転移作用素（twisted transfer operator）$\mathcal{L}_\theta \equiv \mathcal{L}_{\theta,\varphi} : \mathscr{C}^1(X) \to \mathscr{C}^1(X)$ を

$$\mathcal{L}_\theta u(x) := \mathcal{L}(e^{i\varphi\theta}u)(x) = \sum_{f_0(y)=x} \frac{e^{i\varphi(y)\theta}u(y)}{|\det Df_0(y)|}, \quad u \in \mathscr{C}^1(X),\ x \in X$$

によって定義する．

まず，次の重要な関係式に注意してほしい（変数変換公式からすぐに導かれる）．

$$\int \mathcal{L}u_1 \cdot u_2 \, d\mathrm{Leb} = \int u_1 \cdot u_2 \circ f_0 \, d\mathrm{Leb}. \tag{4.1}$$

これより，以下のように $\mathrm{char}(S_n)(\theta)$ をねじれ転移作用素によって書き直すことができる．

$$\begin{aligned} \mathrm{char}(S_n)(\theta) &= \int e^{iS_n\theta} \cdot h_0 \, d\mathrm{Leb} \\ &= \int e^{i(S_{n-1}\circ f_0)\theta} \cdot (e^{i\varphi\theta}h_0) \, d\mathrm{Leb} \\ &= \int e^{iS_{n-1}\theta} \cdot \mathcal{L}_\theta h_0 \, d\mathrm{Leb} = \int e^{iS_{n-2}\theta} \cdot \mathcal{L}_\theta^2 h_0 \, d\mathrm{Leb} = \cdots = \int \mathcal{L}_\theta^n h_0 \, d\mathrm{Leb}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

4.3. **擬コンパクト性.** f_0 が拡大写像であるとき，その転移作用素は擬コンパンクであり（つまり，本質的スペクトル半径 κ はスペクトル半径より真に小さい；結果として，κ より絶対値の大きいスペクトルは有限個の固有値だけであり，その重複度も有限），そのスペクトル半径は 1 であり，さらに絶対値が 1 であるスペクトルは単純固有値 1 のみであることが知られている（[19]）．

さらに，線型作用素の摂動論の一般論から，類似のスペクトル構造が θ が十分小さい $\mathcal{L}_\theta$ についても見られることがわかっている（例えば [10] 参照）：ねじれ転移作用素 $\mathcal{L}_\theta$ は擬コンパンクであり，そのスペクトル半径を r_θ とすると，絶対値が r_θ であるスペクトルは単純固有値 $\lambda(\theta)$ のみである（さらにこれは $\theta \to 0$ のとき $\lambda(\theta) \to 1$ を満たす）．このことを元にして，(簡単ではないが) 次のことがわかる．κ_θ を $\mathcal{L}_\theta : \mathscr{C}^1(X) \to \mathscr{C}^1(X)$ の本質的スペクトル半径とし，h_θ を $\mathcal{L}_\theta$ の $\lambda(\theta)$ に対応する固有関数とする（$\theta \to 0$ のとき $h_\theta \to h_0$）．このとき，線形汎関数 $\xi_\theta : \mathscr{C}^1(X) \to \mathbb{C}$ が存在して，$\xi_\theta(h_\theta) = 1$, $\theta \to 0$ のとき $\xi_0(h_\theta) \to 1$, $\xi_\theta(h_0) \to 1$ が成り立ち，さらに

$$\mathcal{L}_\theta^n u = \xi_\theta(u)\lambda(\theta)^n h_\theta + \mathcal{O}_u(\kappa_\omega^n).$$

ゆえに (4.2) より

$$\operatorname{char}(S_n)(\theta)=\xi_\theta(h_0)\lambda(\theta)^n\int h_\theta d\mathrm{Leb}+\mathcal{O}_u(\kappa_\omega^n)\sim\lambda(\theta)^n \tag{4.3}$$

が十分小さい θ と十分大きい n について成り立つ．

4.4. **最大固有値** $\lambda(\theta)$. 一方で，$\Lambda(\theta)=\log\lambda(\theta)$ について

$$\Lambda(0)=\Lambda'(0)=0,\quad \Lambda''(0)=\Sigma^2 \tag{4.4}$$

が成り立つ．(証明は容易ではないが，基本的なアイディアは Banach 空間上の関数

$$\mathbb{F}(\theta,b)=\frac{\mathcal{L}_\theta(h_0+b)}{\int\mathcal{L}_\theta(h_0+b)d\mathrm{Leb}}-(h_0+b),\quad(\theta,b)\in\mathbb{C}\times\mathscr{C}^1(X)$$

への陰関数定理の適用となる；まず $\partial_b\mathbb{F}(0,0)$ が可逆であることから $\mathbb{F}(\theta,b_\theta)=0$ の解 $\theta\mapsto b_\theta$ が存在する．このとき，$h_\theta:=h_0+b_\theta$ は $\mathcal{L}_\theta$ の固有関数．さらに $\lambda(\theta)=\int\mathcal{L}_\theta h_\theta\, d\mathrm{Leb}$ は対応する固有値であり，θ について $\mathscr{C}^2$ 級となる．(4.4) は，基本的には $\mathbb{F}$ の θ-偏微分に関する評価から導かれる.)

それゆえ，

$$\lambda\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=\exp\Lambda\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=\exp\left(\frac{\Sigma^2}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2+\mathcal{O}\left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3\right)\right)$$

となり，(4.3) より

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{char}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)(t)=\lim_{n\to\infty}\operatorname{char}(S_n)\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\lambda\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n=e^{-\frac{\Sigma^2t^2}{2}}.$$

つまり，目標だった式を得る．

5. 急冷型の NAGAËV の方法

以下では，4 節を下敷きにした上で，Dragičević たちの論文 [5] に基づいて Nagaëv の方法による定理 5 の証明の概略を説明する．4 節の手法は，基本的にはランダム力学系の文脈でもそのまま適用できる．ただし，最も大きな違いとして（急冷型の）ランダムな転移作用素では通常の意味での固有値が意味を持たないため，それに代わる概念を導入する必要があるという点がある．この解決には，近年発展の著しい**無限次元の Lyapunov 指数**（ないし**無限次元の Oseledets の乗法エルゴード定理**）の活用が鍵となる．このことを正確に説明するために，ランダムな（ねじれ）転移作用素を定義する．$\mathscr{E}(\mathscr{C}^1(X))$ を $C^1(X)$ 上の線形作用素全体の空間とする．F などの定義は 3 節の通りとする．

Definition 9. F のランダムな転移作用素（transfer operator）$\mathscr{L}:\Omega\to\mathscr{E}(\mathscr{C}^1(X))$ を

$$\mathscr{L}_\omega u(x)=\sum_{f_\omega(y)=x}\frac{u(y)}{|\det Df_\omega(y)|},\quad\omega\in\Omega,\ u\in\mathscr{C}^1(X),\ x\in X$$

で定義する．ただし $\mathscr{L}_\omega=\mathscr{L}(\omega):\mathscr{C}^1(X)\to\mathscr{C}^1(X)$ である．さらに，$\theta\in\mathbb{R}$ について F のねじれ転移作用素（twisted transfer operator）$\mathscr{L}_\theta\equiv\mathscr{L}_{\theta,\varphi}:\mathscr{C}^1(X)\to\mathscr{C}^1(X)$ を

$$\mathscr{L}_{\theta,\omega}u(x):=\mathscr{L}_\omega(e^{i\varphi\theta}u)(x)=\sum_{f_\omega(y)=x}\frac{e^{i\varphi(y)\theta}u(y)}{|\det Df_\omega(y)|},\quad\omega\in\Omega,\ u\in\mathscr{C}^1(X),\ x\in X$$

によって定義する．ただし $\mathscr{L}_{\theta,\omega}=\mathscr{L}_\theta(\omega)$ である．

さて，

$$\mathscr{S}=\{U:\Omega\times X\to\mathbb{C}\mid \operatorname*{ess\,sup}_{\omega}\|U(\omega,\cdot)\|_{\mathscr{C}^1}<\infty,\ \text{ほとんどすべての}\ \omega\ \text{で}\int U(\omega,\cdot)d\mathrm{Leb}=1\}$$

としよう．このとき，(4.1) より $h\in\mathscr{C}^1(X)$ に対して

$$\mathcal{L}h=h \quad\Leftrightarrow\quad h\,d\mathrm{Leb}\text{: } f_0\text{-不変測度} \tag{5.1}$$

がわかるが，それに対して，$H\in\mathscr{S}$ について（$h_\omega=H(\omega,\cdot)$ と書くと）

$$\text{ほとんどすべての}\ \omega\ \text{について}\ \mathscr{L}_\omega h_\omega=h_{\sigma\omega} \quad\Leftrightarrow\quad (\omega,A)\mapsto\int_A h_\omega\,d\mathrm{Leb}\text{: } F\text{-不変測度} \tag{5.2}$$

となる．つまり，((5.1) では h が $\mathcal{L}$ の固有値 1 に対応する固有関数であるのに対して）(5.2) では h_ω は $\mathscr{L}_\omega$ の固有関数になるとは限らない．

一方で，以下に見る通り Lyapunov 指数の意味で $\mathscr{L}$ は擬コンパクトであることがわかる．(2.1) に対応して，

$$\mathscr{L}_\omega^{(n)}=\mathscr{L}_{\sigma^{n-1}\omega}\circ\mathscr{L}_{\sigma^{n-2}\omega}\circ\cdots\circ\mathscr{L}_\omega$$

とかく.（これは $f_\omega^{(n)}:X\to X$ の転移作用素になっていることに注意してほしい.）また，有界線型作用素 $T:\mathscr{C}^1(X)\to\mathscr{C}^1(X)$ の**コンパクト性指数** $\|T\|_{\mathrm{ic}}$ を

$$\|T\|_{\mathrm{ic}}=\inf\{r>0\mid T(B_1)\ \text{は有限個の半径}\ r\ \text{の球で覆われる}\ \}$$

とする（B_1 は半径 1 の原点を中心とする球）．T の本質的スペクトル半径 $\kappa(T)$ について

$$\kappa(T)=\lim_{n\to\infty}\|T^n\|_{\mathrm{ic}}^{1/n}$$

となることを思い出してほしい（コンパクト性指数の定義と基本的な性質については [20] を参照されたい）．$\|T\|_{\mathscr{E}}$ は T の作用素ノルムとする．

Definition 10. $\mathscr{L}$ の**最大 Lyapunov 指数** α_0 を

$$\alpha_0=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|\mathscr{L}_\omega^{(n)}\|_{\mathscr{E}}$$

で定義する．また，$\mathscr{L}$ の**本質的最大 Lyapunov 指数** α_1 を

$$\alpha_1=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|\mathscr{L}_\omega^{(n)}\|_{\mathrm{ic}}$$

で定義する.（[7] により，実際にこれらの極限は存在する.）$\alpha_1<\alpha_0$ のとき，$\mathscr{L}$ は**擬コンパクト**であるということとする．

f_ω が任意の ω について（ω によらない拡大写像である）$g:X\to X$ となるとき，$\mathscr{L}$ の最大 Lyapunov 指数，本質的最大 Lyapunov 指数はそれぞれ g の転移作用素のスペクトル半径の対数と本質的スペクトル半径の対数となる．次の Oseledets の乗法エルゴード定理（の一般化）が重要となる．

定理 11 (González-Tokman & Quas [7])**.** $\mathscr{L}$ は擬コンパクトであるとする．このとき，Ω から $\mathscr{C}^1(X)$ の部分空間全体への可測写像 $\omega\mapsto\mathscr{V}(\omega)$ が存在して，$\dim(\mathscr{V}(\omega))$ は ω によらず，かつ有限となる．さらに，$\mathbb{P}(\tilde\Omega)=1$ となる部分集合 $\tilde\Omega$ が存在して，$\mathscr{V}$ は

$$\mathscr{L}_\omega(\mathscr{V}(\omega))=\mathscr{V}(\sigma\omega),\quad \mathscr{L}_\omega((\mathscr{V}(\omega))^c)\subset(\mathscr{V}(\sigma\omega))^c,\quad \omega\in\tilde\Omega$$

の意味で $\mathscr{L}$-不変であり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|\mathscr{L}_\omega^{(n)}u\|_{\mathscr{E}}=\alpha_0,\quad \forall u\in\mathscr{V}(\omega)-\{0\},\ \omega\in\tilde\Omega$$

および

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|\mathscr{L}_\omega^{(n)}|_{(\mathscr{V}(\omega))^c}\|_{\mathscr{E}}<\alpha_0,\quad \omega\in\tilde\Omega$$

が成り立つ．ただし $(\mathscr{V}(\omega))^c$ は $\mathscr{V}(\omega)$ の $\mathscr{C}^1(X)$ における補集合である．

定理 11 の $\mathscr{C}^1(X)=\mathscr{V}(\omega)\oplus(\mathscr{V}(\omega))^c$（$\omega\in\Omega$）は **Oseledets 分解**と呼ばれる.（正確には González-Tokman らによる Oseledets 分解の弱い帰結.）f_ω が任意の ω について $g:X\to X$ となるとき，定理 11 の $\mathscr{V}(\omega)$ は g の転移作用素の絶対値が 1（=スペクトル半径）の固有値たちの固有空間の和集合となる．同様の結果が $\mathscr{L}_\theta$ についても成り立つので，対応する最大 Lyapunov 指数と Oseledets 分解を $\alpha_{0,\theta}$ および $\mathscr{C}^1(X)=\mathscr{V}_\theta(\omega)\oplus(\mathscr{V}_\theta(\omega))^c$（$\omega\in\Omega$）とかく．

ϵ および θ が十分小さいとき，$\mathscr{L}_\theta\equiv\mathscr{L}_{\theta,\epsilon}$ の（Lyapunov）スペクトル構造は $\mathcal{L}$ のスペクトル構造と似ることが期待される．実際，比較的標準的な摂動論を用いて [5] では以下を示している．

定理 12 ([5]). ϵ および θ が十分小さいとき，$\mathscr{L}_\theta$ は擬コンパクトであり，ほとんど確実に

$$\dim(\mathscr{V}_\theta(\omega))=1$$

となるような *Oseledets* 分解 $\mathscr{C}^1(X)=\mathscr{V}_\theta(\omega)\oplus(\mathscr{V}_\theta(\omega))^c$ をとれる．さらに，ϵ が十分小さければ,

$$\alpha_{0,\theta}\to\alpha_0,\quad \mathcal{V}_\theta\to\mathcal{V}\quad(\theta\to 0)$$

が成り立つ．

後は，4.4 節と同様にして，

$$\mathscr{L}_{\theta,\omega}h_{\theta,\omega}=\lambda_\omega(\theta)h_{\theta,\sigma\omega}$$

を満たす可測関数 $\omega\mapsto\lambda_\omega(\theta)$ の θ に関する Taylor 展開を求め（陰関数定理を用いてそのような $\tilde{\lambda}$ を構成する），(4.3) に対応する基本関係式である

$$\mathrm{char}\left(\frac{S_{n,\omega}}{\sqrt{n}}\right)(t)=\mathrm{char}\left(S_{n,\omega}\right)\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=\int\mathscr{L}^{(n)}_{\frac{t}{\sqrt{n}},\omega}h_{0,\omega}d\mathrm{Leb}\sim\prod_{j=0}^{n-1}\lambda_{\sigma^j\omega}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

を利用すれば（ただし $h_{0,\omega}\in\mathscr{C}^1(X)$ は F の不変測度 μ の ω における密度関数 $\frac{d\mu_\omega}{d\mathrm{Leb}}$ であり，$\mathscr{L}_\omega h_{0,\omega}=h_{0,\sigma\omega}$ を満たす．また最後の近似式では定理 11, 12 を用いた），ランダムな拡大写像の急冷型の中心極限定理を得ることができる．

6. 蛇足と謝辞

2017 年 5 月アップロードの Dragičević らの論文 [5] の arXiv 初版は，Aimino らによる 2015 年の論文 [1] を受けてのものであった（[7, 1, 5] の著者名に注目していただきたい）．本稿著者は，Aimino らの論文を受けて Dragičević らと同様の着想に至り，これを 2016 年 10 月の Hiroshima Dynamics Days で発表した．そして，今回の（2017 年 9 月開催の）研究集会でもランダム拡大写像の急冷型中心極限定理の結果について発表することに決め，アブストラクトを提出した．その直後に，Dragičević らの論文の存在を知った．

そのため，今回の研究集会の世話人でもある角大輝先生に講演内容の変更を申し出たのだが,「たとえ他人に抜かされてしまっても，それならばその方向で自分も頑張ってもう一度追い抜いていく，あるいは少し違う方向で自分の味を出していく，という気持ちを持っていった方が，今後のご自身のため（そして日本のこのコミュニティのため）に大いになるのではないか」との金言をいただき，最終的に今回発表させていただく運びとなった．現在，著者は鄭容武氏と J. Wittsten 氏とともに,「拡大写像の U(1) 拡大」と呼ばれる拡大写像を一般化した力学系について急冷型極限定理の結果を得つつある．

改めまして，角先生と世話人の皆様，参加者の皆様に心よりお礼を申し上げたいと思います．

References

[1] R. Aimino, M. Nicol, S. Vaienti, Annealed and quenched limit theorems for random expanding dynamical systems, Probability Theory and Related Fields **4** (2015), 233–274.
[2] L. Arnold, *Random dynamical systems*, Springer, 1998.
[3] V. Baladi, *Positive transfer operators and decay of correlations*, World scientific, 2000.
[4] A. Boyarsky, P. Gora, *Laws of chaos: invariant measures and dynamical systems in one dimension*, Springer Science & Business Media, 2012.
[5] D. Dragičević, G. Froyland, C. Gonzalez-Tokman, S. Vaienti, A spectral approach for quenched limit theorems for random expanding dynamical systems, Communications in Mathematical Physics (2018), 1–67.
[6] A. Gouëzel, Limit theorems in dynamical systems using the spectral method, Hyperbolic dynamics, fluctuations and large deviations **89** (2015), 161–193.
[7] C. González-Tokman, A. Quas, A semi-invertible operator Oseledets theorem, Ergodic Theory and Dynamical Systems (2014), 1230–1272.
[8] M. I. Gordin, The central limit theorem for stationary processes, Doklady Akademii Nauk SSSR **188** no. 4 (1969), 739.
[9] Y. Guivarc'h, J. Hardy, Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov, Annales de l'IHP Probabilités et statistiques **24** no. 1 (1988), 73–98.
[10] H. Hennion, L. Hervé, *Limit theorems for Markov chains and stochastic properties of dynamical systems by quasi-compactness*, Springer Science & Business Media, 2001.
[11] H. Ishitani, Central limit theorems for the random iterations of 1-dimensional transformations (dynamics of complex systems), RIMS Kokyuroku **1404** (2004), 21–31.
[12] Y. Kifer, Equilibrium states for random expanding transformations, Random Comput. Dynam **1** no. 1 (1992), 1–31.
[13] Y. Kifer, Limit theorems for random transformations and processes in random environments, Transactions of the American Mathematical Society **350** no. 4 (1998), 1481–1518.
[14] S. Nagaev, Some limit theorems for stationary Markov chains, Theory of Probability & Its Applications **2** no. 4 (1957), 378–406.
[15] T. Morita, Random iteration of one-dimensional transformations, Osaka Journal of Mathematics **22** no. 3 (1985), 489–518.
[16] T. Morita, A generalized local limit theorem for Lasota-Yorke transformationsboundary value problems. II, Osaka Journal of Mathematics **26** no. 3 (1989), 579–595.
[17] J. Rousseau-Egele, Un théoreme de la limite locale pour une classe de transformations dilatantes et monotones par morceaux, The Annals of Probability (1983), 772–788.
[18] D. Ruelle, *Thermodynamic formalism: the mathematical structures of classical equilibrium statistical mechanics*, Addison-Wesley, 1978.
[19] D. Ruelle, *The thermodynamic formalism for expanding maps*, Communications in Mathematical Physics, **125** no. 2 (1989), 239–262.
[20] J. M. A. Toledano, T. D. Benavides, G. L. Acedo, *Measures of noncompactness in metric fixed point theory*, Springer Science & Business Media, 1997.