Algebraic structures for mean

茨城大学工学部　阿部敏一

Toshikazu Abe

College of Engineering,
Ibaraki University University

1 abstract

正の実数全体を $\mathbb{R}_+$，$n \times n$ 正定値行列全体を $\mathbb{P}_n$ で表すことにする．ここでいう正定置行列は可逆なものだけを考えているとする．特に，$\mathbb{P}_1 = \mathbb{R}_+$ である．$\mathbb{P}_n$ 上の二項演算のうち，いくつかの条件を満たすものを mean と呼ぶ．代表的なものとして算術平均 $A(a,b) = \dfrac{a+b}{2}$ があるが，これは演算 $a \oplus_A b = a + b$ における自然な意味での代数的中点であると考えることが出来る．本稿では，他の様々な mean が，どのような演算の代数的中点とみなす事が出来るかを考察する．

2 正定値行列

$n \times n$ 行列全体を $M_n(\mathbb{C})$ で表す．$A \in M_n(\mathbb{C})$ が**半正定値行列**であるとは，自己随伴であり，かつ任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して，$\boldsymbol{x}^* A \boldsymbol{x} \geq 0$ が成立することをいう．A が半正定値であることを $A \geq O$ で表す．半正定値行列のうち可逆なものを特に**正定値行列**といい，A が正定値行列であることを $A > O$ で表す．正定値行列全体 $\mathbb{P}_n$ は和やスカラー積について閉じていないため，線形空間としての部分空間にはならないが，凸錐であることが知られている．また，$A \geq B \iff A - B \geq O$ によって $\geq$ は $\mathbb{P}_n$ 上の半順序を定める．

3 可換群・可換半群・ジャイロ可換ジャイロ群

二項演算 $\oplus : S \times S \to S;\ (a,b) \mapsto a \oplus b$ が定義された空でない集合 $(S, \oplus)$ を **magma** という．Magma $(S, \oplus)$ からそれ自身への全単射 $\varphi : S \to S$ で二項演算 $\oplus$ を保存するもの，すなわち $\varphi(x \oplus y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y)$ が成立するものを magma $(S, \oplus)$ の**自己同型写像**という．ここで、magma $(S, \oplus)$ の自己同型写像全体の集合を $\mathrm{Aut}(S, \oplus)$ で表すことにする．

Magma $(S, \oplus)$ の元 $e \in S$ が，任意の $a \in S$ に対して，$e \oplus a = a \oplus e = a$ を満たすとき，e を $(S, \oplus)$ の**単位元**という．Magma がいつでも単位元を持つとは限らないが，単位元が存在する magma を **groupoid** と呼ぶ．$(S, \oplus)$ が単位元 $e \in S$ を持つ groupoid であるとき，$x \in S$ に対して $x \oplus y = y \oplus x = e$ となる $y \in S$ が存在すれば，それを x の**逆元**といい，$y = \ominus x$ で表すことにする．一般に，groupoid においても各元 x に対して逆元は存在するかわからないし，存在しても x に対して一意であるとは限らない．

Definition 1. Magma $(X, \oplus)$ が次の公理 (a1) から (a4) を満たすとき，$(X, \oplus)$ は**可換群**であるという．

(a1) 単位元を持つ．

(a2) 全ての $x \in X$ に対して，逆元が存在する．

(a3) 結合法則を満たす．

(a4) 可換である．

Definition 2. Magma $(X, \oplus)$ が次の公理 (b1) から (a2) を満たすとき，$(X, \oplus)$ は**可換半群**であるという．

(b1) 結合法則を満たす．

(b2) 可換である．

Definition 3. Magma $(X, \oplus)$ が**ジャイロ可換ジャイロ群**であるとは，以下の公理 (c1) から (c6) を満たす場合をいう．

(c1) 単位元 e を持つ．

(c2) 全ての $x \in X$ に対して，逆元が存在する．

(c3) 任意の $a, b, c \in X$ に対して，$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus d$ となる $d \in X$ がユニークに存在する．この d を $d = \mathrm{gyr}[a, b]c$ で表す．

(c4) 任意の $a, b \in X$ に対して，c に $\mathrm{gyr}[a, b]c$ を対応させる写像 $\mathrm{gyr}[a, b] : X \to X$ は自己同型写像である．すなわち，$\mathrm{gyr}[a, b] \in \mathrm{Aut}(X, \oplus)$.

(c5) 任意の $a, b \in X$ に対して，$\mathrm{gyr}[a \oplus b, b] = \mathrm{gyr}[a, b]$.

(c6) 任意の $a, b \in X$ に対して，$a \oplus b = \mathrm{gyr}[a, b](b \oplus a)$.

ジャイロ可換ジャイロ群，および可換半群はともに可換群の一般化である．可換半群は可換群の結合法則をそのままに，単位元と逆元の存在を弱めたものである．一方，ジャイロ可換ジャイロ群は単位元と逆元の存在はそのままに，結合法則と可換則に関する公理をより弱い公理に置き換えたものである．したがって，可換群からみて，それぞれ別方向への一般化を図ったものである．ジャイロ可換ジャイロ群は **K-loop** とも呼ばれる．

Definition 4. ジャイロ群 $(X, \oplus)$ に対して，新たな二項演算 $\boxplus : X \times X \to X$ を

$$a \boxplus b = a \oplus \mathrm{gyr}[a, \ominus b]b$$

で定義する．この二項演算 $\boxplus$ を $(G, \oplus)$ の **coaddition** という．

ジャイロ可換ジャイロ群について調べる上で，上のようにジャイロ群の演算から定義される新たな二項演算を考えると便利である．二つの演算 $\oplus$ と $\boxplus$ は群の場合には一致し，結合法則が成立する場合には区別する必要のなかったものである．このもう一つの演算 $\boxplus$ は可換であることが確認できる．

4 Uniquely 2-divisible と代数的中点

Definition 5. $(X, \oplus)$ を magma とする．任意の $x \in X$ に対して，$y \oplus y = x$ となる $y \in X$ がユニークに存在するとき，$(X, \oplus)$ は **uniquely 2- divisible** であるという．またこのとき，$y = \frac{1}{2} \otimes x$ と表すことにする．

Definition 6. $(X, \oplus)$ を uniequly 2-divisible な可換群とする．このとき，$a, b \in X$ に対して，$\frac{1}{2} \otimes (a \oplus b)$ を**可換群としての代数的中点**と呼ぶことにする．

Definition 7. $(X, \oplus)$ を uniequly 2-divisible な可換半群とする．このとき，$a, b \in X$ に対して，$\frac{1}{2} \otimes (a \oplus b)$ を**可換半群としての代数的中点**と呼ぶことにする．

Definition 8. $(X, \oplus)$ を uniequly 2-divisible なジャイロ可換ジャイロ群とする．このとき，$a, b \in X$ に対して，$\frac{1}{2} \otimes (a \boxplus b)$ を**ジャイロ可換ジャイロ群としての代数的中点**と呼ぶことにする．

上記のように定義された代数的中点は中点と呼ぶにふさわしい性質を持っていることがわかる．特にジャイロ可換ジャイロ群の場合については [3] を参照されたい．可換群は可換半群でもあり，ジャイロ可換ジャイロ群でもある．この場合，三種の代数的中点は全て同じものであることが容易に確認できる．以降，この三種の代数的中点を区別せず，単に**代数的中点**と呼ぶことにする．

5 線形空間とその類似品における中点

実線形空間 X の和を $\oplus$，スカラー積を $\otimes$ で表すことにする．このとき，$(X, \oplus)$ は uniquely 2-divisible な可換群であり，その意味での $\frac{1}{2} \otimes x$ と，スカラー積の意味での $\frac{1}{2} \otimes x$ は一致するため，線形空間においてはこれらを区別しないことにする．$a, b \in X$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して，$L[a, b](t) = a \oplus t \otimes (\ominus a \oplus b)$ とする．線形空間の性質より，$L[a, b](t) = (1-t) \otimes a \oplus t \otimes b$ としても同じである．$L[a, b](\mathbb{R})$ は a と b を通る直線を表し，$L[a, b]([0, 1])$ は a と b を端点とする線分である．$L[a, b](\frac{1}{2}) = a \oplus \frac{1}{2} \otimes (\ominus a \oplus b) = \frac{1}{2} \otimes (a \oplus b)$ は a と b の線形空間としての中点であり，これは可換群としての中点と同じものである．

実線形空間の概念をジャイロ可換ジャイロ群に対して一般化したものが以下である．

Definition 9. $(X, \oplus)$ をジャイロ可換ジャイロ群とし，写像 $\otimes : \mathbb{R} \times X \to X$ が定義されているとする．以下の公理 (GL1) から (GL5) を満たすとき，$(X, \oplus, \otimes)$ を**ジャイロ線型空間**と呼ぶ．

(GL1) 任意の $a \in X$ に対して，$1 \otimes a = a$.

(GL2) 任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ と $a \in X$ に対して，$(\lambda + \mu) \otimes a = (\lambda \otimes a) \oplus (\mu \otimes a)$.

(GL3) 任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ と $a \in X$ に対して，$(\lambda\mu) \otimes a = \lambda \otimes (\mu \otimes a)$.

(GL4) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ と $u, v, a \in X$ に対して，$\mathrm{gyr}[u, v](\lambda \otimes a) = \lambda \otimes \mathrm{gyr}[u, v]a$.

(GL5) 任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ と $u \in X$ に対して，$\mathrm{gyr}[\lambda \otimes u, \mu \otimes u] = id_X$.

ジャイロ線形空間の構造を持つ対象として代表的なのものは,「特殊相対論における速度全体」や「ポアンカレ円板」である．特にこれらの対象は “線形空間モドキ” としての構造だけでなく，より豊富な構造 “内積空間モドキ” としての構造を持っており，その構造がこれらの持つ双曲幾何構造と非常に相性のよいものであることがわかっている（[3]）.

Definition 10. $(X, \oplus, \otimes, \phi)$ をジャイロ線形空間とする．$a, b \in X$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$L[a,b](t) := a \oplus t \otimes (\ominus a \oplus b)$$

とする．像 $L[a,b](\mathbb{R})$ を a と b を結ぶ gyroline，像 $L[a,b]([0,1])$ を gyrosegment ab，点 $L[a,b](\frac{1}{2})$ を a と b の gyromidpoint とよぶ.

ジャイロ線形空間の構造を持つ「特殊相対論における速度全体」や「ポアンカレ円板」においては，gyroline や gyrosegment がちょうど測地線に対応しており，gyromidpoint は測地線の中心であることがわかっている.

ジャイロ線形空間 $(X, \oplus, \otimes)$ に対して，$(X, \oplus)$ は uniquely 2-divisible なジャイロ可換ジャイロ群であり，ジャイロ線形空間としての gyromidpoint とジャイロ可換ジャイロ群としての代数的中点は一致することが知られている．以降，gyromidpoint を**ジャイロ線形空間としての代数的中点**と呼ぶ.

可換半群に対して，実線形空間の概念を一般化する.

Definition 11. $(X, \oplus)$ を可換半群とし，写像 $\otimes : \mathbb{R}_+ \times X \to X$ が定義されているとする．本稿の中では，以下の公理 (SL1) から (SL4) を満たすとき，$(X, \oplus, \otimes)$ を**半線型空間**と呼ぶことにする.

(SL1) 任意の $a \in X$ に対して，$1 \otimes a = a$.

(SL2) 任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ と $a \in X$ に対して，$(\lambda + \mu) \otimes a = (\lambda \otimes a) \oplus (\mu \otimes a)$.

(SL3) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}_+$ と $a, b \in X$ に対して，$\lambda \otimes (a \oplus b) = \lambda \otimes a \oplus \lambda b$.

(SL4) 任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ と $a \in X$ に対して，$(\lambda\mu) \otimes a = \lambda \otimes (\mu \otimes a)$.

通常の線形空間との違いは，和が半群であることとスカラー積を正の実数でしか考えていないところである．通常の線形空間ももともとの演算で（スカラー積の範囲を制限すれば）半線型空間とみなす事が出来る.

Example 12. S を線型空間 $\mathbb{V}$ の凸錐とする．S は $\mathbb{V}$ の線形空間としての演算により半線形空間である.

半線形空間 $(X, \oplus, \otimes)$ に対して，$(X, \oplus)$ は uniquely 2-divisible な可換半群であり，$(X, \oplus)$ の意味での $\frac{1}{2} \otimes x$ と $(X, \oplus, \otimes)$ の意味での $\frac{1}{2} \otimes x$ は一致する．半線形空間において，可換半群としての中点 $\frac{1}{2} \otimes (a \oplus b)$ を**半線形空間としての中点**と呼ぶことにする.

6 Mean と代数構造

Definition 13. $M : \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$，$(a, b) \mapsto M(a, b)$ が次の条件 (M1) から (M5) を満たすとき，M を $\mathbb{P}_n$ 上の mean であるという．

(M1) 任意の $a, b \in \mathbb{P}_n$ に対して，「$a \leq b \Rightarrow a \leq M(a, b) \leq b$」．

(M2) 任意の $a, b \in \mathbb{P}_n$ に対して，$M(a, b) = M(b, a)$．

(M3) 二変数写像 $M(x, y)$ は各変数について単調増加．

(M4) 二変数写像 $M(x, y)$ は各変数について連続．

(M5) 任意の $a, b \in \mathbb{P}_n$ と n 次正則行列 x に対して，$M(x^*ax, x^*bx) = x^*M(a, b)x$．

6.1 算術平均

$$A(a, b) = \frac{a + b}{2} \qquad (a, b \in \mathbb{P}_n)$$

とすると，A は $\mathbb{P}_n$ 上の mean であり，これを**算術平均**（**arithmetic mean**）とよぶ．

Example 14. $\mathbb{P}_n$ 上の二項演算 $\oplus_A$ を通常の和によって定める．すなわち，

$$a \oplus_A b = a + b \qquad (a, b \in \mathbb{P}_n)$$

とすると，$(\mathbb{P}_n, \oplus_A)$ は uniequly 2-divisible な可換半群である．ここで，$(\mathbb{P}_n, \oplus_A)$ の可換半群としての代数的中点は算術平均と一致する．すなわち，

$$\frac{1}{2} \otimes_A (a \oplus_A b) = \frac{a + b}{2} = A(a, b) \qquad (a, b \in \mathbb{P}_n).$$

Example 15. $(\mathbb{P}_n, \oplus_A, \otimes_A)$ を

$$\begin{aligned} a \oplus_A b &= a + b \qquad (a, b \in \mathbb{P}_n) \\ \lambda \otimes_A a &= \lambda a \qquad (\lambda \in \mathbb{R}_+,\ a \in \mathbb{P}_n) \end{aligned}$$

によって定めれば，$(\mathbb{P}_n, \oplus_A, \otimes_A)$ は半線型空間であり，算術平均は半線形空間としての中点と一致する．また，$(\mathbb{P}_n, \oplus_A, \otimes_A)$ は Example 12 の意味で線形空間 $M_n(\mathbb{C})$ の凸錐である．

6.2 調和平均

$$H(a, b) = 2(a^{-1} + b^{-1})^{-1} \qquad (a, b \in \mathbb{P}_n)$$

とすると，H は $\mathbb{P}_n$ 上の mean であり，これを**調和平均**（**harmonic mean**）とよぶ．

Example 16. $(\mathbb{P}_n, \oplus_H)$ を

$$a \oplus_H b = (a^{-1} + b^{-1})^{-1} \qquad (a, b \in \mathbb{P}_n)$$

によって定めると，uniequly 2-divisible な可換半群になる．ここで，$(\mathbb{P}_n, \oplus_H)$ の可換半群としての代数的中点は調和平均と一致する．すなわち，

$$\frac{1}{2} \otimes_H (a \oplus_H b) = 2(a^{-1} + b^{-1})^{-1} = H(a, b) \qquad (a, b \in \mathbb{P}_n).$$

Example 17. $(\mathbb{P}_n, \oplus_H, \otimes_H)$ を

$$\begin{aligned} a \oplus_H b &= (a^{-1} + b^{-1}) \qquad (a, b \in \mathbb{P}_n) \\ \lambda \otimes_H a &= \lambda^{-1} a \qquad (\lambda \in \mathbb{R}_+,\ a \in \mathbb{P}_n) \end{aligned}$$

によって定めれば，$(\mathbb{P}_n, \oplus_H, \otimes_H)$ は半線型空間であり，調和平均は半線形空間としての中点と一致する．また，$n = 1$ のとき，$(\mathbb{R}_+, \oplus_H, \otimes_H)$ は Example 12 の意味である線形空間の凸錐であることがわかる．

Question 1. $n \neq 2$ のとき，$(\mathbb{P}_n, \oplus_H, \otimes_H)$ は *Example 12* の意味で何らかの線形空間の凸錐であるか？

6.3 幾何平均

$$G(a, b) = a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}} b^{-1} a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} \qquad (a, b \in \mathbb{P}_n)$$

とすると，G は $\mathbb{P}_n$ 上の mean であり，これを**幾何平均（geometric mean）**とよぶ．特に，$n = 1$ の場合は積について可換であることから

$$G(a, b) = \sqrt{ab} \qquad (a, b \in \mathbb{R}_+)$$

とかける．

Example 18. $(\mathbb{P}_n, \oplus_G)$ を

$$a \oplus_G b = a^{\frac{1}{2}} b a^{\frac{1}{2}} \qquad (a, b \in \mathbb{P}_n)$$

によって定めると，uniequly 2-divisible なジャイロ可換ジャイロ群になる．ここで，$(\mathbb{P}_n, \oplus_G)$ のジャイロ可換ジャイロ群としての代数的中点は幾何平均と一致する．すなわち，

$$\frac{1}{2} \otimes_G (a \boxplus_G b) = a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}} b^{-1} a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} = G(a, b) \qquad (a, b \in \mathbb{P}_n).$$

Example 19. $(\mathbb{P}_n, \oplus_G, \otimes_G)$ を

$$\lambda \otimes_G a = a^{\lambda} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{P}_n)$$

によって定めるとジャイロ線形空間になる（[1]）．すなわち，幾何平均はジャイロ線形空間 $(\mathbb{P}_n, \oplus_G, \otimes_G)$ の代数的中点とみなす事が出来る．

特に $n=1$ の場合，

$$\begin{aligned} a \oplus_G b &= ab \qquad (a, b \in \mathbb{R}_+) \\ \lambda \otimes_G a &= a^\lambda \qquad (a \in \mathbb{R}_+,\ \lambda \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

なので，$(\mathbb{R}_+, \oplus_G, \otimes_G)$ は一次元実線形空間であり，幾何平均はこの線形空間の代数的中点である．

6.4 その他

上記のように，代表的な mean である算術平均，調和平均，幾何平均の 3 つについてはそれぞれ何らかの “線形空間もどき” の代数的中点として理解できる．また，算術平均や調和平均には可換半群が対応しているのに対し，幾何平均についてはジャイロ可換ジャイロ群が対応している．すでに確認したように，可換半群とジャイロ可換ジャイロ群はどちらも可換群の一般化であるが，それぞれ異なる方向への一般化となっている．このことから，次のような問題を考えられる．

Question 2. 具体的に与えられた $\mathbb{P}_n$ 上の *mean* M に対して，M は何らかの代数構造における代数的中点だとみなす事が出来るか？また，その代数構造を具体的に記述できるか？

Question 3. $\mathbb{P}_n$ 上の *mean* M が，可換半群としての中点として記述できるための必要十分条件は何か？また，ジャイロ可換ジャイロ群の場合はどうか？より一般に，*mean* M にどんな条件を加えると，対応する代数構造について何がわかるか？

7 対称移動

M を $\mathbb{P}_n$ 上の mean とする．$a, c \in \mathbb{P}_n$ に対して，$c = M(a, x)$ となる $x \in \mathbb{P}_n$ がユニークに存在すれば，それを $\varphi[M, c](a)$ と表し，点 a を mean M について点 c を中心として対象移動した点ということにする．もし，任意の $a, c \in \mathbb{P}_n$ に対してそのような点が存在するのであれば，$x \circ y = \varphi[M, y](x)$ は $\mathbb{P}_n$ 上の二項演算を定める．これを，mean M によって定まる**点対象移動**と呼ぶことにする．

Definition 20. Magma $(X, \circ)$ が以下の条件 (D1) から (D4) を満たすとき，**dyadic symset** という．

(D1) 任意の $a \in X$ に対して，$a \circ a = a$.

(D2) 任意の $a, b \in X$ に対して，$a \circ (a \circ b) = b$.

(D3) 任意の $a, b, c \in X$ に対して，$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ (a \circ c)$.

(D4) 任意の $a, b \in X$ に対して，$x \circ a = b$ となる $x \in X$ がユニークに存在する．この x を a と b の中点といい，$a \sharp b$ で表す．

Lawson と Lim は [2] において，次の意味で Dyadic symset と uniquely 2-divisible なジャイロ可換ジャイロ群が同値であることを示した．

Theorem 21. $(X, \circ)$ を *dyadic symset* とする．また $e \in X$ とする．X 上に新たな二項演算 $\oplus_e$ を $x \oplus_e y = (e \sharp x) \circ (e \circ y)$ によって定める．このとき，$(X, \oplus_e)$ は e を単位元とする *uniquely 2-divisible* なジャイロ可換ジャイロ群である．逆に，$(X, \oplus)$ を *uniquely 2-divisible* なジャイロ可換ジャイロ群とする．X 上に新たな二項演算 $\circ$ を $x \circ y = 2 \otimes x \ominus y$ によって定めれば $(X, \circ)$ は *dyadic symset* である．

この定理と mean によって定まる点対称移動を関連付けることで直ちに次の結果が得られる．

Corollary 22. M を $\mathbb{P}_n$ 上の *mean* とし，$(\mathbb{P}_n, \circ)$ は M によって定まる点対象移動を表す *magma* とする．もし，$(\mathbb{P}_n, \circ)$ が *dyadic symset* であれば，M が代数的中点を表すような *uniquely 2-divisible* なジャイロ可換ジャイロ群 $(\mathbb{P}, \oplus)$ が存在する．

Example 23. $\mathbb{P}_n$ 上の幾何平均 G を考える．このとき，任意の $a, c \in \mathbb{P}_n$ に対して，$c = M(a, x)$ となる $x \in \mathbb{P}_n$ がユニークに存在する．幾何平均によって定まる点対象移動を表す二項演算を $\circ$ で表せば，$(\mathbb{P}_n, \circ)$ は dyadic symset である．したがって，単位行列を e として Theorem 21 を適用することで幾何平均 G を代数的中点としてもつ uniquely 2-divisible なジャイロ可換ジャイロ群 $(\mathbb{P}_n, \oplus_e)$ が得られる．このとき，実は $\oplus_e = \oplus_G$ であることがわかる．

Example 24. $\mathbb{P}_n$ 上の mean M として，算術平均 A や調和平均 H を考える．このとき，$a, c \in \mathbb{P}_n$ の選び方によっては $c = M(a, x)$ となる $x \in \mathbb{P}_n$ が存在しない場合があり，したがって mean M によって定まる点対象移動を表す二項演算が定まらない．このため，これらの mean に対しては Lawson と Lim の結果を（直接）利用することは出来ない．

参考文献

[1] T. Abe and O. Hatori, *Generalized gyrovector spaces and a Mazur-Ulam theorem*, Publ. Math. Debrecen, **87** (2015), 393–413

[2] J. Lawson and Y. Lim *Symmetric sets with midpoints and algebraically equivalent theories*, Results Math., **46** (2004), 37–56

[3] A. A. Ungar, *Analytic Hyperbolic Geometry and Albert Einstein's Special Theory of Relativity*, World Scientific, (2008)