

# Eigenvalue processes of Ginibre ensemble and their properties

千葉大学理学研究院 藪奥 哲史\*

Satoshi Yabuoku

Graduate School of Science, Chiba University

## 1 はじめに

ランダム行列の固有値の時間発展モデルの研究は Dyson [4] によって始まった. ランダム行列理論において, 行列成分が独立な正規分布で与えられるエルミート行列を GUE (ガウシアン・ユニタリ・アンサンブル) という. 行列サイズが  $N$  のとき, ランダムな実固有値  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N$  の同時密度関数は  $\mathbb{R}$  上の Lebesgue 測度に関して  $\beta = 2$  として

$$p(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{Z_N} \exp\left(-\frac{\beta}{4} \sum_{i=1}^N \lambda_i^2\right) \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta$$

となることが知られている [5]. また対称行列, 自己双対行列の場合それぞれ GOE, GSE と呼ばれ, 固有値の同時密度関数は上式においてそれぞれ  $\beta = 1, 4$  の場合に対応する. このランダム行列において, 行列の成分を確率過程にすることで時間発展するランダムな固有値が得られる. ここではそれを固有値過程と呼ぶことにする. 行列成分をブラウン運動にすると, その実固有値過程のなす確率微分方程式は, ブラウン運動と固有値間の相互作用を表すドリフト項によって記述される (3 頁 (1) 式). この固有値過程は Dyson ブラウン運動と呼ばれ, 固有値の性質から互いに “反発” し, 長距離相互作用をもつ. また他の行列モデルとしてユニタリ行列, 正定値エルミート行列の固有値過程の研究などがあり [4, 9], それらの固有値過程のなす確率微分方程式は, 共通して, ブラウン運動と固有値間の相互作用を表すドリフト項によって記述され, その行列の構造によってドリフト項が異なる. これらはいずれの場合も正規行列から得られる固有値過程であるが, 一方で非エルミート行列のような非正規行列に対する固有値過程はあまり研究されてこなかった. 非正規行列の場合スペクトル定理が適用できず, ユニタリ行列で対角化できないという背景がある.

以下では非正規行列である Ginibre アンサンブルの固有値過程を考える. Ginibre アンサンブルは成分を複素正規分布にもつ非対称ランダム行列であり, その複素固有値の経験分布は複素単位円板上の一様分布に収束する [1]. 近年このランダム行列の時間発展モデルが研究されているが [2, 3], まだ多くのことは知られていない. 本研究では陰関数定理を用いて Ginibre アンサンブルの固有値過程のなす確率微分方程式を具体的に導出し, その結果この固有値過程は固有値同士の相互作用を表す項をもつマルチンゲールであることがわかった. また得られた結果から, この固有値過程は Dyson ブラウン運動のように “反発” をもつと解釈できる. このモデルの特徴として, 行列の非対称性から, 固有値の挙動はその固有ベクトルの overlap と呼ばれる量に影響される [3, 7, 8]. このことは上で述べた正規行列の固有値過程では見られなかった現象である. 以下ではまずランダム行列理論における Ginibre アンサンブルを紹介し, その後その時間発展モデルについて述べる.

---

\*email:aasa1956@chiba-u.jp

## 2 Ginibre アンサンブル

$N$  次非対称行列  $G_N$  を以下で定義し,  $G_N$  を **Ginibre アンサンブル**と呼ぶ;

$$G_N := \begin{bmatrix} \frac{\xi_{11}^R + \sqrt{-1}\xi_{11}^I}{\sqrt{2}} & \dots & \dots & \frac{\xi_{1N}^R + \sqrt{-1}\xi_{1N}^I}{\sqrt{2}} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\xi_{N1}^R + \sqrt{-1}\xi_{N1}^I}{\sqrt{2}} & \dots & \dots & \frac{\xi_{NN}^R + \sqrt{-1}\xi_{NN}^I}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

ここで  $\xi_{ij}^R, \xi_{ij}^I$  は独立な標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う確率変数である.

$G_N$  は非エルミート行列なので,  $N$  個の複素固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$  をもつ. この  $N$  個の複素固有値の同時密度関数は  $\mathbb{C}$  上の Lebesgue 測度に関して

$$p(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{Z_N} \exp\left(-\sum_{i=1}^N |\lambda_i|^2\right) \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^2$$

のように表される [6]. ただし  $Z_N$  は規格化定数である. また  $G_N$  の固有値の経験分布を

$$\mu_{\frac{1}{\sqrt{N}}G_N} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\frac{1}{\sqrt{N}}\lambda_i}$$

で定めると,  $\mu_{\frac{1}{\sqrt{N}}G_N}$  は  $\mathbb{C}$  上のランダムな確率測度であり, 行列サイズ  $N \rightarrow \infty$  において

$$\mu_{\frac{1}{\sqrt{N}}G_N} \rightarrow \mu_{\text{cir}}, \text{ a.s.}$$

が成り立つ. ただし  $\mu_{\text{cir}}$  は複素単位円板上の一様分布である [1].

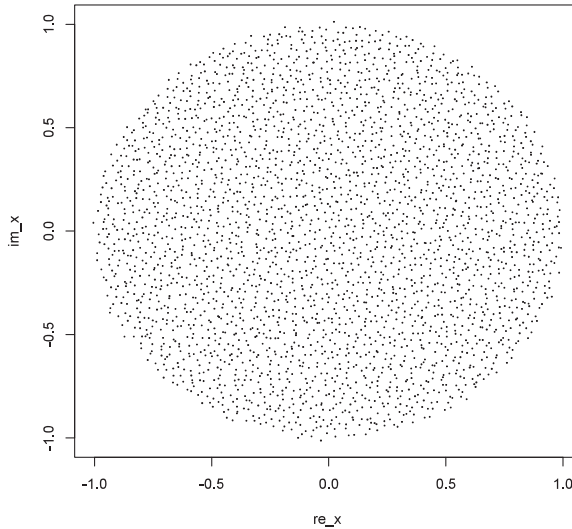


図 1:  $\frac{1}{\sqrt{N}}G_N$  の固有値の分布の様子 ( $N = 3000$ )

### 3 設定と主結果

$N$  次非対称行列値過程  $G_N(t), t \geq 0$  に対して次の (A1), (A2) を仮定する.

(A1)  $G_N(0)$  は単純である.

(A2)  $t > 0$  において

$$G_N(t) = \begin{bmatrix} B_{11}^R(t) + \sqrt{-1}B_{11}^I(t) & \cdots & \cdots & B_{1N}^R(t) + \sqrt{-1}B_{1N}^I(t) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ B_{N1}^R(t) + \sqrt{-1}B_{N1}^I(t) & \cdots & \cdots & B_{NN}^R(t) + \sqrt{-1}B_{NN}^I(t) \end{bmatrix}.$$

ただし  $B_{kl}^R, B_{kl}^I, 1 \leq k, l \leq N$  は独立な (原点出発とは限らない) 1次元ブラウン運動である.

ここで一般に  $N$  次正方行列  $M_N$  が単純であるとは,  $M_N$  の固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  に対して  $i \neq j$  ならば  $\lambda_i \neq \lambda_j$  が成り立つことをいう. 成分の  $2N^2$  個のブラウン運動は (A1) を満たす初期条件のものを考える. (A1) によって固有値過程は異なる  $N$  点  $\lambda_1(0), \dots, \lambda_N(0)$  から出発し, (A2) によって Ginibre アンサンブルの時間発展が定義される. 以後簡単のため複素ブラウン運動を  $B_{kl}(t) := B_{kl}^R(t) + \sqrt{-1}B_{kl}^I(t), t > 0$  とし,  $G_N(t)$  の  $N$  個の複素固有値過程を  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t)$  で表すことにする. このときこの固有値過程について次が成り立つ.

**Theorem 1.**  $G_N(t)$  の固有値過程  $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t))$  は次の確率微分方程式を満たす;

$$d\lambda_i(t) = \sum_{1 \leq k, l \leq N} \frac{(-1)^{k+l} \det((\lambda_i(t)I_N - G_N(t))_{k|l})}{\prod_{j(\neq i)} (\lambda_i(t) - \lambda_j(t))} dB_{kl}(t), \quad i = 1, \dots, N$$

ここで  $I_N$  は  $N$  次単位行列であり,  $N$  次正方行列  $A$  に対して  $A_{k|l}$  は  $A$  から  $k$  行  $l$  列を取り除いて得られる  $(N-1)$  次行列である.

**Remark.** 分子に現れる  $(-1)^{k+l} \det((\lambda_i(t)I_N - G_N(t))_{k|l})$  は,  $N$  次正方行列  $\lambda_i(t)I_N - G_N(t)$  の  $(k, l)$  成分に関する余因子である. この結果から Ginibre アンサンブルの固有値過程は複素マルチンゲールである. また Dyson モデル ( $\beta = 1, 2, 4$ ) の実固有値過程  $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t))$  のなす確率微分方程式

$$d\lambda_i(t) = dB_i'(t) + \frac{\beta}{2} \sum_{j(\neq i)} \frac{1}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} dt, \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

(ただし  $B_1', \dots, B_N'$  は独立な 1次元ブラウン運動) と比べると, 固有値同士の相互作用を表す項も異なっており, 固有値の相互作用が差の逆数の和ではなく積として現れる.

次に固有値過程  $\lambda_i(t)$  の相互変分について述べる. Bourgade, Dubach [3] によると, 相互変分は  $G_N(t)$  の固有ベクトルの内積で定義される overlap と呼ばれる量である.

**Definition** (固有ベクトルの overlap).  $N$  次正方行列  $M_N$  は単純であるとする. このとき右固有ベクトル  $R_j \in \mathbb{C}^N$ , 左固有ベクトル  $L_j \in \mathbb{C}^N$  が存在して

$$M_N R_j = \lambda_j R_j, \quad {}^t L_j M_N = \lambda_j {}^t L_j, \quad j = 1, \dots, N$$

を満たす. さらに

$$\mathcal{O}_{ij} := (R_j^* R_i)(L_j^* L_i)$$

で  $\mathcal{O}_{ij}$  を定め, これを  $M_N$  の固有ベクトルに関する overlap という [3, 8].

各固有ベクトルを規格化することで

$${}^tL_i R_j = \delta_{ij}, \quad \sum_{i=1}^N \mathcal{O}_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^N \mathcal{O}_{ij} = 1 \quad (2)$$

とできる.

**Remark.**  $M_N$  が正規行列ならば,  $R_j = L_j, \mathcal{O}_{ij} = \delta_{ij}$ .

彼らは行列  $G_N(t)$  を固有ベクトルで定まる正則行列によって三角化することで, 複素マルチンゲール  $\lambda_i(t)$  の相互変分について

$$d\langle \lambda_i, \lambda_j \rangle_t = 0, \quad d\langle \lambda_i, \bar{\lambda}_j \rangle_t = 2\mathcal{O}_{ij}(t)dt$$

が成り立つことを示した. これを  $\lambda_i(t) = \lambda_i^R(t) + \sqrt{-1}\lambda_i^I(t)$  で書き換えると

$$d\langle \lambda_i^R \rangle_t = d\langle \lambda_i^I \rangle_t = \mathcal{O}_{ii}(t)dt, \quad d\langle \lambda_i^R, \lambda_i^I \rangle_t = 0$$

となり, さらに  $i \neq j$  に対して

$$\begin{aligned} d\langle \lambda_i^R, \lambda_j^R \rangle_t &= d\langle \lambda_i^I, \lambda_j^I \rangle_t = \operatorname{Re}(\mathcal{O}_{ij}(t))dt, \\ -d\langle \lambda_i^R, \lambda_j^I \rangle_t &= d\langle \lambda_i^I, \lambda_j^R \rangle_t = \operatorname{Im}(\mathcal{O}_{ij}(t))dt \end{aligned}$$

である. Theorem 1 を用いて  $\lambda_i(t)$  の相互変分を計算することで, この固有ベクトルの overlap は以下のように具体的に得られる.

**Proposition 2.**

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{ii}(t) &= \frac{\sum_{k=1}^N \det \left( ((\lambda_i(t)I_N - G_N(t))(\lambda_i(t)I_N - G_N(t))^*)_{k|k} \right)}{\prod_{p(\neq i)} |\lambda_i(t) - \lambda_p(t)|^2}, \\ \mathcal{O}_{ij}(t) &= \frac{\sum_{k=1}^N \det \left( ((\lambda_i(t)I_N - G_N(t))(\lambda_j(t)I_N - G_N(t))^*)_{k|k} \right)}{\prod_{p(\neq i)} (\lambda_i(t) - \lambda_p(t)) \prod_{q(\neq j)} (\lambda_j(t) - \lambda_q(t))} \end{aligned}$$

これより固有値過程の 2 次変分, 相互変分にも固有値同士の相互作用が現れることがわかる. また  $\lambda_i^R(t)$  と  $\lambda_i^I(t)$  は同じ時間変更によって 1 次元ブラウン運動になり, 相互変分が 0 であるから Lévy の定理より次が従う.

**Proposition 3.** 各  $1 \leq i \leq N$  に対して

$$\tau_i(t) := \inf \left\{ u \geq 0; \int_0^u \mathcal{O}_{ii}(s)ds > t \right\}$$

とおくと,  $\hat{B}_i(t) := \lambda_i(\tau_i(t))$  は複素ブラウン運動である.

つまり固有値過程の経路は 2 次元ブラウン運動であるが, Theorem 1 の証明で用いる事実 (7 頁参照) から, 各固有値過程は決して衝突することなく動く. 直感的には  $N$  個の 2 次元ブラウン運動がそれぞれ  $\mathcal{O}_{ii}(t)$  を時間として動き, それによって固有値同士の相互作用が生まれると解釈できる. この「衝突しない」ことを見るために, 2 つの固有値過程の距離過程を定義すると, 次の結果を得る.

**Theorem 4.**  $i \neq j$  に対して距離過程  $Y_{ij}(t)$  を

$$Y_{ij}(t) := |\lambda_i(t) - \lambda_j(t)| = \sqrt{(\lambda_i^R(t) - \lambda_j^R(t))^2 + (\lambda_i^I(t) - \lambda_j^I(t))^2}$$

で定義すると,  $Y_{ij}$  は次の確率微分方程式を満たす;

$$dY_{ij}(t) = dM_{Y_{ij}}(t) + \frac{\mathcal{O}_{ii}(t) + \mathcal{O}_{jj}(t) - 2\text{Re}(\mathcal{O}_{ij}(t))}{2Y_{ij}(t)} dt \quad (3)$$

ここで  $M_{Y_{ij}}$  はマルチンゲールであって, その2次変分は

$$d\langle Y_{ij} \rangle_t = (\mathcal{O}_{ii}(t) + \mathcal{O}_{jj}(t) - 2\text{Re}(\mathcal{O}_{ij}(t))) dt.$$

となる. したがって

$$\tau_{ij}(t) := \inf\{u \geq 0; \langle Y_{ij} \rangle(u) > t\}$$

によって  $Y_{ij}(t)$  を時間変更すると,  $Z_{ij}(t) := Y_{ij}(\tau_{ij}(t))$  は2次元ベッセル過程である.

距離過程  $Y_{ij}(t)$  と固有ベクトルの overlap  $\mathcal{O}_{ij}(t)$  は互いに影響しているが, このことがよくわかる応用として行列サイズが  $N = 2$  の場合を考える. Grela, Warchol らによる数値実験 [7, Figure 4] によると,  $\mathcal{O}_{11}(t)$  と距離  $Y_{12}(t) = |\lambda_1(t) - \lambda_2(t)|$  について, 一方が大きくなると他方は小さくなることがわかる. この関係を明らかにしたい. まず Proposition 2 より

$$\mathcal{O}_{11}(t) = \frac{\|G_2(t)\|_2^2 - 2\text{Re}(\lambda_1(t)\overline{\lambda_2(t)})}{Y_{12}(t)^2} \quad (4)$$

と表せる. ただし  $\|G_2(t)\|_2^2 := \sum_{i,j=1}^2 |G_{ij}(t)|^2$  である.  $\|G_2(t)\|_2^2$  が8次元ベッセル過程であることに注意すると, 伊藤の公式から次の結果を得る.

**Corollary 5.**  $\mathcal{O}_{11}$  は次の確率微分方程式を満たす;

$$d\mathcal{O}_{11}(t) = dM_{\mathcal{O}_{11}}(t) + \frac{8\mathcal{O}_{11}(t)^2 - 8\mathcal{O}_{11}(t) + 4}{Y_{12}(t)^2} dt.$$

ここで  $M_{\mathcal{O}_{11}}$  はマルチンゲールであって

$$d\langle \mathcal{O}_{11} \rangle_t = \frac{8\mathcal{O}_{11}(t)(2\mathcal{O}_{11}(t) - 1)(\mathcal{O}_{11}(t) - 1)}{Y_{12}(t)^2} dt.$$

さらに  $\mathcal{O}_{11}$  と  $Y_{12}$  の相互変分について

$$d\langle \mathcal{O}_{11}, Y_{12} \rangle_t = \frac{-8\mathcal{O}_{11}(t)(\mathcal{O}_{11}(t) - 1)}{Y_{12}(t)} dt.$$

Cauchy-Schwarz の不等式から  $\mathcal{O}_{11}(t) \geq 1$  であり, 上の結果と合わせると  $d\langle \mathcal{O}_{11}, Y_{12} \rangle_t \leq 0$  を得る. これは先ほど述べた数値実験の結果を意味する.

## 4 主結果の証明

Theorem 1 の証明のスケッチ. 証明の主なアイデアは, 陰関数定理を用いて行列成分に関する微分を計算し, 伊藤の公式を使うことである. まず変数  $x_{kl}, y_{kl}, 1 \leq k, l \leq N$  を成分にもつ行列と変数  $\lambda$  を

$$G_N = (G_{kl})_{1 \leq k, l \leq N}, \quad G_{kl} = x_{kl} + \sqrt{-1}y_{kl}, \quad \lambda = \lambda^R + \sqrt{-1}\lambda^I$$

とおく.  $G_N$  は単純であると仮定し, その固有値を  $\lambda_i, 1 \leq i \leq N$  とする. また  $f: \mathbb{C}^{N^2+1} \rightarrow \mathbb{C}$  を  $G_N$  の固有変数と定める;

$$f(\lambda^R, \lambda^I) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda^R, \lambda^I) := \det(\lambda I_N - G).$$

ここで  $\mathbf{x} := (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{NN})$ ,  $\mathbf{y} := (y_{11}, y_{12}, \dots, y_{NN})$  である.  $f = f^R + \sqrt{-1}f^I$  と表すことにする. このとき  $f$  は  $\lambda$  に関する正則関数であって,  $G_N$  は単純であるから

$$f\lambda(\lambda_i) = \prod_{j(\neq i)} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$$

が成り立つ. ここで固有値の定義より各  $1 \leq i \leq N$  に対して  $f(\lambda_i^R, \lambda_i^I) = \det(\lambda_i I_N - G) = 0$  である. よって  $\lambda_i$  を関数  $f$  の陰関数とみなすことで  $\lambda_i$  は  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  の関数であって

$$f(\lambda_i^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \lambda_i^I(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 0$$

を満たし, 変数  $x_{kl}, y_{kl}$  に関する  $\lambda_i^R$  と  $\lambda_i^I$  の偏微分は  $f^R, f^I$  の偏微分を用いて表される. 実際に計算すると変数  $\alpha = x_{kl}, y_{kl}$  に関して

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_i^R}{\partial \alpha} &= -\frac{f_R^R(\lambda_i^R, \lambda_i^I) f_\alpha^R(\lambda_i^R, \lambda_i^I) + f_R^I(\lambda_i^R, \lambda_i^I) f_\alpha^I(\lambda_i^R, \lambda_i^I)}{f_R^R(\lambda_i^R, \lambda_i^I)^2 + f_R^I(\lambda_i^R, \lambda_i^I)^2}, \\ \frac{\partial \lambda_i^I}{\partial \alpha} &= -\frac{-f_R^I(\lambda_i^R, \lambda_i^I) f_\alpha^R(\lambda_i^R, \lambda_i^I) + f_R^R(\lambda_i^R, \lambda_i^I) f_\alpha^I(\lambda_i^R, \lambda_i^I)}{f_R^R(\lambda_i^R, \lambda_i^I)^2 + f_R^I(\lambda_i^R, \lambda_i^I)^2} \end{aligned}$$

となる. ただし  $f_\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha} f$ ,  $f_{\lambda_r}^R := f_{\lambda_r}^R$ ,  $f_{\lambda_r}^I := f_{\lambda_r}^I$  である. これらをさらに微分して  $\lambda_i^R$  のラプラシアンを計算すると,  $(\lambda_i^R, \lambda_i^I)$  を省略して

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_i^R &= -\frac{1}{(f_R^R)^2 + (f_R^I)^2} \\ &\times \left\{ \begin{aligned} &f_R^R \Delta f^R + f_R^I \Delta f^I + 2 \nabla \lambda_i^R \cdot \nabla \lambda_i^R (f_{R,R}^R f_R^R + f_{R,R}^I f_R^I) + 2 \nabla \lambda_i^R \cdot \nabla \lambda_i^I (f_{R,R}^R f_R^I - f_{R,R}^I f_R^R) \\ &\frac{2((f_R^R)^2 - (f_R^I)^2) (\nabla f_R^R \cdot \nabla f^R - \nabla f_R^I \cdot \nabla f^I) + 4 f_R^R f_R^I (\nabla f_R^R \cdot \nabla f^I + \nabla f_R^I \cdot \nabla f^R)}{(f_R^R)^2 + (f_R^I)^2} \\ &\frac{(f_{R,R}^R f_R^R + f_{R,R}^I f_R^I) (\nabla f^R \cdot \nabla f^R + \nabla f^I \cdot \nabla f^I)}{(f_R^R)^2 + (f_R^I)^2} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

となる. ここで固有多項式  $f = f^R + \sqrt{-1}f^I$  は成分  $x_{kl}, y_{kl}$  について 1 次なので

$$\Delta f^R = \Delta f^I = 0$$

であり, さらに  $f$  は変数  $x_{kl} + \sqrt{-1}y_{kl}$  に関して正則なので Cauchy-Riemann の関係式から任意の  $\lambda \in \mathbb{C}$  に対して

$$f_{x_{kl}}^R = -(-1)^{k+l} \operatorname{Re} |\lambda I_{N,k|l} - G_{k|l}| = f_{y_{kl}}^I, \quad f_{x_{kl}}^I = -(-1)^{k+l} \operatorname{Im} |\lambda I_{N,k|l} - G_{k|l}| = -f_{y_{kl}}^R$$

が成り立つ. これより

$$\nabla f^R \cdot \nabla f^R = \nabla f^I \cdot \nabla f^I = \sum_{k,l} \left\{ (\operatorname{Re} |\lambda I_{N,k|l} - G_{k|l}|)^2 + (\operatorname{Im} |\lambda I_{N,k|l} - G_{k|l}|)^2 \right\} = \sum_{k,l} |\det(\lambda I_{N,k|l} - G_{k|l})|^2,$$

$$\nabla f^R \cdot \nabla f^I = \sum_{k,l} (f_{x_{kl}}^R f_{x_{kl}}^I + f_{y_{kl}}^R f_{y_{kl}}^I) = 0,$$

$$\nabla f_R^R \cdot \nabla f^R = \sum_{k,l} (f_{R,x_{kl}}^R f_{x_{kl}}^R + f_{R,y_{kl}}^R f_{y_{kl}}^R) = \sum_{k,l} (f_{R,y_{kl}}^I f_{y_{kl}}^I + f_{R,x_{kl}}^I f_{x_{kl}}^I) = \nabla f_R^I \cdot \nabla f^I,$$

$$\nabla f_R^R \cdot \nabla f^I = \sum_{k,l} (f_{R,x_{kl}}^R f_{x_{kl}}^I + f_{R,y_{kl}}^R f_{y_{kl}}^I) = \sum_{k,l} (-f_{R,y_{kl}}^I f_{y_{kl}}^R - f_{R,x_{kl}}^I f_{x_{kl}}^R) = -\nabla f_R^I \cdot \nabla f^R$$

を得る. これらの関係式を  $\Delta \lambda_i^R$  の右辺に用いると

$$\Delta \lambda_i^R = 0$$

となる. また同様にすると  $\Delta \lambda_i^I = 0$  がわかる. このようにして得られた関数  $\lambda_i^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \lambda_i^I(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  に  $\mathbf{x} = (B_{11}^R(t), B_{12}^R(t), \dots, B_{NN}^R(t)), \mathbf{y} = (B_{11}^I(t), B_{12}^I(t), \dots, B_{NN}^I(t))$  として伊藤の公式を適用する. しかし上の計算結果は  $G_N(t)$  が単純でなければ成立しないため, 次の事実を用いる;

$$\tau := \inf\{t \geq 0 \mid \exists i \neq j, \lambda_i(t) = \lambda_j(t)\}$$

とおくと,  $\tau = \infty$ , a.s.[3] である. よって確率 1 で上の微分に対して伊藤の公式が適用でき, ラプラスian が 0 であることから固有値過程はマルチンゲールとなる. また  $\lambda_i^R$  と  $\lambda_i^I$  の 1 階導関数の分母について

$$f_R^R(\lambda_i^R, \lambda_i^I)^2 + f_R^I(\lambda_i^R, \lambda_i^I)^2 = |f_\lambda(\lambda_i)|^2 = \prod_{j(\neq i)} |\lambda_i - \lambda_j|^2$$

であることに注意して  $d\lambda_i(t) = d\lambda_i^R(t) + \sqrt{-1}d\lambda_i^I(t)$  を計算すると分母に  $i$  番目以外の固有値が現れ, Theorem 1 が得られる.  $\square$

**Remark.** 上の証明で用いた方法は Dyson モデル ( $\beta = 2$ ) でも同様に適用できる. エルミート行列値過程  $H_N(t) = (h_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$  を

$$h_{ij}(t) := \begin{cases} B_{ij}^R(t) & i = j \\ \frac{B_{ij}^R(t) + \sqrt{-1}B_{ij}^I(t)}{\sqrt{2}} & i < j \\ h_{ji}(t) & i > j \end{cases}, t > 0$$

と定義し,  $H_N(t)$  の  $N$  個の実固有値  $\lambda_1(t) \geq \dots \geq \lambda_N(t)$  に対して陰関数定理を用いると, エルミート行列の対称性から

$$\frac{1}{2}\Delta \lambda_i = \sum_{j(\neq i)} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad \nabla \lambda_i \cdot \nabla \lambda_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

となり, 伊藤の公式と Lévy の定理から実固有値過程  $\boldsymbol{\lambda}(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t))$  は (1) を満たすことが分かる.

Corollary 5 の証明. まず  $N = 2$  のとき Proposition 2 から (4) となること, つまり

$$\mathcal{O}_{11}(t) = \frac{\sum_{k=1}^2 \det \left( ((\lambda_1(t)I_2 - G_2(t))(\lambda_1(t)I_2 - G_2(t))^*)_{k|k} \right)}{\prod_{p(\neq 1)} |\lambda_i(t) - \lambda_p(t)|^2} = \frac{\|G(t)\|_2^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda_1(t)\bar{\lambda}_2(t))}{Y_{12}(t)^2}$$

となることを示す. 右辺の行列式を計算する.

$$\lambda_1(t)I_2 - G_2(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) - B_{11}(t) & -B_{12}(t) \\ -B_{21}(t) & \lambda_1(t) - B_{22}(t) \end{bmatrix}$$

であるから

$$(\lambda_1(t)I_2 - G_2(t))(\lambda_1(t)I_2 - G_2(t))^* = \begin{bmatrix} |\lambda_1(t) - B_{11}(t)|^2 + |B_{12}(t)|^2 & * \\ * & |B_{21}(t)|^2 + |\lambda_1(t) - B_{22}(t)|^2 \end{bmatrix}.$$

この行列の主小行列式を計算するが, いまの場合小行列はスカラーになるので

$$\begin{aligned} \det \left( ((\lambda_1(t)I_2 - G_2(t))(\lambda_1(t)I_2 - G_2(t))^*)_{1|1} \right) &= |B_{21}(t)|^2 + |\lambda_1(t) - B_{22}(t)|^2, \\ \det \left( ((\lambda_1(t)I_2 - G_2(t))(\lambda_1(t)I_2 - G_2(t))^*)_{2|2} \right) &= |\lambda_1(t) - B_{11}(t)|^2 + |B_{12}(t)|^2 \end{aligned}$$

である. よって

$$\sum_{k=1}^2 \det \left( ((\lambda_1(t)I_2 - G_2(t))(\lambda_1(t)I_2 - G_2(t))^*)_{k|k} \right) = |B_{21}(t)|^2 + |\lambda_1(t) - B_{22}(t)|^2 + |\lambda_1(t) - B_{11}(t)|^2 + |B_{12}(t)|^2$$

$$= 2|\lambda_1(t)|^2 - \lambda_1(t)(\overline{B_{11}}(t) + \overline{B_{22}}(t)) - \overline{\lambda_1}(t)(B_{11}(t) + B_{22}(t)) + \|G_2(t)\|_2^2$$

とまとめられるが,  $G_2(t)$  のトレースの性質

$$\lambda_1(t) + \lambda_2(t) = B_{11}(t) + B_{22}(t)$$

を用いることで

$$(上式) = \|G_2(t)\|_2^2 - \lambda_1(t)\overline{\lambda_2}(t) - \overline{\lambda_1}(t)\lambda_2(t)$$

となる. また定義から  $Y_{12}(t)^2 = |\lambda_1(t) - \lambda_2(t)|^2$  であるから (4) が成り立つ.

次に伊藤の公式を用いて  $\mathcal{O}_{11}(t)$  の確率微分方程式を導く. (4) の分子は  $\|G_2(t)\|_2^2 = \sum_{i,j=1}^2 |G_{ij}(t)|^2$  より

$$\begin{aligned} d(\|G_2\|_2^2 - \lambda_1\overline{\lambda_2} - \overline{\lambda_1}\lambda_2)(t) &= \sum_{k,l=1}^2 (B_{kl}(t)d\overline{B_{kl}}(t) + \overline{B_{kl}}(t)dB_{kl}(t)) + 8dt - \overline{\lambda_2}(t)d\lambda_1(t) - \lambda_1(t)d\overline{\lambda_2}(t) - d\langle\lambda_1, \overline{\lambda_2}\rangle_t \\ &\quad - \lambda_2(t)d\overline{\lambda_1}(t) - \overline{\lambda_1}(t)d\lambda_2(t) - d\langle\lambda_2, \overline{\lambda_1}\rangle_t. \end{aligned}$$

ここで  $d\langle\lambda_i, \overline{\lambda_j}\rangle_t = 2\mathcal{O}_{ij}(t)dt$  であることと (2) より

$$\mathcal{O}_{11}(t) + \mathcal{O}_{12}(t) = 1, \quad \mathcal{O}_{11}(t) = \mathcal{O}_{22}(t), \quad \mathcal{O}_{12}(t) = \mathcal{O}_{21}(t)$$

である (一般に  $N \geq 3$  のとき  $\mathcal{O}_{ij}$  は複素数値過程であることに注意). これより

$$\begin{aligned} d(\|G_2\|_2^2 - \lambda_1\overline{\lambda_2} - \overline{\lambda_1}\lambda_2)(t) &= \sum_{k,l=1}^2 (B_{kl}(t)d\overline{B_{kl}}(t) + \overline{B_{kl}}(t)dB_{kl}(t)) + 8dt \\ &\quad - \overline{\lambda_2}(t)d\lambda_1(t) - \lambda_1(t)d\overline{\lambda_2}(t) - \lambda_2(t)d\overline{\lambda_1}(t) - \overline{\lambda_1}(t)d\lambda_2(t) - 4(1 - \mathcal{O}_{11}(t))dt \\ &= \sum_{k,l=1}^2 (B_{kl}(t)d\overline{B_{kl}}(t) + \overline{B_{kl}}(t)dB_{kl}(t)) + 4(1 + \mathcal{O}_{11}(t))dt \\ &\quad - \overline{\lambda_2}(t)d\lambda_1(t) - \lambda_1(t)d\overline{\lambda_2}(t) - \lambda_2(t)d\overline{\lambda_1}(t) - \overline{\lambda_1}(t)d\lambda_2(t) \end{aligned}$$

となる. 一方で (4) の分母は

$$\begin{aligned} dY_{12}^2(t) &= (\overline{\lambda_1}(t) - \overline{\lambda_2}(t))d\lambda_1(t) + (\lambda_1(t) - \lambda_2(t))d\overline{\lambda_1}(t) - (\overline{\lambda_1}(t) - \overline{\lambda_2}(t))d\lambda_2(t) - (\lambda_1(t) - \lambda_2(t))d\overline{\lambda_2}(t) \\ &\quad + 4(1 + 2\mathcal{O}_{11}(t))dt \end{aligned}$$

となるので再び伊藤の公式より

$$\begin{aligned} d\mathcal{O}_{11}(t) &= \frac{d(\|G_2\|_2^2 - \lambda_1\overline{\lambda_2} - \overline{\lambda_1}\lambda_2)(t)}{Y_{12}(t)^2} - \frac{\mathcal{O}_{11}(t)}{Y_{12}(t)^2}dY_{12}^2(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{2\mathcal{O}_{11}(t)}{Y_{12}(t)^4}d\langle Y_{12}^2 \rangle_t - \frac{2}{Y_{12}(t)^4}d(\|G_2\|_2^2 - \lambda_1\overline{\lambda_2} - \overline{\lambda_1}\lambda_2, Y_{12}^2)_t \right) \end{aligned}$$

となる. 相互変分を計算すると Theorem 1 から

$$\begin{aligned} d\langle Y_{12}^2 \rangle_t &= 2(2|\lambda_1(t) - \lambda_2(t)|^2\mathcal{O}_{11}(t) - 2|\lambda_1(t) - \lambda_2(t)|^2\mathcal{O}_{12}(t))dt \\ &= 8Y_{12}(t)^2(2\mathcal{O}_{11}(t) - 1)dt, \end{aligned}$$

$$\left\langle \sum_{k,l=1}^2 (B_{kl}d\overline{B_{kl}} + \overline{B_{kl}}dB_{kl}), d\lambda_1 \right\rangle_t$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{2dt}{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)} \left\{ (\lambda_1(t) - B_{22}(t))B_{11}(t) + B_{21}(t)B_{12}(t) + B_{12}(t)B_{21}(t) + (\lambda_1(t) - B_{11}(t))B_{22}(t) \right\} \\
&= \frac{2dt}{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)} \left\{ (B_{11}(t) + B_{22}(t))\lambda_1(t) - 2(B_{11}(t)B_{22}(t) - B_{12}(t)B_{21}(t)) \right\} \\
&= \frac{2dt}{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)} \left\{ (\lambda_1(t) + \lambda_2(t))\lambda_1(t) - 2\lambda_1(t)\lambda_2(t) \right\} = 2\lambda_1(t)dt
\end{aligned}$$

が得られる。ここで3つ目の等式は  $B_{11}(t)B_{22}(t) - B_{12}(t)B_{21}(t) = \det G_2(t) = \lambda_1(t)\lambda_2(t)$  を用いた。同様にして

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{k,l=1}^2 (B_{kl}d\overline{B_{kl}} + \overline{B_{kl}}dB_{kl}), d\lambda_2 \right\rangle_t &= 2\lambda_2(t)dt, \\
\left\langle \sum_{k,l=1}^2 (B_{kl}d\overline{B_{kl}} + \overline{B_{kl}}dB_{kl}), d\overline{\lambda_1} \right\rangle_t &= 2\overline{\lambda_1}(t)dt, \\
\left\langle \sum_{k,l=1}^2 (B_{kl}d\overline{B_{kl}} + \overline{B_{kl}}dB_{kl}), d\overline{\lambda_2} \right\rangle_t &= 2\overline{\lambda_2}(t)dt
\end{aligned}$$

となる。これから

$$d(\|G_2\|_2^2 - \lambda_1\overline{\lambda_2} - \overline{\lambda_1}\lambda_2, Y_{12}^2)_t = 8\mathcal{O}_{11}Y_{12}(t)^2 dt$$

がわかり、整理すると

$$\begin{aligned}
&d\mathcal{O}_{11}(t) \\
&= \frac{1}{Y_{12}(t)^2} \left\{ \sum_{k,l=1}^2 (B_{kl}(t)d\overline{B_{kl}}(t) + \overline{B_{kl}}(t)dB_{kl}(t)) - \overline{\lambda_2}(t)d\lambda_1(t) - \lambda_1(t)d\overline{\lambda_2}(t) - \lambda_2(t)d\overline{\lambda_1}(t) - \overline{\lambda_1}(t)d\lambda_2(t) \right. \\
&\quad \left. - \mathcal{O}_{11}(t)((\overline{\lambda_1}(t) - \overline{\lambda_2}(t))d\lambda_1(t) + (\lambda_1(t) - \lambda_2(t))d\overline{\lambda_1}(t) - (\overline{\lambda_1}(t) - \overline{\lambda_2}(t))d\lambda_2(t) - (\lambda_1(t) - \lambda_2(t))d\overline{\lambda_2}(t)) \right\} \\
&\quad + \frac{8\mathcal{O}_{11}^2 - 8\mathcal{O}_{11} + 4}{Y_{12}(t)^2} dt
\end{aligned}$$

が得られる。第1項は Corollary 5 のマルチンゲール  $dM_{\mathcal{O}_{11}}(t)$  である。

最後に  $d(\mathcal{O}_{11}, Y_{12})_t$  を計算する。まず  $Y_{12}(t)$  について

$$\begin{aligned}
dY_{12}(t) &= \frac{(\overline{\lambda_1}(t) - \overline{\lambda_2}(t))d\lambda_1(t) + (\lambda_1(t) - \lambda_2(t))d\overline{\lambda_1}(t) - (\overline{\lambda_1}(t) - \overline{\lambda_2}(t))d\lambda_2(t) - (\lambda_1(t) - \lambda_2(t))d\overline{\lambda_2}(t)}{2Y_{12}(t)} \\
&\quad + \frac{2\mathcal{O}_{11}(t) - 1}{Y_{12}(t)} dt
\end{aligned}$$

が成り立つので、上で求めた相互変分を用いて

$$\begin{aligned}
&d(\mathcal{O}_{11}, Y_{12})_t \\
&= \frac{dt}{2Y_{12}(t)^3} \left\{ \begin{aligned} &2\lambda_1(t)(\overline{\lambda_1}(t) - \overline{\lambda_2}(t)) + 2\overline{\lambda_1}(t)(\lambda_1(t) - \lambda_2(t)) - 2\lambda_2(t)(\overline{\lambda_1}(t) - \overline{\lambda_2}(t)) - 2\overline{\lambda_2}(t)(\lambda_1(t) - \lambda_2(t)) \\ &+ (-\overline{\lambda_1}(t) + \mathcal{O}_{11}(\overline{\lambda_1}(t) - \overline{\lambda_2}(t))) (\lambda_1(t) - \lambda_2(t)) (2\mathcal{O}_{12}(t) - 2\mathcal{O}_{11}(t)) \\ &+ (-\lambda_2(t) - \mathcal{O}_{11}(\lambda_1(t) - \lambda_2(t))) (\overline{\lambda_1}(t) - \overline{\lambda_2}(t)) (2\mathcal{O}_{11}(t) - 2\mathcal{O}_{12}(t)) \\ &+ (-\lambda_1(t) + \mathcal{O}_{11}(\lambda_1(t) - \lambda_2(t))) (\overline{\lambda_1}(t) - \overline{\lambda_2}(t)) (2\mathcal{O}_{12}(t) - 2\mathcal{O}_{11}(t)) \\ &+ (-\overline{\lambda_2}(t) - \mathcal{O}_{11}(\overline{\lambda_1}(t) - \overline{\lambda_2}(t))) (\overline{\lambda_1}(t) - \overline{\lambda_2}(t)) (2\mathcal{O}_{11}(t) - 2\mathcal{O}_{12}(t)) \end{aligned} \right\} \\
&= \frac{dt}{2Y_{12}(t)^3} \left\{ 4Y_{12}(t)^2 + (4\mathcal{O}_{11}(t) - 2)(2Y_{12}(t)^2 - 4\mathcal{O}_{11}(t)Y_{12}(t)^2) \right\} \\
&= \frac{-8\mathcal{O}_{11}(t)(\mathcal{O}_{11}(t) - 1)}{Y_{12}(t)} dt
\end{aligned}$$

を得る。 □

## 参考文献

- [1] M. L. Mehta, *Random Matrices*, 3rd edition, Academic Press (2004).
- [2] J.Grela, P.Warchol, Full Dysonian dynamics of the complex Ginibre ensemble, *J. Phys. A: Math. Theor.* Vol.51, Num.425203(2018)
- [3] P. Bourgade, G. Dubach, The distribution of overlaps between eigenvectors of Ginibre matrices, arXiv:1801.01219v1 (2018)
- [4] F. J. Dyson, A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix, *J. Math. Phys.*, Vol. 3, 1192-1198 (1962)
- [5] G. W. Anderson, A. Guionnet, O. Zeitouni, *An Introduction to Random Matrices*, Cambridge University Press (2005)
- [6] J. Ginibre, Statistical ensembles of complex, quaternion, and real matrices, *Journal of Mathematical Physics*, 6, 440 (1965)
- [7] J.-P.Blaizot, J.Grela, M.A.Nowak, W.Tarnowski, P.Warchol, Ornstein-Uhlenbeck diffusion of hermitian and non-hermitian matrices-unexpected links, *J.Stat.Mech.*Vol.2016,May,054037(2016)
- [8] J. T. Chalker and B. Mehlig, Eigenvector statistics in non-Hermitian random matrix ensembles, *Phys. Rev. Lett.* 81,no. 16, 3367-3370 (1998)
- [9] M. F. Bru, Diffusions of perturbed principal component analysis, *J. Multivariate Anal.*, 29, 127-136(1989)