Nelson 拡散過程と非線形 Schrödinger 方程式

(Nelson Diffusions and Nonlinear Schrödinger equations)

明治大学・理工学部 数学科　名和 範人

Hayato NAWA
Department of Mathematics, School of Science and Engineering
Meiji University

1. 非線形 Schrödinger 方程式

次の擬共型不変な非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題について考える：

$$\begin{cases} 2i\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \triangle\psi + |\psi|^{4/d}\psi = 0, & (x,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+, \\ \psi(0) = \psi_0\in H^1(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

ここで，$H^1(\mathbb{R}^d)$ は 1 階までの超関数微分が自乗可積分であるような，通常の Sobolev 空間を表す．[*1] この初期値問題の局所適切性はよく知られた古典的な事実で，$\|\nabla\psi_0\|$ のみに依存する最大延長時間 $T_{\max}\in(0,\infty]$ があって，$\psi\in C([0,T_{\max});H^1(\mathbb{R}^d))$ なる一意解を持ち，次の「ビーム強度 (または粒子数)」，「ハミルトニアン (またはエネルギー)」と呼ばれる量が保存則する（例えば [20, 6] ）：

$$\|\psi(t)\| := \left(\int_{\mathbb{R}^d}|\psi(x,t)|^2dx\right)^{1/2} = \|\psi_0\|, \qquad \mathcal{H}(\psi(t)) := \|\nabla\psi(t)\|^2 - \frac{2}{2+\frac{4}{d}}\|\psi(t)\|_{2+\frac{4}{d}}^{2+\frac{4}{d}} = \mathcal{H}(\psi_0).$$

我々の初期値問題は様々な解を持つが，このノートで考えるのは主に爆発解である．解の爆発 (blowup) とは，

$$0<T_{\max}<\infty, \quad \lim_{t\to T_{\max}}\|\nabla\psi(t)\| = \infty$$

となることを言う．[*2] 擬共型不変な非線形 Schrödinger 方程式は，$d=2$ のとき非線形媒質中を伝播するレーザービームの自己集束（Kerr 効果）のモデル方程式として現れ（例えば [1, 8] や [6]），解の爆発はビームの集束を表していると考えられている（この場合の時間軸は実際の時間ではなく，ビームの進行方向に平行な空

---

*1 以下では次の記号を用いる：関数 f に対して

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^pdx\right)^{1/p}.$$

ただし，$p=2$ の場合は添字を省略する．

*2 非線形項 $|\psi|^{4/d}\psi$ を，もう少し一般的な $|\psi|^{p-1}\psi$ ($p\in(1,2^*-1)$: $d\geq 3$ なら $2^*=\frac{2d}{d-2}$; $d=1, 2$ のときは $2^*=\infty$) に置き換えたとき，$p<1+\frac{4}{d}$ なら常に $T_{\max}=\infty$ であり，解の H^1 ノルムも時間に関して一様有界である．それに対して，$p\geq 1+\frac{4}{d}$ のときは，爆発する解もあれば時間大域解もある．このような意味で $p=1+\frac{4}{d}$ は爆発解の存在のための臨界指数である．初期値を完全に分類できれば良いが，いくつかの十分条件は知られているが，そのようなことはできていない．

間の第３軸となっている）．実際，ビームの集束を記述しているような爆発解が存在する：$T>0$ として，

$$\widetilde{Q}(x,t)=(T-t)^{-d/2}\exp\left\{-\frac{i|x|^2}{2(T-t)}\right\}Q\left(\frac{x}{T-t}\right)\exp\left(\frac{it}{2T(T-t)}\right)$$

と置くと，これは $t=T$ で爆発する擬共型不変な非線形 Schrödinger 方程式の解である．ここで，Q は半線型楕円型方程式：

$$\triangle Q-Q+|Q|^{4/d}Q=0,\quad Q\in H^1(\mathbb{R}^d)\setminus\{0\}$$

の解であって，$\widetilde{Q}(x,t)$ は擬共型不変な非線形 Schrödinger 方程式の定在波解 $Q(x)e^{it/2}$ を擬共型変換したものとなっている．[*3] 先に述べたが，この解は爆発解である：

$$\lim_{t\uparrow T}\|\nabla\widetilde{Q}(t)\|=\infty.$$

すなわち $T>0$ で爆発して，その爆発の速さ（blowup rate）は

$$\|\nabla\widetilde{Q}(t)\|\asymp\frac{1}{T-t},$$

であり，次のような性質を持っている．

$$\lim_{t\uparrow T}\int_{\mathbb{R}^d}|x|^2|\widetilde{Q}(x,t)|^2dx=0,\quad\|\widetilde{Q}(t)\|=\|Q\|,$$

これから，「ビーム強度」が「一点」に集束することがわかる： $t\uparrow T$ とすると測度の弱収束の意味で

$$|\widetilde{Q}(x,t)|^2dx\rightharpoonup\|Q\|^2\delta_0(dx)$$

となる．しかしながら，このような性質は爆発解の中ではかなり特殊なもので，一般的には複数（有限個）の「焦げ付き」ができるし，全ての「ビーム強度」が点に集中するわけではない．また，爆発の速さも $\widetilde{Q}(x,t)$ より遅いと考えられている．詳細は第３節で解説する．

我々は，この爆発解の爆発スピードに興味があるのだが，下からの評価：

$$\frac{1}{\sqrt{T_{\max}-t}}\lesssim\|\nabla\psi(t)\|$$

は知られている．我々の方程式は自己相似解を持つが，その爆発の速さが丁度 $\dfrac{1}{\sqrt{T_{\max}-t}}$ である．しかしながら，自己相似解は $L^2(\mathbb{R}^d)$ には属さないので，我々の考察の範疇外である．それでも，$d=2$ のときに $e^{-|x|^4}$ のような初期値から出発すると，原点に自己相似解のような特異性が現れて，その爆発の速さが自己相似解のそれと同じであることが，数値計算で示唆されている [7].

2. Nelson 拡散過程

E. Carlen [2, 3, 5] は，量子力学の基礎方程式である Schrödinger 方程式の初期値問題の解に対して，量子力学と同じ予言を与える確率測度を経路の空間上に構成した．これは，E. Nelson が第３の量子化として提唱した確率過程量子化 [17, 18] において中心的な役割を担うものであり，Nelson 拡散過程と呼ばれている．

[*3] 我々の非線形 Schrödinger 方程式は，その名が示すように，この変換で不変である．擬共型変換は Talanov レンズ変換とも呼ばれている [21]．しかしながら，文献上での $\widetilde{Q}(x,t)$ のような爆発解の初出は [22] のようである．

Carlen の方法は非線形 Schrödinger 方程式に対しても有効で，非線形 Schrödinger 方程式の解に対しても，同様な確率測度を構成することができる: 経路の空間 $C\big([0,T_{\max});\mathbb{R}^d\big)$ 上に "確率変数"

$$\begin{array}{cccccc} X_t: & C\big([0,T_{\max});\mathbb{R}^d\big) & \longrightarrow & \mathbb{R}^d & & \\ & \cup & & \cup & & \\ & \gamma & \longmapsto & \gamma(t) & =: & X_t(\gamma). \end{array}$$

を導入すると，$C\big([0,T_{\max});\mathbb{R}^d\big)$ の上に

$$P[X_t \in dx] = \frac{|\psi(x,t)|^2 dx}{\|\psi_0\|^2}.$$

なる確率測度 P が存在して，次の汎関数 B_t が P-Brown 運動になるようなものとして特徴付けられる：

$$B_t :\overset{def}{=} X_t - X_0 - \int_0^t b(X_\tau,\tau)d\tau, \qquad t \in [0,\, T_{\max}).$$

ここで，ドリフト項 b は Schrödinger 方程式の解から，次のように定義されるている：

$$b(x,t) :\overset{def}{=} u(x,t) \,+\, v(x,t);$$

u は osmotic velocity，v は current velocity と呼ばれ，それぞれ

$$u(x,t) :\overset{def}{=} \begin{cases} \Re\dfrac{\nabla\psi(x,t)}{\psi(x,t)}, & \text{if } \psi(x,t) \neq 0 \\ 0, & \text{if } \psi(x,t) = 0, \end{cases}$$

$$v(x,t) :\overset{def}{=} \begin{cases} \Im\dfrac{\nabla\psi(x,t)}{\psi(x,t)}, & \text{if } \psi(x,t) \neq 0 \\ 0, & \text{if } \psi(x,t) = 0, \end{cases}$$

と定められている．

Nelson [18] や Carlen [4] は，量子力学の基礎方程式である線形 Schrödinger 方程式の散乱現象の解析を Nelson 拡散過程を使って行なっている．このノートでは，非線形 Schrödinger 方程式の爆発解の解析に対応する拡散過程を応用 してみる．

3. Brown 運動の重対数法則と爆発の速さ

我々の爆発解は，$\big\{|\psi(x,t)|^2dx\big\}_{0<t<T\max}$ が tight であれば，

$$|\psi(x,t)|^2 dx \rightharpoonup \sum_{j=1}^N A_j \delta_{a^j}(dx) + \mu(dx) \qquad \text{as} \qquad t \to T_{\max}$$

と振る舞うことがわかっている：A_j $(j=1,2,\ldots,N)$ は，ある "閾値" $\mathcal{N}_0$ [*4] より大きな正数，$\delta_{a^j}(dx)$ は $\mathbb{R}^d$ 内の点 a^j に台を持つ Dirac 測度で，μ は一般には 0 ではない [13, 14]. [*5] 一般的に μ は Lebesgue 測度

---

*4 実際には，次のように定義される：

$$\mathcal{N}_0 \,:=\, \inf\Big\{\|v\|^2 \;\Big|\; \mathcal{H}(v) \le 0, \quad v \in H^1(\mathbb{R}^d)\setminus\{0\}\Big\}$$

この値は，基底波解（定在波解のうち最小作用を持つ解）によって実現される [23]．一般的には，特異点をブローアップすると基底波解のプロファイル（Townes profile と呼ばれている）が見られると予想されているが（数値シミュレーションが [12] にある），第 1 節の爆発する特殊解のように，そうでないものもあるし，数値計算で示唆されているように自己相似的な形状が見られる場合もあるかもしれない．状況はかなり複雑である．おそらく，特異点の形状と爆発の速さは相補的な関係にある．

*5 $d=1$ または $d\ge 2$ で ψ_0 が球対称のとき，$|x|\psi_0 \notin L^2(\mathbb{R}^d)$ であれば $\mu \neq 0$ である．一般の爆発解は，第 1 節の特殊解 $\widetilde{Q}(x,t)$ とは異なり $\mu\neq 0$ である．$N=1$ かつ μ が 0 となるのは，かなり特殊な場合と言える．

に対して絶対連続であると予想されているが，特殊な場合（後の [9, 10, 11] などを参照）を除いて，よく分かってはいない．

一般的な爆発解の爆発の速さは，第 1 節の爆発する特殊解や自己相似解のそれとは異なり．loglog law と呼ばれる次の評価を満たすものと考えられてきた：

$$\|\nabla\psi(t)\| \asymp \sqrt{\frac{\log\log(T_{\max}-t)^{-1}}{T_{\max}-t}}.$$

このような振る舞いは長い間の予想であったが, [*6] [19] で初めて，$d=1$ のときに loglog law を満たす爆発解が構成された．続いて [9, 10, 11] において，“閾値” $\mathcal{N}_0$ より少しだけ大きな L^2 ノルムを持つ爆発解に対しては，$d=1,2,3,4$ のとき loglog law が成立することが示された．大きな L^2 ノルムを持つ解に対しては未解決である．

ここでは，この問題を少し別の角度から見てみることにする．上のような極限形状を持つことなどを利用して，爆発の速さを Brown 運動を用いて評価することができる．次を仮定する：[*7]

$$\int_0^{T_{\max}} \|\nabla\psi(t)\|\,dt \,<\, \infty, \qquad \lim_{t\to T_{\max}} \|\nabla\psi(t)\| \int_t^{T_{\max}} \|\nabla\psi(\tau)\|\,d\tau \,=\, \infty.$$

このとき，Blumenthal の 0-1 法則により次の定理を得る．

Theorem 1. 十分大きな $M>0$ が存在して，

$$P\left[\,|\,B_{T_{\max}} \,-\, B_t\,| \,\le\, M\int_t^{T_{\max}} \|\nabla\psi(\tau)\|\,d\tau,\;\; e.f.\,\right] \,=\, 1$$

が成り立つ．

Theorem 1 の評価で鍵となる事実の一つは，十分大きな $C>0$ に対して

$$P\left[\,\left|\int_t^{T_{\max}} b(X_\tau,\tau)d\tau\right| \,\le\, C\int_t^{T_{\max}} \|\nabla\psi(\tau)\|\,d\tau,\;\; i.o.\,\right] \,>\, 0.$$

となることである．爆発の上からの評価には，現状，もう少し仮定が必要である．上で測られている事象の余事象の確率が，C が小さいときは正となる，すなわち，十分小さな $c>0$ に対しては，

$$1 \,-\, p_1 \,:=\, P\left[\,\left|\int_t^{T_{\max}} b(X_\tau,\tau)\,d\tau\right| \,\ge\, c\int_t^{T_{\max}} \|\nabla\psi(t)\|\,d\tau,\;\; e.f.\,\right] \,>\, 0$$

を仮定し, [*8] さらに

$$P\left[\,|X_{T_{\max}} \,-\, X_t| \,\le\, \frac{c}{2}\int_t^{T_{\max}} \|\nabla\psi(\tau)\|\,d\tau,\;\; i.o.\,\right] \,>\, 1 \,-\, p_1$$

[*6] この探求の歴史は [20] に詳しい．

[*7] 一つ目の条件は，第 1 節の爆発する特殊解より遅い爆発の速さを持っていると仮定して，特殊解を除外している．この条件が $\{|\psi(x,t)|^2dx\}_{0<t<T_{\max}}$ の tightness を導く [15]．これは，いわゆる有限エントロピー条件と呼ばれるものとは異なることに注意．二つ目の条件は，次の条件とほぼ等価である：

$$\lim_{t\to T_{\max}} \sqrt{T_{\max} \,-\, t}\,\|\nabla\psi(t)\| \,=\, \infty$$

すなわち，自己相似解の爆発の速さより速いと言うことである．

[*8] これは $\mu \ne 0$ であることが関係していると考えられる．

とすることで，*9 次の評価を得ることができる：

Theorem 2. 十分小さな $\eta > 0$ に対して

$$P\left[\, |B_{T_{\max}} - B_t| \geq \eta \int_t^{T_{\max}} \|\nabla\psi(\tau)\|\, d\tau,\ \ i.o. \right] = 1.$$

が成り立つ．

上からの評価は仮定が多い分，Brown 運動を制御している関数を取り替える自由度がある：Theorem 2 の

$$\int_t^{T_{\max}} \|\nabla\psi(\tau)\|\, d\tau$$

は，次の評価を満たす $\Lambda(t)$ に置き換えても同じ結果を得る：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\|\nabla\psi(t)\|} \lesssim \Lambda(t) \lesssim \displaystyle\int_t^{T_{\max}} \|\nabla\psi(\tau)\|\, d\tau, \\ \Lambda(t)\|\nabla\psi(t)\| \to \infty \qquad (t \to T_{\max}) \end{cases}$$

例えば，次のような関数がこれらの条件を満足する：

$$\Lambda(t) \asymp (T_{\max} - t)\, \|\nabla\psi(t)\|.$$

References

[1] Akhmanov, S. A. , Sukhorukov, A. P. and Khokhlov, R. V. , *Self-focusing and self-trapping of intence light beams in a nonlinear medium*, Soviet Physics JETP, **23**, pp. 1025–1033 (1966)

[2] Carlen, E.: Conservative diffusions, Commun. Math. Phys. **94** 293–315 (1983).

[3] Carlen, E.: Existence and sample path properties of the diffusions in Nelson's stochastic Mechanics, In: *Stochastic Processes in Mathematics and Physics*, Springer Lecture Notes in Mathematics 1158, Albeverio, S. et al eds., Springer-Verlag, Berlin, Heiderberg, New York, 1985, pp. 25–51

[4] Carlen, E.: Potential scattering in stochastic mechanics, Ann. Inst. Henri Poincaé - Physique-Théorique **42** 407–428 (1985).

[5] Carlen, E.: Progress and problems in stochastic mechanics, In: *Stochastic methods in mathematical physics*, Karwowski, W. ed., World Scientific, Singapore, 1989, pp. 3–31

[6] Fibich, G. : "The Nonlinear Schrödinger equation: Singular Solutions and Optical Collaps", Applied Mathematical Sciences 192, Springer, Switzerland, 2015.

[7] Fibich, G., Gavish, N. and Wang., X.-P. *New singular solutions of the nonlinear Schrödinger equation*, Pysica D **211** , pp. 193–220 (2005)

[8] Kelly, P. L., *Self-focusing of Optical beams*, Phys. Rev. Lett. **15**, pp. 1005–1008 (1965)

[9] Merle, F. and Raphael, P. , *Sharp upper bound on the blow up rate for critical nonlinear Schrödinger equation*, Geom. Funct. Anal. **13**, pp. 591–641 (2003)

[10] Merle, F. and Raphael, P. , *On universality of blow-up profile for L^2-critical nonlinear Schrödinger equation*, Invent. Math. **156**, pp. 565–672 (2004)

[11] Merle, F. and Raphael, P. : *Blow-up dynamics and upper bound on the blow up rate for critical nonlinear Schrödinger equation*, Ann. Math. **16**, pp. 157–222 (2005)

*9 特異点が大きければ良い．例えば特異点が一つ（$N = 1$）で $A_1 > (1 - p_1)\|\psi_0\|^2$．または，$\mu(\mathbb{R}^d) \ll p_1$．
また，$\frac{c}{2}$ は任意の正数に置き換えることができる．

[12] Moll, K. D. , Gaeta, A. L. and Fibich, G. , *Self-similar optical wave collaps: Observation of the Townes profile*, Phys. Rev. Lett. **90**, 203–902 (2003)

[13] Nawa, H. *Limiting profiles of blow-up solutions of the nonlinear Schrödinger equation with critical power nonlinearity,* Proc. Japan Acad. **73(A)** no.10 (1997) 171–175.

[14] Nawa, H. : *Asymptotic and limiting profiles of blow-up solutions of the nonlinear Schrödinger equation with critical power*, Commun. Pure and Apllied Math. **52** (1999), pp. 193–270 (1999)

[15] Nawa, H. : Nelson diffusions and blow-up phenomena in solutions of the nonlinear Schrödinger equation with critical power, pp117–134 in : *Nonlinear Dynamics and Renormalization Group* – CRM Proceedings and lecture note **27**, I. M. Sigal and C. Sulem, eds., American Mathematical Society, New York, 2001.

[16] Nawa, H. and Tsutsumi, M. *On blow-up for the pseudo-conformally invariant nonlinear Schrödinger equation II* , Commun. Pure and Applied Math. **51** pp. 373–383 (1998)

[17] Nelson, E. , *Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian Dynamics*, Phys. Rev. **150**, pp. 1079–1085 (1966)

[18] Nelson, E. : "Quantum fluctuations", Princeton Unuversity Press, Princeton, NJ, 1984.

[19] Perelman, G. : *On the blow-up phenomenon for the critical nonlinear Schrödinger equation in 1 D*, Ann. Henri Poincare **2**, pp. 605–673 (2001)

[20] Sulem, Ċand Sulem, P. -L. : "Nonlinear Schrödinger equation: Self-focusing and wave collaps", Applied Mathematical Sciences 139, Springer-verlag, New York, 1999.

[21] Talanov, V. I. , *Focusing of light in cubic media*, LETP Lett. **11**, pp. 199–201 (1970)

[22] Weinstein, M. I. *On the structure and formation singularities in solutions to nonlinear dispersive evolution equations*, Commun. in Partial Diffrential Equations **11**, pp. 545–565 (1986)

[23] Weinstein, M. I. *Nonlinear Schrödinger equation and sharp interpolation estimates*, Comm. Math. Phys. **87**, pp. 567–576 (1983)

[24] Zakharov, V. E. and Synakh, V. S. , *The nature of self-focusing singularity*, Sov. Phys. JETP **41** pp. 441–448 (1976)

Department of Mathematic
Meiji University
Kanagawa 214-8571
JAPAN
E-mail adress: nawa@meiji.ac.jp