数理解析研究所講究録 第2116巻 2019年 178-183

SUPERDIFFUSION OF ENERGY IN HARMONIC CHAINS WITH NOISES AND LONG-RANGE INTERACTIONS

東京大学大学院数理科学研究科 須田 颯
HAYATE SUDA
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES,
THE UNIVERSITY OF TOKYO

1. 背景, モデルの導入

振動子鎖モデルとは, 固体中における熱拡散を微視的にモデル化したものであり, 大量の微粒子からなる大規模相互作用系である. 数学的には, 次のような無限次元ハミルトン系 $\{(p_x(t), q_x(t)) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}; x \in \mathbb{Z}, t \geq 0\}$ として定義される.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}q_x(t) = p_x(t) \\ \frac{d}{dt}p_x(t) = V'(q_{x-1}(t) - q_x(t)) - V'(q_x(t) - q_{x+1}(t)) \end{cases} \qquad x \in \mathbb{Z}.$$

ここで, $(p_x(t), q_x(t)) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ は時刻 $t \geq 0$ における x 番目の粒子が持つ運動量及びその位置を表す. $V \in C^1(\mathbb{R})$ は相互作用ポテンシャルである. 近年の数値実験 ([5],[9],[10]) により, FPU-β-Chain ($V(y) = \frac{1}{2}y^2 + \beta y^4, \beta > 0$) において熱の異常輸送現象が生じていること, つまりフーリエ則の破れが確認された. この実験結果を数学的に証明するのは, モデルが非線形系であること, また決定論的な時間発展をすることから非常に困難である. 確率調和振動子鎖モデルはこのような現象の数学的解析を可能にするため導入されたモデルであり, FPU-Chain に代表される非調和振動子鎖モデルが持つ非線形効果を, 確率的な摂動で近似したものである. 摂動のない調和振動子鎖モデルにおける熱輸送は弾道的であるが, 確率調和振動子鎖モデルでは系のサイズの $\frac{1}{2}$ 乗に比例して熱伝導率が発散すること, すなわち熱の異常輸送が証明されている [3]. このダイナミクスを定義するにあたって, まず摂動のない調和振動子鎖モデルの定義を与える.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}q_x(t) &= p_x(t) \\ \frac{d}{dt}p_x(t) &= -\sum_{x' \in \mathbb{Z}} \alpha(x-x')q_{x'}(t) \end{cases} \qquad x \in \mathbb{Z}.$$

ここで, $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ は粒子間の相互間力を表し, $x, y \in \mathbb{Z}$ 番目の粒子の相互間力は $|\alpha(x-y)|$ である. さらに, 以下の条件 $(a.1)-(a.4)$ を満たすと仮定する.

$(a.1)$ $\alpha_x \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $\alpha_x \neq 0 \ \exists x \in \mathbb{Z}$. $\quad (a.2)$ $\alpha_x = \alpha_{-x} \ \forall x \in \mathbb{Z}$.

$(a.3)$ $\exists C > 0$ s.t. $|\alpha_x| \leq Ce^{-\frac{|x|}{C}} \ \forall x \in \mathbb{Z}$. $\quad (a.4)$ $\widehat{\alpha}(k) > 0 \ \forall k \neq 0$, $\widehat{\alpha}(0) = 0, \widehat{\alpha}''(0) > 0$.

ただし, $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{Z})$ に対し, $\widehat{f}(k)$ はその離散フーリエ変換を表す. すなわち, $\mathbb{T}$: 1 次元トーラスとすると,

$$\widehat{f}(k) := \sum_{x\in\mathbb{Z}} f_x e^{-2\pi\sqrt{-1}kx} \qquad k \in \mathbb{T}.$$

定義より調和振動子鎖モデルは線形系であるから, 方程式の両辺に離散フーリエ変換を施すことによって, 次のダイナミクス $\{\widehat{p}(k,t), \widehat{q}(k,t); k \in \mathbb{T}, t \geq 0\}$ が得られる.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \widehat{q}(k,t) \\ \widehat{p}(k,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\widehat{\alpha}(k) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widehat{q}(k,t) \\ \widehat{p}(k,t) \end{pmatrix}.$$

この行列の固有値 $\pm\sqrt{-1}\omega(k)$, $\omega(k) := \sqrt{\widehat{a}(k)}$ に対応する固有関数 $\{\widehat{\psi}(k,t); k \in \mathbb{T}, t \geq 0\}$ は wave function と呼ばれ, その定義式と時間発展法則は

$$\widehat{\psi}(k,t) = \omega(k)\widehat{q}(k,t) + \sqrt{-1}\widehat{p}(k,t),$$
$$\frac{d}{dt}\widehat{\psi}(k,t) = -\sqrt{-1}\omega(k)\widehat{\psi}(k,t)$$

によって与えられる．逆に, wave function を上式で定義することから出発して, $\{p_x(t), q_x(t); x \in \mathbb{Z}, t \geq 0\}$ を定義できることに注意する．実際, $\{\widehat{\psi}(k,t); k \in \mathbb{T}, t \geq 0\}$ により, $\{p_x(t), q_x(t); x \in \mathbb{Z}, t \geq 0\}$ は次式で定義される．

$$\begin{cases} q_x(t) := \int_{\mathbb{T}} dk\ e^{2\pi\sqrt{-1}kx}\widehat{q}(k,t) \\ p_x(t) := \int_{\mathbb{T}} dk\ e^{2\pi\sqrt{-1}kx}\widehat{p}(k,t) \end{cases} \quad x \in \mathbb{Z},$$
$$\begin{cases} \widehat{q}(k,t) := \frac{1}{2\omega(k)}(\widehat{\psi}(k,t) + \widehat{\psi}^*(-k,t)) \\ \widehat{p}(k,t) := -\frac{\sqrt{1}}{2}(\widehat{\psi}(k,t) - \widehat{\psi}^*(-k,t)). \end{cases}$$

ただし, 上記の $\{q_x(t); x \in \mathbb{Z}, t \geq 0\}$ の定義は形式的なものであり, 一般には $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ の元として well-defined でない．しかし, 次節でエネルギーを定義するにあたっては, $\{q_x(t); x \in \mathbb{Z}, t \geq 0\}$ が定義できずとも, $\{\sum_{x' \in \mathbb{Z}} \alpha_{x-x'}|q_x(t) - q_{x'}(t)|^2; x \in \mathbb{Z}, t \geq 0\}$ という量が定義できれば十分である．実際, 後者は次の式で定義できる．

$$\sum_{x' \in \mathbb{Z}} \alpha_{x-x'}|q_x - q_{x'}|^2 := \int_{\mathbb{T}^2} dkdk' e^{2\pi\sqrt{-1}(k+k')x} F(k,k')(\widehat{\psi}(k) + \widehat{\psi}(-k)^*)(\widehat{\psi}(k') + \widehat{\psi}(-k')^*),$$

$$F(k,k') := \frac{\widehat{\alpha}(k+k') - \widehat{\alpha}(k) - \widehat{\alpha}(k')}{\omega(k)\omega(k')} \quad k,k' \in \mathbb{T}.$$

次に, 確率的な摂動を加えたダイナミクスの定義をするが, これは wave function の時間発展に摂動を加えたものである．定義に先立って, 記号の導入をする．確率空間を $(\Omega, \mathbb{P})$ とし, $\{w_x(t); x \in \mathbb{Z}, t \geq 0\}$ は $(\Omega, \mathbb{P})$ 上の 1-D I.I.D. Standard BMs とする．$T > 0$ を固定する．$\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$-値確率過程 $\{f(k,t); k \in \mathbb{T}, 0 \leq t \leq T\}$ であって, $\|f\|_{\mathcal{H}_T} := \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[\int_{\mathbb{T}} dk\ |f(k,t)|^2] < \infty$ を満たすもの全体からなる集合を $\mathcal{H}_T$ とおく．この時, $\{\widehat{\psi}(k,t) \in \mathcal{H}_T; k \in \mathbb{T}, 0 \leq t \leq T\}$ は以下の SDE の一意弱解として定義される．

$$\begin{cases} d\widehat{\psi}(k,t) & = [-\sqrt{-1}\omega(k)\widehat{\psi}(k,t)dt - \gamma R(k)\{\widehat{\psi}(k,t) - \widehat{\psi}^*(-k,t)\}]dt \\ & \quad +\sqrt{-1}\sqrt{\gamma}\int_{\mathbb{T}} r(k,k')[\widehat{\psi}(k-k',t) - \widehat{\psi}^*(k'-k,t)]dB(dk',dt), \end{cases}$$

$$B(dk,dt) := \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{2\pi kx} dk\ w_x(dt). \qquad \gamma > 0.$$

$$r(k,k') := 2\sin \pi k^2 \sin 2\pi(k-k') + \sin 2\pi k \sin \pi(k-k')^2, \quad R(k) := 2\sin^4 \pi k + \frac{3}{2}\sin^2 2\pi k.$$

ここで, $B(k,t)$ は $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ 上の cylindrical Wiener noise と呼ばれるものであり, $\gamma > 0$ は摂動の強度を表す．

2. 問題設定, 先行研究

本稿では, 上記の確率調和振動子鎖モデルにおけるエネルギー分布の巨視的挙動を考察する．まず, x 番目の粒子のエネルギー $e_x(t)$ を次式で定義する．

$$e_x(t) := \frac{1}{2}|p_x(t)|^2 - \frac{1}{4}\sum_{x' \in \mathbb{Z}} \alpha_{x-x'}|q_x(t) - q_{x'}(t)|^2.$$

考察の対象は, エネルギーの経験分布に対する時空スケール極限である．すなわち, 任意のテスト関数 $J \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対し, 以下のような極限を考え,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \sum_{x \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}_\epsilon[e_x(\frac{t}{f(\epsilon)})]J(\epsilon x) = \int_{\mathbb{R}} dy\ W(y,t)J(y)$$

非自明な極限 $W(y,t)$ が存在するような時空スケーリング比 $f(\epsilon)$ を求める, 及び極限 $W(y,t)$ の特徴づけをすることが目標である. ここで, $\mathbb{E}_\epsilon$ は初期分布が ϵ で添え字付けられた期待値である. 先行研究として, 次の結果がある.

Theorem 1 ([8])**.** $\gamma=\epsilon^s\gamma_0, 0\le s<1, \gamma_0>0$ とし, 次の仮定を置く.

$$(1)\ \exists W_0\in\mathbb{L}^1(\mathbb{R})\ s.t.\ \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon\sum_{x\in\mathbb{Z}}\mathbb{E}_\epsilon[e_x(0)]J(\epsilon x)=\int_{\mathbb{R}}dy\ W_0(y,t)J(y)\quad \forall J\in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

$$(2)\ \sup_{0<\epsilon<1}\int_{\mathbb{T}}dk\ \epsilon^2\mathbb{E}_\epsilon[|\widehat{\psi}(k,0)|^2]^2<\infty.$$

この時, 任意の $J\in C_0^\infty(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ に対して,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon\sum_{x\in\mathbb{Z}}\int_0^\infty dt\ \mathbb{E}_\epsilon[e_x(\frac{t}{\epsilon^{\frac{3-s}{2}}})]J(\epsilon x,t)=\int_{\mathbb{R}\times[0,\infty)}dydt\ W(y,t)J(y,t)$$

が成り立つ. ここで, $W(y,t)$ は次の $\frac{3}{4}$-*fractional diffusion equation* の解である.

$$\begin{cases}\partial_t W(y,t)=-c(-\Delta)^{\frac{3}{4}}W(y,t)\\ W(y,0)=W_0(y)\end{cases}\qquad c:=\frac{[\widehat{\alpha}''(0)]^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{9}{4}}(3\gamma_0)^{\frac{1}{2}}}.$$

確率的摂動のスケーリングに応じて時間スケーリングが速くなることは, 摂動のない調和振動子鎖モデルにおいては熱が弾道的輸送することを反映している. $s=1$ の場合は臨界的であり, 次の結果がある.

Theorem 2 ([4, 7])**.** $\gamma=\epsilon\gamma_0, \gamma_0>0$ とし, *Theorem* 1 の条件 (1), (2) を仮定する. この時, *"2-step scaling limit"* により, エネルギー分布の巨視的時間発展法則として $\frac{3}{4}$-*fractional diffusion equation* が導出される.

ここで, 前節で定義されたモデルは α の仮定 $(a.3)$ により長距離相関を持ちうるが, 得られる fracional diffusion の指数が変わらないという意味で, nearest neighbor model ($\alpha(0)=2, \alpha(\pm1)=-1, \alpha(x)=0,\ |x|\ge 2$) と本質的に等しい. よって $(a.3)$ の仮定を外し, 微視的な長距離相関がより強い場合に, 巨視的な挙動への影響を調べることは一つの自然な拡張と言えるだろう. 近年の数値実験 ([1],[2],[6]) では, 粒子 x,y 間の相互間力が $|x-y|^{-\theta}, \theta>0$ で与えられる長距離相関非調和振動子鎖モデルが扱われている. 特に, θ の値に応じて, 熱伝導率の発散オーダーが非単調に変化することが観測されているが, θ がどのように依存しているのかは不明である.

3. 主結果

前節の議論を踏まえて, 著者は $\alpha(x):=|x|^{-\theta},\ x\ne 0, \alpha(0):=2\sum_{x\in\mathbb{N}}|x|^{-\theta},\ \theta>2$ である確率調和振動子鎖モデルにおけるエネルギー分布の時空スケール極限を考察し, 先行研究に対応した結果を得た.

Theorem 3 (S)**.** $\gamma=\epsilon^s\gamma_0, 0\le s<1, \gamma_0>0$ とし, *Theorem* 1 の条件 (1), (2) を仮定する. この時, 任意の $J\in C_0^\infty(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ に対して,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon\sum_{x\in\mathbb{Z}}\int_0^\infty dt\ \mathbb{E}_\epsilon[e_x(\frac{t}{f_{\theta,s}(\epsilon)})]J(\epsilon x,t)=\int_{\mathbb{R}\times[0,\infty)}dydt\ W(y,t)J(y,t)$$

が成り立つ. ここで, 時空スケーリング比 $f_{\theta,s}(\epsilon)$ は

$$f_{\theta,s}(\epsilon):=\begin{cases}\epsilon^{\frac{6-s(\theta-1)}{7-\theta}}, & 1<\theta<3,\ 0\le s<1,\\ \epsilon^s|h_s(\epsilon)|^3, & \theta=3,\ 0\le s<1,\\ \epsilon^{\frac{3-s}{2}}, & \theta>3,\ 0\le s<1,\end{cases}$$

により与えられる. $h_s(\cdot)$ は $y \mapsto (\frac{y^4}{-\log y})^{\frac{1}{2(1-s)}}$ *on* $[0,1)$ の逆関数である. $W(y,t)$ は次の *fractional diffusion equation* の解である.

$$\begin{cases}\partial_t W(y,t) = -C_{\theta,\gamma_0}(-\Delta)^{\frac{3}{7-\theta}}W(y,t) \\ W(y,0) = W_0(y)\end{cases} \qquad 2 < \theta \le 3,$$

$$\begin{cases}\partial_t W(y,t) = -C_{\theta,\gamma_0}(-\Delta)^{\frac{3}{4}}W(y,t) \\ W(y,0) = W_0(y)\end{cases} \qquad \theta > 3.$$

$$C_{\theta,\gamma_0} := \begin{cases}\gamma_0^{-\frac{\theta-1}{7-\theta}} \int_{\mathbb{R}} dk \ \frac{12\pi^2(\theta-1)^2C(\theta)|k|^2}{144\pi^4|k|^{7-\theta}+(\theta-1)^2C(\theta)} & 2 < \theta \le 3, \\ \gamma_0^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} dk \ \frac{48\pi^2C(\theta)|k|^2}{144\pi^4|k|^4+4C(\theta)} & \theta > 3,\end{cases}$$

$$C(\theta) := \begin{cases}4\pi^{\theta-1}\int_0^\infty dy \ \frac{\sin^2 y}{|y|^\theta} & 2 < \theta < 3, \\ 4\pi^2 & \theta = 3, \\ 4\pi^2\sum_{x\ge1}|x|^{2-\theta} & \theta > 3.\end{cases}$$

Theorem 4 (S)**.** $\gamma = \epsilon\gamma_0, \gamma_0 > 0$ とし, *Theorem* 1 の条件 (1), (2) を仮定する. この時, *"2-step scaling limit"* により, エネルギー分布の巨視的時間発展法則として, $2 < \theta \le 3$ ならば $\frac{3}{7-\theta}$*-fractional diffusion equation,* $\theta > 3$ ならば $\frac{3}{4}$*-fractional diffusion equation* が導出される.

主結果の証明に先立って, $\theta > 2$ の値による場合分けが起こること, 特に $\theta = 3$ が臨界値であることについて説明する. $2 < \theta < 3$ の場合に fractional diffusion の指数が異なることの原因は, $\lim_{\epsilon\to0}\omega'(k)$ の発散である.

$$\omega'(k) = \frac{\widehat{\alpha}'(k)}{\sqrt{\widehat{\alpha}(k)}} \sim \begin{cases}|k|^{-\frac{3-\theta}{2}} & 2 < \theta < 3, \\ \sqrt{-\log k} & \theta = 3, \\ 1 & \theta > 3,\end{cases} \qquad k \to 0.$$

大雑把に言うと, $\omega'(k)$ の漸近挙動と巨視的方程式には次の関係がある. $\omega'(k) \sim |k|^a,\ k \to 0,\ 0 < \frac{3}{2(2-a)} < 1$ であるとき, fractional diffusion の指数は $\frac{3}{2(2-a)}$ であり, $\frac{3}{2(2-a)} \ge 1$ もしくは $\frac{3}{2(2-a)} < 0$ の場合は normal diffusion が得られる. 主結果によると対数オーダーは fractional diffusion の指数に影響しないが, 時空スケーリング比には影響する. また, 時空スケーリング比が $\theta = 3$ で連続的でないことは, $\lim_{\theta\to3}C_{\theta,\gamma_0} = \infty$ であることと対応している.

4. 証明の概略

本節では Theorem 3 の証明についてその概略を紹介する. 証明の要になるのは, エネルギーの経験分布をより解析しやすい量に置き換えることである. この代替量 Wigner distribution $\{W_\epsilon(t) \in \mathbb{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{T}); t \ge 0\}_{0<\epsilon<1}$ は以下の式で定義される.

$$< W_\epsilon(t), J > := \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} dpdk \ \widetilde{W}_\epsilon(p,k,t)\widetilde{J}(p,k)^*,$$
$$\widetilde{W}_\epsilon(p,k,t) := \frac{\epsilon}{2}\mathbb{E}_\epsilon[\widehat{\psi}(k-\frac{\epsilon p}{2}, \frac{t}{f_{\theta,s}(\epsilon)})^*\widehat{\psi}(k-\frac{\epsilon p}{2}, \frac{t}{f_{\theta,s}(\epsilon)})],$$
$$\widetilde{g}(p) := \int_{\mathbb{R}} dy \ e^{-2\pi\sqrt{-1}yp}g(y) \quad g \in \mathbb{S}(\mathbb{R}).$$

ここで, $\mathbb{S}$ は Schwartz space であり, $\mathbb{S}'$ はその双対を表す. 経験分布と Wigner distribution について, 以下の命題が成り立つ.

Proposition 4.1. *Theorem* 1 の条件 (2) を仮定する. この時, 任意の $J \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$ に対して,

$$\lim_{\epsilon\to0}|\epsilon\sum_{x\in\mathbb{Z}}\mathbb{E}_\epsilon[e_x(\frac{t}{f(\epsilon)})]J(\epsilon x) - < W_\epsilon(t), J > | = 0.$$

したがって, Theorem 3 を示すには, Wigner distribution に対する以下のスケール極限を証明すればよい.

Theorem 5 (S)**.** $\gamma = \epsilon^s \gamma_0, 0 \le s < 1, \gamma_0 > 0$ とし, *Theorem* 1 の条件 (1), (2) を仮定する. この時, 任意の $J \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ に対して,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_0^\infty dt \ < W_\epsilon(t), J(\cdot,t) >= \int_{\mathbb{R}\times[0,\infty)} dydt\ W(y,t)J(y,t)$$

が成り立つ. ここで, $W(y,t)$ は以下の式で与えられる.

$$\widetilde{W}(p,t) = \begin{cases} \exp\{-C_{\theta,\gamma_0}|p|^{\frac{6}{7-\theta}}t\}\widetilde{W}_0(p) & 2<\theta\le 3, \\ \exp\{-C_{\theta,\gamma_0}|p|^{\frac{3}{2}}t\}\widetilde{W}_0(p) & \theta > 3. \end{cases} \tag{4.1}$$

定理の仮定 (2) より, $\{W_\epsilon(t) \in \mathbb{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{T}); t \ge 0\}_{0<\epsilon<1}$ は $\mathbb{L}^\infty([0,T]\times\mathbb{S})$, $T>0$ 内で $\star$-弱点列コンパクト であるから, 適当な収束部分列を取ることができる. よって, 収束部分列極限が全て (4.1) で与えられることを示せば十分である.

ダイナミクスの定義より, $\widetilde{W}_\epsilon$ の時間発展法則は以下のように計算できる.

$$\frac{d}{dt}\widetilde{W}_\epsilon(p,k,t) = -\frac{\sqrt{-1}\epsilon\omega'(k)}{f_{\theta,s}(\epsilon)}\widetilde{W}_\epsilon(p,k,t) + \frac{\gamma}{f_{\theta,s}(\epsilon)}[\mathcal{L}\widetilde{W}_\epsilon(p,\cdot,t)](k) + o_\epsilon(1),$$

$$(\mathcal{L}g)(k) := \int_{\mathbb{T}} dk' R(k,k')(g(k') - g(k)), \quad R(k,k') := \frac{1}{2}[r(k,k+k')^2 + r(k,k-k')^2].$$

この方程式は $\mathbb{T}$ 上での散乱項を持つため, 極限は $\mathbb{T}$ 上一様化される. つまり, $W_\epsilon(y,k,t) \to W(y,t), \epsilon \to 0$ がある意味で成り立つ. 微分方程式の両辺にラプラス変換を行い整理することで, 以下の式を得る.

$$\begin{aligned} &\Big\{\int_{\mathbb{T}} dk\ \frac{2\gamma R(k)}{f_{\theta,s}(\epsilon)}\Big(1 - \frac{2\gamma R(k)}{f_{\theta,s}(\epsilon)\lambda + 2\gamma R(k) + \sqrt{-1}\epsilon\omega'(k)}\Big)\Big\} \int_{\mathbb{T}} dk\ R(k)\bar{w}_\epsilon(p,k,\lambda) \\ &= \Big(\int_{\mathbb{T}} dk\ \frac{2\gamma R(k)}{f_{\theta,s}(\epsilon)\lambda + 2\gamma R(k) + \sqrt{-1}\epsilon\omega'(k)}\Big)\widetilde{W}_0(p) + o_\epsilon(1), \end{aligned}$$

ただし, $\bar{w}_\epsilon(p,k,\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t}\widetilde{W}_\epsilon(p,k,t)$ である. $\epsilon \to 0$ とすると,

$$\int_{\mathbb{T}} dk\ \frac{2\gamma R(k)}{f_{\theta,s}(\epsilon)}\Big(1 - \frac{2\gamma R(k)}{f_{\theta,s}(\epsilon)\lambda + 2\gamma R(k) + \sqrt{-1}\epsilon\omega'(k)}\Big) \to \begin{cases} \lambda + C_{\theta,\gamma_0}|p|^{\frac{6}{7-\theta}} & 2<\theta\le 3, \\ \lambda + C_{\theta,\gamma_0}|p|^{\frac{3}{2}} & \theta>3, \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{T}} dk\ \frac{2\gamma R(k)}{f_{\theta,s}(\epsilon)\lambda + 2\gamma R(k) + \sqrt{-1}\epsilon\omega'(k)} \to 1,$$

$$\int_{\mathbb{T}} dk\ R(k)\bar{w}_\epsilon(p,k,\lambda) \to w(p,\lambda) = \int_{\mathbb{R}} dy\ e^{-2\pi\sqrt{-1}yp}\int_0^\infty dt\ e^{-\lambda t}W(y,t),$$

であるから, 以上より

$$\begin{cases} (\lambda + C_{\theta,\gamma_0}|p|^{\frac{6}{7-\theta}})w(p,\lambda) + \widetilde{W}_0(p) = 0 & 2<\theta\le 3, \\ (\lambda + C_{\theta,\gamma_0}|p|^{\frac{3}{2}})w(p,\lambda) + \widetilde{W}_0(p) = 0 & \theta > 3. \end{cases}$$

が得られる. ラプラス・フーリエ変換の一意性より, $W(y,t)$ が (4.1) を満たすことが分かる.

References

[1] D. Bagchi : *Energy transport in the presence of long-range interactions* . Phys. Rev. E **96**, 042121 (2017)
[2] D. Bagchi : *Thermal transport in the Fermi-Pasta-Ulam model with long-range interactions.* Phys. Rev. E **95**, 032102 (2017)
[3] G. Basile, C. Bernardin, S. Olla : *Thermal Conductivity for a Momentum Conservative Model.* Commun. Math. Phys. **287**, 67-98 (2009)
[4] G. Basile, S. Olla, H. Spohn : *Energy transport in stochastically perturbed lattice dynamics.* Arch. Ration. Mech. **195**, 171–203 (2009)
[5] A. Dhar : *Heat transport in low-dimensional systems.* Adv. Phys. **57**(5), 457–537 (2008)

[6] S. Iubini, P. Di Cintio, S. Lepri, R. Livi, and L. Casetti : *Heat transport in oscillator chains with long-range interactions coupled to thermal reservoirs*. Phys. Rev. E **97**, 032102 (2018)

[7] M. Jara, T. Komorowski, S. Olla : *A limit theorem for an additive functionals of Markov chains.* Ann. Appl. Probab. **19**, 2270–2230 (2009)

[8] M. Jara, T. Komorowski, S. Olla : *Superdiffusion of Energy in a Chain of Harmonic Oscillators with Noise*. Commun. Math. Phys. **339**, 407–453 (2015)

[9] *Thermal Transport in Low Dimensions : From Statistical Physics to Nanoscale Heat Transfer*. edited by S. Lepri (Springer, New York, 2016)

[10] S. Lepri, R. Livi, A. Politi : *Thermal conduction in classical low-dimensional lattices.* Phys. Rep. **377**(1) 1–80 (2003)