数理解析研究所講究録 第2116巻 2019年 70-72

Percolation と triangle condition

東北大学　山本　航平
Kohei Yamamoto
Tohoku University

1 Percolation

グラフ $G=(V,E)$ とパラメータ $p\in[0,1]$ に対して, 各辺 $e\in E$ に確率 p で open, 確率 $1-p$ で closed というラベルを付ける. このラベル付けのもと $(V,\{\text{open edge}\})$ という部分グラフを構成する. このようにして G の部分グラフからなる集合に確率測度を定めることを percolation という. ここではグラフとして infinite, connected, quasi-transitive を満たすもののみを考える, ここで quasi-transitive とはグラフの自己同型群 Aut(G) による G の商が有限集合である. つまりある有限個の頂点 $x_1,\ldots,x_n$ が存在して次の等式を満たす.

$$V=\bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{Aut}(G)x_i.$$

このような仮定の任意のグラフ, 任意の p に対して infinite cluster (connected component) の個数は 確率 1 である定数になり, その定数は $0,\infty,1$ の 3 通りしかない [5]. かつ p に関して単調性を持ちある種の臨界現象が起きる [3]. そこで figure 1 のようにそれぞれの閾値を p_c,p_u とおき, critical probability, uniqueness threshold と呼ぶ.

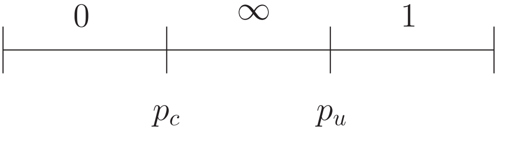

図 1: p_c and p_u

2 Triangle condition

各 2 頂点 $x,y\in V$ に対して, $\tau_p(x,y)$ を x と y が同じ cluster に含まれる確率とする. ある頂点 o を含む cluster の大きさの期待値を χ_p と置く. つまり次の等式で表される.

$$\chi_p=\sum_{x\in V}\tau_p(o,x).$$

これは p に関して単調増加な関数であり p_c で発散する [1]. この結果は上記の仮定を満たすすべてのグラフに対して成り立つことであるが, グラフが d-次元単位格子 $\mathbb{Z}^d$ の場合にはもっと早くから分かっていた. Aizenman と Newman [2] は $\mathbb{Z}^d$ において χ_p の漸近挙動を得る十分条件として triangle condition を導入した. グラフ G が p で triangle condition を満たすとは,

$$\nabla_p = \sum_{x,y\in V} \tau_p(o,x)\tau_p(x,y)\tau_p(y,o) < \infty$$

が成り立つことである. もし p_c で triangle condition を満たすならば $\chi_p = 1/(p_c - p)$ as $p \uparrow p_c$ が成り立つことが示された. その後 $\mathbb{Z}^d$ で, より一般のグラフで, p_c で triangle condition を満たすなら ○○ が成り立つ, という趣旨の論文が多く出てきた.

3 主結果

グラフとして d-regular tree と $\mathbb{Z}$ の直積 $T_d\square\mathbb{Z}$ を考えたとき, 既に Hutchcroft [4] によって p_c で triangle condition を満たすことは知られている. かつ $p_c < p_u$ が任意の $d \geq 3$ で成り立つことも示されている. 主結果はどの範囲まで triangle condition を満たすかについてであり, 次の結果を得た.

$$\nabla_p \begin{cases} < \infty & (p < p_u) \\ = \infty & (p = p_u). \end{cases}$$

新たな閾値として traiangle condition を用いた p_t を次で定める.

$$p_t = \sup\{p \in [0,1] \mid \nabla_p < \infty\}.$$

一般のグラフに対して $p_c \leq p_t \leq p_u$ を満たす. 上の主結果から $T_d\square\mathbb{Z}$ の場合は $p_t = p_u$ が成り立つことが分かる. グラフが $T_d(d \geq 3)$ の場合は $p_c < p_t < p_u$ が成り立つため, $T_d\square\mathbb{Z}$ が tree にはない性質を持っていることを表している.

4 予想

Triangle condition は 3 点で構成される条件を考えていたが, これのさらなる一般化, 4 点,5 点と拡張した場合に閾値 p_t はどのように変化をするのか? そこで $p_t^{(n)}$ を次で定義する.

$$\nabla_p^{(n)} = \sum_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in V} \tau_p(o,x_1)\tau_p(x_1,x_2)\cdots\tau_p(x_{n-1},o),$$
$$p_t^{(n)} = \sup\left\{p \in [0,1] \mid \nabla_p^{(n)} < \infty\right\}.$$

グラフが T_d の場合は $p_t^{(n)} = p_t^{(3)}$ が任意の n に対して成り立つ. このことから任意のグラフに対しても同様の結果が成り立つものと予想される. つまり一般化しても変化はないということである.

参考文献

[1] Aizenman, M.; Barsky, D. J. Sharpness of the phase transition in percolation models. *Comm. Math. Phys.* **108, no.3**, 489–526. (1987).

[2] Aizenman, M.; Newman, C. M. Tree graph inequalities and critical behavior in percolation models. *J. Statist. Phys.* **36, no.1-2**, 107–143. (1984).

[3] Häggström, O.; Peres, Y.; Schonmann, R. Percolation on transitive graphs as a coalescent process: relentless merging followed by simultaneous uniqueness. *Perplexing problems in probability.* **44**, 69–90. Birkhäuser Boston. (1999).

[4] Hutchcroft, T. Non-uniqueness and mean-field criticality for percolation on nonunimodular transitive graphs. *arXiv preprint arXiv:1711.02590.* (2017).

[5] Newman, C. M.; Schulman, L. S. Infinite clusters in percolation models. *J. Statist. Phys.* **26, no. 3**, 613–628. (1981).

Tohoku University
Sendai 980-8578
Japan
E-mail:kohei.yamamoto.t1@dc.tohoku.ac.jp