数理解析研究所講究録 第2116巻 2019年 47-56

The Laplacian on some round Sierpiński carpets and Weyl's asymptotics for its eigenvalues (真円 Sierpiński carpets 上の Laplacian とその固有値に対する Weyl の漸近挙動)

神戸大学・理学研究科　梶野　直孝 *
Naotaka Kajino (Graduate School of Science, Kobe University)

1　序：研究の背景と経緯

本稿では，種々の円詰込フラクタル（Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 内の互いに交わらない開円板の和集合の $\widehat{\mathbb{C}}$ における補集合として与えられるフラクタル；図 2，図 3，図 5 も参照のこと）における自然な Laplacian の構成と解析に関して，筆者による近年の研究で得られた結果を報告する．特に最近得られた**真円 (round) Sierpiński carpets**（Sierpiński carpet（図 4）と同相な円詰込フラクタル）の幾つかの具体例に対する結果について，その正確な主張を述べる．

円詰込フラクタルは Apollonian gasket（図 2）などの例を通して古典的にも知られているが，ある（通有的ではないが比較的広い）範疇の **Klein 群**，すなわち Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の Möbius 変換全体のなす群 $\text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$ の離散部分群，の極限集合（最小の空でない不変閉集合）として自然に現れることが知られている（[2, 11, 19, 20, 25] を参照のこと）．そういった数学的背景から円詰込フラクタルは函数論・複素力学系や 2, 3 次元の幾何学・トポロジーなどの分野において重要な対象であり，背景となる各分野との関連を主な動機付けとしてそのフラクタル幾何的性質は詳しく調べられてきた．一方，円詰込フラクタルにおける自然な Laplacian や熱方程式の定式化と解析については，フラクタル上の解析学において通常仮定されてきた厳密な Euclid 自己相似性がなく既存の方法論を直接適用できないことが大きな障害となり，近年までほとんど研究されてこなかった．

この状況を打開するための大きなヒントとなったのが，木上 [14, 15] による**調和 Sierpiński gasket** $K_{\mathcal{H}}$（図 1 右）の導入とその上での解析学の研究である．これは $V_0 = \{q_1, q_2, q_3\} \subset \mathbb{R}^2$ を 3 頂点とする Sierpiński gasket K（図 1 左）とその上の標準

*本研究は JSPS 科研費 25887038, 15K17554, 18K18720 の助成を受けたものである．

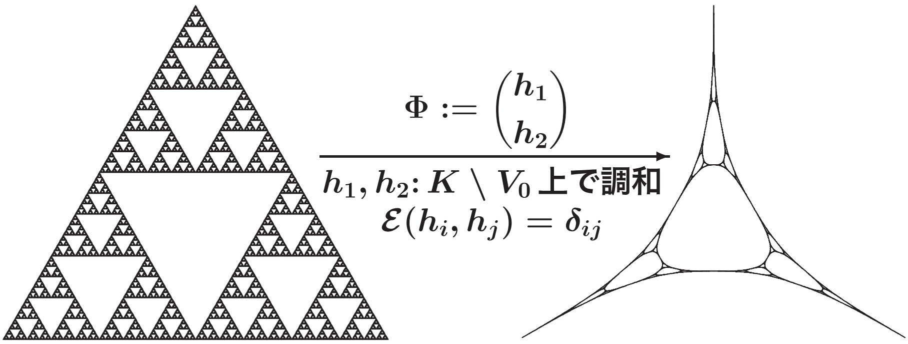

図 1: Sierpiński gasket と調和 Sierpiński gasket

Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を考え，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に関し $K \setminus V_0$ 上で調和な写像 $\Phi = (h_1, h_2) : K \to \mathbb{R}^2$，すなわち $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に関し $K \setminus V_0$ 上で調和な $h_1, h_2 \in \mathcal{F}$（で $\mathcal{E}$ に関して正規直交なもの）を成分に持つ K から $\mathbb{R}^2$ への連続写像 Φ により K を写すことで得られるフラクタルである．木上はまず [14, Theorem 3.6] において（h_1, h_2 の値の直接計算により）Φ が単射，従って K から像 $K_{\mathcal{H}} = \Phi(K)$ への同相写像であることを示し，さらに [14, Theorem 4.1] において，Φ を通して K を $\mathbb{R}^2$ の「部分多様体」とみなすことにより K 上に

$$\mu := \Gamma_{\mathcal{E}}(h_1) + \Gamma_{\mathcal{E}}(h_2) \tag{1.1}$$

を自然な「体積測度」として持つ一種の「Riemann 構造」が定まることを注意した．ここで $\Gamma_{\mathcal{E}}(u)$ は Riemann 多様体における $|\nabla u|^2 \, d\,\mathrm{vol}$ に相当する役割を果たす K 上の（非負）有限 Borel 測度であり，これを $u \in \mathcal{F}$ の $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に関するエネルギー測度という[1]．さらにその後，木上 [15, Theorem 6.3] は $(K, \mu, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対応する熱核 $p_t^{\mu}(x, y)$ が Riemann 多様体の場合に類似の Gauss 型評価を満たすことを示しており，これを受けて筆者 [4, 5, 6] や Koskela–Zhou [17] によるさらに詳細な解析もなされている．（より詳しい説明や関連する結果については拙著概説論文 [5] とその参考文献を参照のこと．）

上述の調和 Sierpiński gasket $K_{\mathcal{H}}$ の枠組みを踏まえ，最も古典的な円詰込フラクタルである Apollonian gasket の上にも同様の枠組みを構築できないか，と考えたのが Teplyaev [23] であった．彼は $K_{\mathcal{H}}$ と Apollonian gasket の図形的類似性に注目して

「Apollonian gasket 上の（強局所的な対称正則）Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}', \mathcal{F}')$ で，$\mathbb{R}^2$ への包含写像が（最端の 3 頂点の外で）$(\mathcal{E}', \mathcal{F}')$ について調和になるものを構成すればよい」

はずであると考え，それが本質的に可能であることを示した．ただしこの Teplyaev の結果 [23, Theorem 5.17] は，$(\mathcal{E}', \mathcal{F}')$ の一意性が示されていない，(1.1) と同様の形で

[1] 正確には各 $u \in \mathcal{F}$ に対し，$\Gamma_{\mathcal{E}}(u)$ は任意の $f \in \mathcal{F}$ に対し $\int_K f \, d\Gamma_{\mathcal{E}}(u) = \mathcal{E}(u, fu) - \frac{1}{2}\mathcal{E}(u^2, f)$ を満たす唯 1 つの K 上の（非負）有限 Borel 測度として定義される．そのような $\Gamma_{\mathcal{E}}(u)$ の存在は，($(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の Dirichlet 形式としての性質により）この右辺が非負な f に対して非負の値を取ることと Riesz–Markov–角谷の表現定理から分かる．なお $\mathcal{F}$ が $\mathcal{C}(K) := \{u \mid u : K \to \mathbb{R},\ u \text{ は連続}\}$ の稠密な部分代数であること，および $\mathbf{1} \in \mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = 0$ であることを注意しておく．

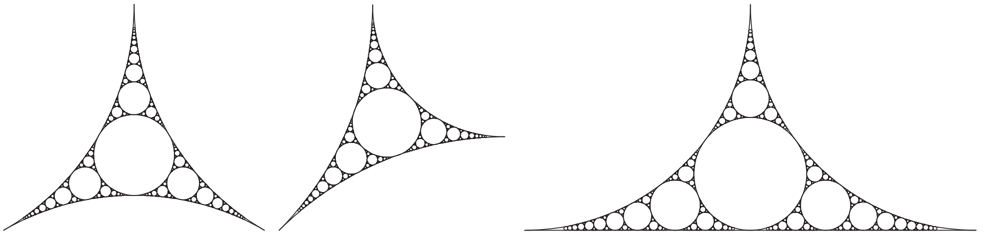

図 2: Apollonian gasket

定義される体積測度に関する L^2-空間に $\mathcal{F}'$ を稠密な線型部分空間として自然に埋め込めることが示されていない，などの点で不完全であった他，$\mathcal{E}'$ の値を具体的に計算するための手掛かりがないという点でさらに解析を進めるためにも不十分と言わざるを得ないものであった．そこでこれらの問題点を解消する（下記の定理 2.1）とともに Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}', \mathcal{F}')$ および体積測度の円詰込構造に基づく簡明な表示式（下記 (2.2) および (2.3)）を与え，さらに対応する Laplacian の固有値に対する Weyl の漸近公式（下記の定理 2.3）の証明を柱とする詳細な解析を行ったのが筆者による近年の研究 [8] であり，本稿の 2 節でその正確な主張を述べる．

Teplyaev [23] による Apollonian gasket 上の Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}', \mathcal{F}')$ の構成法は，通常の Sierpiński gasket K（図 1 左）上の標準 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の離散近似による古典的な構成法を，Apollonian gasket の $\mathbb{R}^2$ への包含写像が調和になるように離散近似に修正を加えた上で適用する，というものであり，他のフラクタルへの拡張は困難であった．これに対し筆者が [8] で得た $(\mathcal{E}', \mathcal{F}')$ の簡明な表示式は Apollonian gasket の円詰込フラクタルとしての構造だけを用いて与えられており，特に一般の円詰込フラクタルに対しても通用する．そこでこの表示式を Dirichlet 形式の定義として採用することで，一般の円詰込フラクタルにおいても自然な Laplacian（の候補の 1 つ）を定義することが可能になった．実際，円詰込フラクタルの $\mathbb{R}^2$ への包含写像が（ある自然な「境界」の外で）この Dirichlet 形式に関して調和になっていることが初等的な計算で確認できるので，少なくともこの意味では幾何的に自然な Dirichlet 形式および対応する Laplacian が定義できたことになる（ただし Apollonian gasket の場合以外にはそのような Dirichlet 形式が一意的かどうかは分かっていない）．さらにまた，考えている円詰込フラクタルを適切な「細胞分割」により（ある具体的な Möbius 変換の族を縮小写像として持つ）自己相似集合とみなすことができ，かつ各「細胞」の境界付近の幾何構造がある程度「穏やか」である場合には，Laplacian の固有値に対する Weyl の漸近公式を Apollonian gasket の場合と同様の形で証明することができる．以上の結果を，ある Klein 群の極限集合として現れる真円 Sierpiński carpets に対して示したのが筆者のごく最近の研究 [10] であり，本稿では 3 節でこの Klein 群の定義とその極限集合の性質についてまとめた後，4 節で [10] の結果の正確な主張を述べる．

なお [10] の他に，Apollonian gasket を極限集合（の一部）として持つ Klein 群を特別な場合として含む「Maskit 境界上の両側 cusp 群」と呼ばれる範疇の Klein 群の極限集

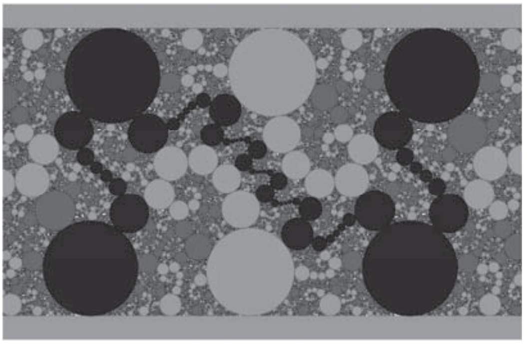

図 3: Maskit 境界上の $\frac{7}{43}$ 両側カスプ群の極限集合

合（図3）に対しても，[9] において同様の結果が得られている．この場合，適切な「細胞分割」により極限集合を「隣接する細胞同士の共有点の個数が一様に有界である[2]」ような自己相似集合として取り扱うことができるため，Laplacian の固有値の評価に関わる解析的側面についての議論は真円 Sierpiński carpets の場合と比べてずっと容易になる[3]．この場合については，真円 Sierpiński carpets に対する結果を取り上げるという本稿の主旨から外れるため，結果の詳細はここでは割愛する．[7] とその参考文献を参照されたい．

記号．以下本稿では次の記号を用いる．
(1) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$，すなわち $0 \notin \mathbb{N}$．
(2) 位相空間 E に対し $\mathcal{C}(E) := \{f \mid f : E \to \mathbb{R},\ f$ は連続$\}$ とおく．

2 Apollonian gasket に対する結果

$\alpha, \beta, \gamma \in (0, \infty)$ とし，どの 2 つも互いに接するような半径 $\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1}$ の 3 円で囲まれた $\mathbb{R}^2$ 内の閉領域（これを理想 3 角形という）を考えると，最初の 3 円全てに接する円でこの閉領域内に含まれるものが唯 1 つ存在することが古代ギリシアの Apollonius of Perga 以来よく知られている．**Apollonian gasket** $K_{\alpha,\beta,\gamma}$（図2）は，この内接円の内部を最初の理想 3 角形から取り除き，残った理想 3 角形に対しても同様にその内接円の内部を取り除く操作を無限に繰り返したときに最後に残る点全体の集合である[4]．その構成から容易に分かるように，$K_{\alpha,\beta,\gamma}$ は Sierpiński gasket K（図1左）と同相である．

[2] この性質を持つ自己相似集合は**有限分岐的**であるといい，そうでないものは**無限分岐的**であるという．Sierpiński carpet と同相なフラクタルは（「細胞分割」をどう取っても）必ず無限分岐的になり，この性質が解析学の展開を著しく困難にするのが常である．

[3] 一方，対応する Klein 群は放物型の元を含むため，Weyl の漸近公式の証明のためにエルゴード理論的な議論を用いる際には放物型の元の関与を避けるための工夫が必要になる．

[4] 双曲幾何や Klein 群論の立場からは最初の 3 円の 1 つが他の 2 円を内側に含む場合や最初の 3 円の 1 つもしくは 2 つが直線である場合も同時に考える方が自然であるが，これらの場合には下記の定理 2.1 および定理 2.2 がそのままの形では成り立たないためここでは考えないことにする．

$K_{\alpha,\beta,\gamma}$ の最端の 3 頂点からなる集合を $V_0^{\alpha,\beta,\gamma}$ とする．このとき包含写像 $K_{\alpha,\beta,\gamma} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ が $K_{\alpha,\beta,\gamma} \setminus V_0^{\alpha,\beta,\gamma}$ 上で調和となるような，$K_{\alpha,\beta,\gamma}$ 上の（強局所的な対称正則）Dirichlet 形式の存在と一意性は次の定理のように述べられる．

定理 2.1 ([8], cf. [23])**.** $K_{\alpha,\beta,\gamma}$ 上の有限 Borel 測度 μ で $K_{\alpha,\beta,\gamma}$ の空でない任意の開集合 U に対し $\mu(U) > 0$ を満たすもの，および $L^2(K_{\alpha,\beta,\gamma}, \mu)$ 上の既約で強局所的な正則対称 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}^{\alpha,\beta,\gamma}, \mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma})$ で，次の条件を満たすものが存在する：任意の affine 関数 $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対し，$h|_{K_{\alpha,\beta,\gamma}} \in \mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$, かつ

$$v|_{V_0^{\alpha,\beta,\gamma}} = 0 \text{ なる任意の } v \in \mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma} \cap \mathcal{C}(K_{\alpha,\beta,\gamma}) \text{ に対し} \quad \mathcal{E}^{\alpha,\beta,\gamma}(h|_{K_{\alpha,\beta,\gamma}}, v) = 0 \tag{2.1}$$

（つまり $h|_{K_{\alpha,\beta,\gamma}}$ は $(\mathcal{E}^{\alpha,\beta,\gamma}, \mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma})$ に関して $K_{\alpha,\beta,\gamma} \setminus V_0^{\alpha,\beta,\gamma}$ 上で調和な $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ の元である）．

さらに $\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma} := \mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma} \cap \mathcal{C}(K_{\alpha,\beta,\gamma})$ および $\mathcal{E}^{\alpha,\beta,\gamma}|_{\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma} \times \mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}}$ は（$\mathcal{E}^{\alpha,\beta,\gamma}|_{\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma} \times \mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}}$ の正の定数倍の違いを除いて）一意的である．

（定理 2.1 により一意的に定まる）$\mathcal{E}^{\alpha,\beta,\gamma}|_{\mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma} \times \mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}}$ は，$K_{\alpha,\beta,\gamma}$ の円詰込フラクタルとしての構造に基づく次の具体的表示を持つ．

定理 2.2 ([8])**.** $\mathcal{C}^{\mathrm{LIP}}_{\alpha,\beta,\gamma} := \{u|_{K_{\alpha,\beta,\gamma}} \mid u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ u$ は Lipschitz 連続 $\}$ とおく．このとき $\mathcal{C}^{\mathrm{LIP}}_{\alpha,\beta,\gamma} \subset \mathcal{C}_{\alpha,\beta,\gamma}$, かつ $\mathcal{C}^{\mathrm{LIP}}_{\alpha,\beta,\gamma}$ は Hilbert 空間 $(\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}, \mathcal{E}^{\alpha,\beta,\gamma} + \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(K_{\alpha,\beta,\gamma}, \mu)})$ において稠密であり，さらに任意の $u, v \in \mathcal{C}^{\mathrm{LIP}}_{\alpha,\beta,\gamma}$ に対し

$$\mathcal{E}^{\alpha,\beta,\gamma}(u, v) = \sum\nolimits_{C \in \mathcal{A}_{\alpha,\beta,\gamma}} \mathrm{rad}(C) \int_C \langle \nabla_C u, \nabla_C v \rangle \, d\mathrm{vol}_C; \tag{2.2}$$

ただし $\mathcal{A}_{\alpha,\beta,\gamma}$ は $K_{\alpha,\beta,\gamma}$ の構成に現れる円弧全体の集合を表し，また円弧 $C \subset \mathbb{R}^2$ に対し $\mathrm{rad}(C)$ は C の半径，$\nabla_C u$ は $u|_C$ の C 上での勾配ベクトル場，vol_C は C 上の 1 次元 Lebesgue 測度をそれぞれ表す．

$\mathcal{E}^{\alpha,\beta,\gamma}|_{\mathcal{C}^{\mathrm{LIP}}_{\alpha,\beta,\gamma} \times \mathcal{C}^{\mathrm{LIP}}_{\alpha,\beta,\gamma}}$ が (2.2) で与えられることを踏まえると，$K_{\alpha,\beta,\gamma}$ 上の体積測度としては

$$\mu^{\alpha,\beta,\gamma} := \sum\nolimits_{C \in \mathcal{A}_{\alpha,\beta,\gamma}} \mathrm{rad}(C) \, \mathrm{vol}_C \tag{2.3}$$

で定義される測度 $\mu^{\alpha,\beta,\gamma}$ を用いるのが自然と思われる．すると $\mu^{\alpha,\beta,\gamma}$ の定義 (2.3) から容易に分かるように，各 $C \in \mathcal{A}_{\alpha,\beta,\gamma}$ 内の任意の区間 I に対し，$\mu^{\alpha,\beta,\gamma}(I)$ は I の各点と C の中心を結んで得られる扇形領域の面積（2 次元 Lebesgue 測度）の 2 倍に等しい．特に $\mu^{\alpha,\beta,\gamma}(K_{\alpha,\beta,\gamma})$ は，$K_{\alpha,\beta,\gamma}$ の構成の起点として用いた理想 3 角形をなす 3 円の，中心を結んで得られる 3 角形の面積の 2 倍に等しく有限であり，従って (2.3) で定義される $\mu^{\alpha,\beta,\gamma}$ は $K_{\alpha,\beta,\gamma}$ 上の有限測度であって $K_{\alpha,\beta,\gamma}$ の空でない任意の開集合 U に対し $\mu^{\alpha,\beta,\gamma}(U) > 0$ を満たす．さらに $\mathbb{R}^2$ 上の Lipschitz 連続関数 $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x \in \mathbb{R}$ および $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto y \in \mathbb{R}$ の $K_{\alpha,\beta,\gamma}$ 上への制限をそれぞれ h_1, h_2 とおくとき，(2.2) と (2.3) から (1.1) に相当する等式 $\mu^{\alpha,\beta,\gamma} = \Gamma_{\mathcal{E}^{\alpha,\beta,\gamma}}(h_1) + \Gamma_{\mathcal{E}^{\alpha,\beta,\gamma}}(h_2)$ がこの場合にも成り立って

いることが分かる．また定理 2.1 の μ としてこの $\mu^{\alpha,\beta,\gamma}$ が取れることも証明できる（実際には定理 2.1 の前半部分は μ としてこの $\mu^{\alpha,\beta,\gamma}$ を取ることにより証明される）．そこで $(K_{\alpha,\beta,\gamma}, \mu^{\alpha,\beta,\gamma}, \mathcal{E}^{\alpha,\beta,\gamma}, \mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma})$ に対応する $L^2(K_{\alpha,\beta,\gamma}, \mu^{\alpha,\beta,\gamma})$ 上の非正自己共役作用素として $K_{\alpha,\beta,\gamma}$ 上のラプラシアン $\Delta_{\alpha,\beta,\gamma}$ が定まるが，筆者はさらにその固有値について次の **Weyl の漸近公式**を証明した．d_{AG} を Euclid 距離に関する $K_{\alpha,\beta,\gamma}$ の Hausdorff 次元，$\mathcal{H}^{d_{\mathsf{AG}}}$ を Euclid 距離に関する $\mathbb{R}^2$ 上の d_{AG} 次元 Hausdorff 測度とする．d_{AG} が α, β, γ に依存しないことは容易に分かり，また $d_{\mathsf{AG}} \in (1,2)$, $\mathcal{H}^{d_{\mathsf{AG}}}(K_{\alpha,\beta,\gamma}) \in (0,\infty)$ であることが知られている（例えば前者については [1] を，後者については [22, 18] を参照のこと）．

定理 2.3 ([8])**.** $(K_{\alpha,\beta,\gamma}, \mu^{\alpha,\beta,\gamma}, \mathcal{E}^{\alpha,\beta,\gamma}, \mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma})$ に対応する Laplacian $-\Delta_{\alpha,\beta,\gamma}$ のスペクトルは離散的であり，その固有値の全体 $\{\lambda_n^{\alpha,\beta,\gamma}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)$（各固有値は重複度と同じ回数だけ繰り返す）は次を満たす：α, β, γ に依存しない定数 $c_0 \in (0,\infty)$ が存在して

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-d_{\mathsf{AG}}/2} \#\{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n^{\alpha,\beta,\gamma} \le \lambda\} = c_0 \mathcal{H}^{d_{\mathsf{AG}}}(K_{\alpha,\beta,\gamma}) \in (0,\infty). \tag{2.4}$$

3　真円 Sierpiński carpet を極限集合に持つ Klein 群 G_m

$m \in \mathbb{N}$ は $m > 6$ を満たすとする．各 m 毎に，極限集合（最小の空でない不変閉集合）$\partial_\infty G_m$ が真円 Sierpiński carpet であるような Klein 群を次のようにして構成できる．

まず $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{m} < \pi$ であることから，よく知られているように双曲平面の Poincaré 円板モデル $\mathbb{B}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 内に内角 $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{m}$ の測地 3 角形を取ることができ，またこの測地 3 角形は双曲平面の等長変換で互いに写りあうものを同一視すれば一意的である．具体的には，直線 ℓ_1, ℓ_3 を $\ell_1 := \mathbb{R}$, $\ell_3 := \{te^{\pi i/m} \mid t \in \mathbb{R}\}$ で定め，$t, r \in (0,\infty)$ を円 $\ell_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - te^{\pi i/m}| = r\}$ が $\partial\mathbb{B}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ と直交し ℓ_1 と角 $\frac{\pi}{3}$ で交わるように取る（$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{m} < \pi$ によりそのような (t,r) の組は唯 1 つ存在することが容易に分かる）．ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 は $\partial\mathbb{B}^2$ と直交しており，従って $\mathbb{B}^2$ との共通部分はそれぞれ双曲測地線であることに注意する．さて，そこで ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 がなす $\mathbb{B}^2$ 内の測地 3 角形（の内部と周からなる閉領域）を $\triangle_0$ とし，$\mathrm{M\ddot{o}b}(\widehat{\mathbb{C}})$ の部分群 Γ_m を

$$\Gamma_m := \langle \mathrm{Inv}_{\ell_1}, \mathrm{Inv}_{\ell_2}, \mathrm{Inv}_{\ell_3} \rangle$$

で定める；ここで $\mathrm{Inv}_\ell \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\widehat{\mathbb{C}})$ は円または直線 $\ell \subset \mathbb{C}$ に関する反転（鏡映）を表す．すると $\triangle_0$ の内角が全て π の整数による商の形になっていることから **Poincaré の多角形定理**（[3, Section 8] もしくは [16, 第 IV 章] を参照）が適用でき，$\{\tau(\triangle_0)\}_{\tau\in\Gamma_m}$ が $\mathbb{B}^2$ の 3 角形分割を与えることが従う；すなわち，

$$\mathbb{B}^2 = \bigcup\nolimits_{\tau\in\Gamma_m} \tau(\triangle_0)$$

が成り立ち，さらに $\tau \ne \sigma$ なる任意の $\tau, \sigma \in \Gamma_m$ に対し $\tau(\triangle_0) \cap \sigma(\triangle_0)$ は空集合もしくは $\tau(\triangle_0)$ と $\sigma(\triangle_0)$ の共通の辺または頂点に等しい．

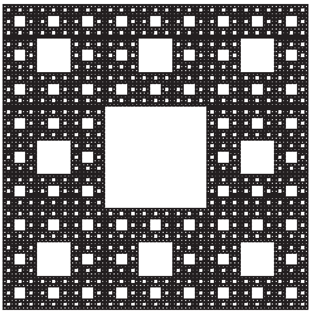

図 4: Sierpiński carpet

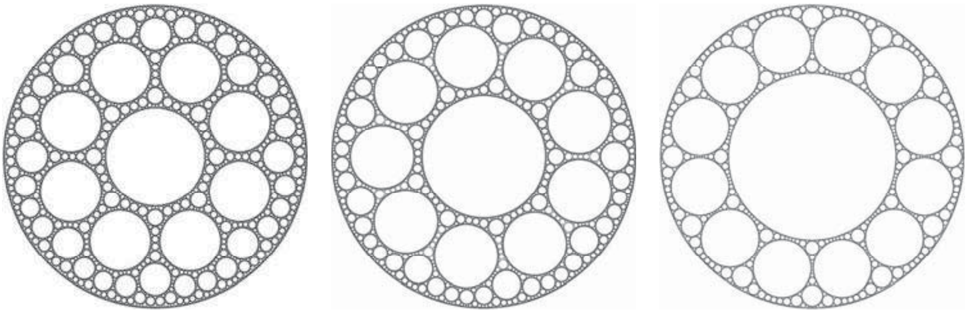

図 5: Klein 群 G_m の極限集合 $\partial_\infty G_m$ $(m = 8, 9, 12)$（本稿で扱う真円 Sierpiński carpets）

次に $r_m \in (0, 1)$ を，原点を中心とする（双曲）円 $S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r_m\}$ が ℓ_2 と角 $\frac{\pi}{3}$ で交わるように取り（そのような r_m が唯 1 つ存在することは初等的な計算により容易に分かる），$\mathrm{M\ddot{o}b}(\widehat{\mathbb{C}})$ の部分群 G_m を

$$G_m := \langle \Gamma_m, \mathrm{Inv}_S \rangle = \langle \mathrm{Inv}_{\ell_1}, \mathrm{Inv}_{\ell_2}, \mathrm{Inv}_{\ell_3}, \mathrm{Inv}_S \rangle$$

で定める．このとき [19, 2] によれば，G_m は Klein 群でその極限集合 $\partial_\infty G_m$ は

$$\partial_\infty G_m = \overline{\bigcup_{g \in G_m} g(\partial \mathbb{B}^2)}$$

に等しく，さらに閉円板の族 $\left\{g(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{B}^2)\right\}_{g \in G_m}$ は互いに交わらない．特に $\partial_\infty G_m$ は

$$\partial_\infty G_m = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{g \in G_m} g(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{B}^2}) \tag{3.1}$$

とも表すことができ，従って $\partial_\infty G_m$ は真円 Sierpiński carpet であることが分かる[5]．

[5] $\partial_\infty G_m$ が標準 Sierpiński carpet（図 4）と同相であることは [24] による Sierpiński carpet の位相的特徴付けから従う．

4 G_m の極限集合 $\partial_\infty G_m$ 上の Laplacian に対する結果

3 節で導入した設定の下，$\partial_\infty G_m$ 上の Laplacian の構成と解析に関し筆者が得た結果を以下に述べる．構成の基本的な方針は (2.3) と (2.2) を $\partial_\infty G_m$ 上の体積測度および Dirichlet 形式の定義として用いることであるが，その際に注意が必要なのは $\partial_\infty G_m$ に含まれる単位円 $\partial\mathbb{B}^2$ の取り扱いである．2 節での $\mu^{\alpha,\beta,\gamma}$ についての説明にも既に表れているように，(2.3) および (2.2) における円弧 C 上での測度や積分は C 単独ではなく C の各点とその中心を結んで得られる C の内側の領域と一纏めにして取り扱うべきものであると思われる．ところが単位円 $\partial\mathbb{B}^2$ に対してその考え方を当てはめると面積が無限大の領域が出てきてしまい，(2.3) や (2.2) の右辺にそのままでは意味が付かなくなってしまう．そこで単位円 $\partial\mathbb{B}^2$ は $\partial_\infty G_m$ から除去して「無限遠境界」として取り扱うことにし，$K_0 := (\partial_\infty G_m) \cap \mathbb{B}^2$ 上で定義された Laplacian のみを考えることにする．

もう 1 つ注意が必要なのは，3 節で述べた最初の測地 3 角形 $\triangle_0$ の具体的な取り方や，双曲平面を単位円板 $\mathbb{B}^2$ 上に実現したことなどは本質的ではないため，これらの条件を別のものに置き換えた場合も同時に考察の対象とするべきであるという点である．そのような「置き換え」は単位円板 $\mathbb{B}^2$ の内部と外部の入れ替えを起こさないような Möbius 変換の作用として定式化でき，そこでそのような「置き換えの全体を表す空間」$\mathcal{G}$ を $\mathcal{G} := \{g \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\widehat{\mathbb{C}}) \mid g^{-1}(\infty) \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{B}^2}\}$ で定め，各 $g \in \mathcal{G}$ に対し $K_g := g(K_0)$, $\mathcal{D}_g := \{gh(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{B}^2}) \mid h \in G_m\} \setminus \{g(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{B}^2})\}$ とおく．すると (3.1) より，$\mathcal{D}_g$ は $\mathbb{C}$ 内の互いに交わらない開円板の族で $K_g = g(\mathbb{B}^2) \setminus \bigcup_{D \in \mathcal{D}_g} D$ を満たす．

以下，本節の終わりまで $g \in \mathcal{G}$ とする．以上の準備の下，(2.3) と (2.2) の右辺を K_g 上の体積測度および Dirichlet 形式の**定義**として採用することができる：

定義 4.1 ([10])**.** $\mathcal{C}_g := \{u|_{K_g} \mid u : \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ u$ は Lipschitz 連続，$\overline{u^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})} \subset \mathbb{B}^2\}$ とおき，K_g 上の Borel 測度 ν^g および対称双線型形式 $\mathcal{E}^g : \mathcal{C}_g \times \mathcal{C}_g \to \mathbb{R}$ を次で定める：

$$\nu^g := \sum_{D \in \mathcal{D}_g} \mathrm{rad}(\partial D)\mathrm{vol}_{\partial D}, \quad \mathcal{E}^g(u, v) := \sum_{D \in \mathcal{D}_g} \mathrm{rad}(\partial D) \int_{\partial D} \langle \nabla_{\partial D} u, \nabla_{\partial D} v \rangle \, d\mathrm{vol}_{\partial D}. \tag{4.1}$$

命題 4.2 ([10])**.** $(\mathcal{E}^g, \mathcal{C}_g)$ は $L^2(K_g, \nu^g)$ において可閉，その $L^2(K_g, \nu^g)$ における最小閉拡大 $(\mathcal{E}^g, \mathcal{F}_g)$ は $L^2(K_g, \nu^g)$ 上の強局所的な対称正則 Dirichlet 形式であり，さらに $(K_g, \nu^g, \mathcal{E}^g, \mathcal{F}_g)$ に対応する Laplacian Δ_g のスペクトルは離散的である．

各 ∂D 上の積分に Gauss–Green の公式を適用して計算することで，次が得られる．

命題 4.3 ([10])**.** 任意の affine 関数 $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ に対し，$h|_{K_g}$ は $(\mathcal{E}^g, \mathcal{F}_g)$ に関して K_g 上で調和である，すなわち（$h|_{K_g}$ は K_g の各コンパクト集合上ではある $\mathcal{C}_g$ の元と一致するので各 $v \in \mathcal{C}_g$ に対し $\mathcal{E}^g(h|_{K_g}, v)$ が自然に定義でき）任意の $v \in \mathcal{C}_g$ に対し $\mathcal{E}^g(h|_{K_g}, v) = 0$.

d_m を Euclid 距離に関する K_g の Hausdorff 次元，$\mathcal{H}^{d_m}$ を Euclid 距離に関する $\mathbb{C}$ 上の d_m 次元 Hausdorff 測度とする．d_m が $g \in \mathcal{G}$ に依存しないことは容易に分かり，また $d_m \in (1, 2)$, $\mathcal{H}^{d_m}(K_g) \in (0, \infty)$ であることが [21, Theorem 7] により知られている．K_g 上の Laplacian に対する次の **Weyl の漸近公式**が本稿の主結果である．

定理 4.4 ([10])**.** $g \in \mathcal{G}$ に依存しない定数 $c_m \in (0,\infty)$ が存在して，$\overline{U} \subset \mathbb{B}^2$ を満たす K_g の任意の空でない開集合 U に対し，$(U, \nu^g, \mathcal{E}^g, \mathcal{F}_g)$ に対応する（U の境界上で Dirichlet 境界条件を課した）Laplacian $-\Delta_{g,U}$ の固有値の全体 $\{\lambda_n^{g,U}\}_{n\in\mathbb{N}}$（各固有値は重複度と同じ回数だけ繰り返す）は次を満たす：U の K_g における境界の $\mathcal{H}^{d_m}$-測度が 0 ならば

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-d_m/2} \#\{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n^{g,U} \le \lambda\} = c_m \mathcal{H}^{d_m}(U). \tag{4.2}$$

定理 4.4 は $H\backslash\mathcal{G} := \{Hg \mid g \in \mathcal{G}\}$ で定義される「K_g たちの Euclid 幾何形状全体のなす空間」の上に，K_g たちの自己相似性に基づいて定義されるある Markov 連鎖を考え **Kesten の更新定理** [13, Theorem 2] を適用することにより証明される．ここで $H := \{g \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\widehat{\mathbb{C}}) \mid g^{-1}(\infty) = \infty\}$ は $\mathbb{C}$ 上の Euclid 相似変換全体のなす $\mathrm{M\ddot{o}b}(\widehat{\mathbb{C}})$ の部分群を表す．

参考文献

[1] D. W. Boyd, The residual set dimension of the Apollonian packing, Mathematika **20** (1973), 170–174.

[2] S. Bullett and G. Mantica, Group theory of hyperbolic circle packings, *Nonlinearity* **5** (1992), 1085–1109.

[3] D. B. A. Epstein and C. Petronio, An exposition of Poincaré's polyhedron theorem, *Enseign. Math.* **40** (1994), 113–170.

[4] N. Kajino, Heat kernel asymptotics for the measurable Riemannian structure on the Sierpinski gasket, *Potential Anal.* **36** (2012), 67–115.

[5] N. Kajino, Analysis and geometry of the measurable Riemannian structure on the Sierpiński gasket, *Contemp. Math.*, vol. 600, 2013, pp. 91–133.

[6] N. Kajino, *Weyl's Laplacian eigenvalue asymptotics for the measurable Riemannian structure on the Sierpiński gasket*, 2014, in preparation.

[7] N. Kajino, Weyl's eigenvalue asymptotics for the Laplacian on circle packing limit sets of certain Kleinian groups, in: *Heat Kernels, Stochastic Processes and Functional Inequalities*, Oberwolfach Report 55/2016. doi:10.4171/OWR/2016/55, available in: `https://www.mfo.de/occasion/1648`

[8] N. Kajino, *The Laplacian on the Apollonian gasket and Weyl's asymptotics for its eigenvalues*, 2017, in preparation.

[9] N. Kajino, *Weyl's eigenvalue asymptotics for the Laplacian on circle packing limit sets of certain Kleinian groups*, 2017, in preparation.

[10] N. Kajino, *The Laplacian on some round Sierpiński carpets and Weyl's asymptotics for its eigenvalues*, 2018, in preparation.

[11] L. Keen, B. Maskit and C. Series, Geometric finiteness and uniqueness for Kleinian groups with circle packing limit sets, *J. Reine Angew. Math.* **436** (1993), 209–219.

[12] L. Keen and C. Series, Pleating coordinates for the Maskit embedding of the Teichmüller space of punctured tori, *Topology* **32** (1993), 719–749.

[13] H. Kesten, Renewal theory for functionals of a Markov chain with general state space, *Ann. Probab.* **2** (1974), 355–386.

[14] J. Kigami, Harmonic metric and Dirichlet form on the Sierpinski gasket, in: K. D. Elworthy and N. Ikeda (eds.), *Asymptotic Problems in Probability Theory: Stochastic Models and Diffusions on Fractals (Sanda/Kyoto, 1990)*, Pitman Research Notes in Math., vol. 283, Longman Sci. Tech., Harlow, 1993, pp. 201–218.

[15] J. Kigami, Measurable Riemannian geometry on the Sierpinski gasket: the Kusuoka measure and the Gaussian heat kernel estimate, *Math. Ann.* **340** (2008), 781–804.

[16] 小島 定吉「多角形の現代幾何学 増補版」，数理情報科学シリーズ 1，牧野書店，1999 年.

[17] P. Koskela and Y. Zhou, Geometry and analysis of Dirichlet forms, *Adv. Math.* **231** (2012), 2755–2801.

[18] R. D. Mauldin and M. Urbański, Dimension and measures for a curvilinear Sierpinski gasket or Apollonian packing, *Adv. Math.* **136** (1998), 26–38.

[19] C. McMullen, *Riemann surfaces, dynamics and geometry*, course notes, 2018, available in: `http://www.math.harvard.edu/~ctm/papers/#books`

[20] D. Mumford, C. Series and D. Wright, *Indra's Pears: The Vision of Felix Klein*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[21] D. Sullivan, The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **50** (1979), 171–202.

[22] D. Sullivan, Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups, *Acta Math.* **153** (1984), 259–277.

[23] A. Teplyaev, Energy and Laplacian on the Sierpiński gasket, in: M. L. Lapidus and M. van Frankenhuijsen (eds.), *Fractal Geometry and Applications: A Jubilee of Benoît Mandelbrot*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 72, Part 1, Amer. Math. Soc., 2004, pp. 131–154.

[24] G. T. Whyburn, Topological characterization of the Sierpiński curve, *Fund. Math.* **45** (1958), 320–324.

[25] D. Wright, Searching for the cusp, in: Y. Minsky, M. Sakuma and C. Series (eds.), *Spaces of Kleinian Groups*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 329, Cambridge University Press, Cambridge, 2005, pp. 301–336.