数理解析研究所講究録 第2115巻 2019年 102-106

確率非線形現象へのランダム力学系理論の応用

佐藤譲 *
(北海道大学 電子科学研究所 / 理学研究院数学部門,
London Mathematical Laboratory)
Yuzuru Sato
(RIES / Department of Mathematics, Hokkaido University,
London Mathematical Laboratory)

1 確率非線形現象とランダム力学系

決定論的ダイナミクスと確率論的ノイズが混在する動力学で生じる確率非線形現象 (nonlinear stochastic phenomena) は, ランダム力学系理論 [1][2] で扱うことができる. 図 1 はこれまでに知られているいくつかの確率非線形現象をランダム力学系理論の文脈で位置付けたものである.

例えば確率共鳴 (stochastic resonance), ノイズ同期 (noise-induced synchronization), 雑音誘起カオス (noise-induced chaos), 雑音誘起秩序 (noise-indueced order), 雑音誘起間欠性 (noise-induced intermittency) といったよく知られた雑音誘起現象は, ランダム力学系理論を用いて統一的に解析できる [3, 4, 5, 6]. これらの確率非線形現象は

$$x_{n+1} = f(x_n) + \omega_n \quad (\omega_n : \text{一様乱数列}) \tag{1}$$

あるいは

$$\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}t + g(x)\mathrm{d}W_t \quad (W_t : \text{Wiener 過程}) \tag{2}$$

*ysato@math.sci.hokudai.ac.jp

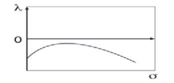
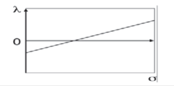
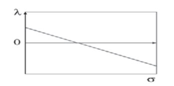
Noise-induced phenomena	Stationary state	Topological bifurcation	Top Lyapunov exponent λ vs noise amplitude σ
Noise-induced synchronization	random point attractor	Yes	
Stochastic resonance	random periodic attractor	No	
Noise-induced chaos	random strange attractor	Yes	
Noise-induced order	“window phenomena”	No	
Noise-induced intermittency	non-stationary Intermittency (infinite density)	Not at onset of topological bifurcation	λ=0

図 1: Random dynamical system theory for nonlinear stochastic phenomena

といったランダム写像や確率微分方程式でモデル化される．こういった確率的な動力学系についても, アトラクター · ベイシン, 軌道 · 構造 · 確率的安定性, 定常 · 非定常な極限分布, 分岐, Lyapunov 指数, Kolmogorov-Sinai エントロピー, Hausdroff 次元, 緩和時間 · 拡散係数など, これまで決定論力学系理論で扱われてきた性質や物理量を, ランダム力学系理論に基づいて導入できる．結果として, 確率非線形現象の分岐や安定性, エントロピーなどについて, これまで naive におこなわれてきた近似的解析結果の一部が実は誤りであることもわかってきた．ランダム力学系理論に基づく確率非線形現象論が構築されれば, 様々な雑音誘起現象にひとつひとつ名前をつけて個別に論じる必要はなくなるだろう．

2　ランダム力学系理論の適用対象

ランダム力学系理論では, 例えば周期的な Markov 連鎖など, 極限分布が存在しないような確率過程も pathwise に解析することができる．ランダムストレンジアトラクターで表現される確率カオスは, 一言でいうと確率過程のカオス [1] である.

[1]時間無限大の極限状態で, 任意の二点間の距離が指数的に大きくなる確率過程, あるいは Lyapunov 指数が正である確率過程.

例えば大自由度力学系を少数自由度の変数を残したランダム力学系として粗視化モデリングすることにより，発達した乱流に確率カオスが見出されている [7](図 2).

こういった意味では，ランダム力学系理論は確率過程で生じる多様な動力学を力学系理論的に解析するツールであるともいえる.

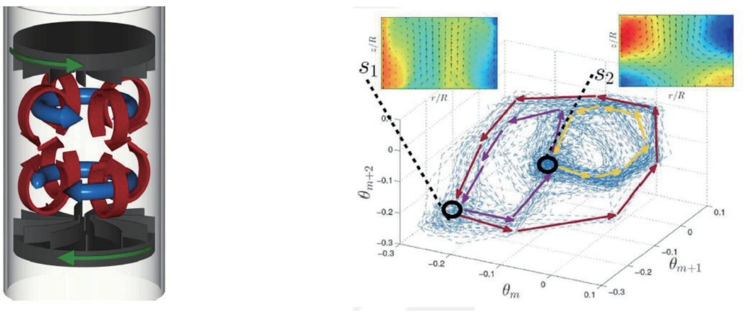


図 2: Karman 旋回流実験 (左) の時系列から，遅延座標埋め込みにより 3 次元空間に再構成されたランダム・ストレンジ・アトラクター (右). 右上段のパターンは，実験で観測された 2 通りの平均流れ場.

また不定な外力を受ける力学系，いわゆる非自励力学系 [2] については，分岐や安定性といった基本的なことですらわかっていることが非常に少ないが，外力が定常分布を持つ場合にはこれを確率変数とみてランダム力学系解析が可能となる. 実際ほとんどの非自励力学系については「不定外力」を「確率変数」とみなしたランダム力学系解析がなされている. 気象や経済，インターネットは典型的な非自励力学系の例である. また多くの生物系は閉じた自励力学系ではモデル化できないだろう [3]. さらにデータ同化や機械学習，制御系はそもそも非自励力学系である. このような系で生じる現象を (自励力学系)+(外力) で「近似」することなく，非自励力学系として詳細に解析する研究も (安定性や分岐の概念や様々な物理量の定義も未整備なまま) 始まっている.

さらに近年，計算ライブラリや開発環境，クラウド型計算資源の充実とともに盛んになってきている計算機援用証明はランダム力学系理論と非常に相性が良い [8]. たとえば一次元決定論力学系の不変分布に関する Lasota-Yorke inequality といっ

[2] ここでは，外力が $a\sin(t)$ などといった形で陽に与えられる系は自励力学系とみなしている.

[3] 生物系の外部環境変化への応答を考察するには，外力の自由度がシステム自由度よりも大きい非自励力学系の研究が必要となる.

た強い条件がランダム力学系では緩められる[4], 擬似乱数生成系の任意性の問題が消失する[5]など, 都合の良い性質がそろっている. 結果として, 加法有界ノイズを伴うほとんどの力学系について不変分布を厳密に見積もることが可能となり、力学系の様々な不変量が正確に求められる. この点に着目して, Galatoloらにより雑音誘起秩序を示すBZ写像について, Lyapunov指数が負であること, Lyapunov指数が有界ノイズ幅に対してLipschitz連続であること, などが数学的に証明されている [9]. BZ写像は実験時系列から構成された, 極めてたちの悪い複雑な数学モデルだが, 計算機援用証明ではこれが問題にならない. 力学系の性質についての数学的証明を得るために, 例えばしばしば例示される区分的拡大写像といった「たちは良い」が「非現実的」な数学モデルを工夫して用意する必要がないわけである. さらには多くの系について, ノイズ存在下の動力学の方が決定論低次元の動力学より現実的だろう.

3 結び

近年複数の分野で非自励力学系・ランダム力学系の理論の重要性が認識され始めている. ランダム力学系のカオス的振る舞いや複雑性については様々な議論がわき起こっている. ランダム力学系で生じる複雑現象を理解するには, 既存の力学系理論・エルゴード理論の概念を外挿するだけではなく, 新しい数学的・物理的な概念を構築していくことが必要である.

参考文献

[1] Andrzej Lasota and Michael C Mackey. *Chaos, fractals, and noise: stochastic aspects of dynamics*, volume 97. Springer Science & Business Media, 1994.

[2] Ludwig Arnold. Random dynamical systems springer monographs in mathematics. *Springer Berlin*, 1998.

[4]決定論系の複雑構造が加法ノイズによる拡散で粗視化されて単純になる.

[5]すべての可能な軌道束をまとめて区間演算するため, ランダムなサンプルパスを生成する必要がない.

[3] Anna Maria Cherubini, Jeroen SW Lamb, Martin Rasmussen, and Yuzuru Sato. A random dynamical systems perspective on stochastic resonance. *Nonlinearity*, 30(7):2835, 2017.

[4] Yuzuru Sato, Thai Son Doan, Thi The Nguyen, and The Tuan Hoang. An analytical proof for synchronization of stochastic phase oscillator. *arXiv:1801.02761v1*, 2018.

[5] Yuzuru Sato, Thai Son Doan, Jeroen S.W. Lamb, and Martin Rasmussen. Dynamical characterization of stochastic bifurcations in a random logistic map. *arXiv:1811.03994v1*, 2018.

[6] Yuzuru Sato and Rainer Klages. Anomalous diffusion in random dynamical systems. *arXiv:1810.02674v1*, 2018.

[7] Davide Faranda, Yuzuru Sato, Brice Saint-Michel, Cecile Wiertel, Vincent Padilla, Bérengère Dubrulle, and François Daviaud. Stochastic chaos in a turbulent swirling flow. *Physical review letters*, 119(1):014502, 2017.

[8] VN.RIO (http://www.vn.rio.br) *UFRJ, Rio de Janeiro, Brazil.* 2019.

[9] Stefano Galatolo, Maurizio Mongey, and Isaia Nisoli. Existence of noise induced order, a computer aided proof. *arXiv:1702.07024v3*, 2018.