数理解析研究所講究録 第2123巻 2019年 164-169

An asymptotic velocity operator for a class of long range type quantum walks

八戸工業高等専門学校 和田　和幸
Kazuyuki Wada
National Institute of Technology, Hachinohe College

1 Introduction

量子ウォークは古典ランダムウォークの量子版として導入されたモデルであるが，古典ランダムウォークとは性質がかなり異なっている事が知られている．量子ウォークの注目するべき性質の一つとして「線形的広がり」が挙げられる．古典的なランダムウォークは時刻 t に対して，$\sqrt{t}$ のオーダーで遠方へ広がっていく．一方で量子ウォークは t のオーダーで遠方へ広がって行くのである．本稿では「線形的広がり」に関連した話題について述べていく．本稿では $\mathbb{Z}$ 上の 2 状態量子ウォークを考える．状態のヒルベルト空間は

$$\mathcal{H} := l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C}^2) = \{\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} | \sum_{x\in\mathbb{Z}} \|\psi(x)\|^2_{\mathbb{C}^2} < \infty\} \tag{1.1}$$

である．ここで $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^2}$ は $\mathbb{C}^2$ 上の標準的なノルムである．時間発展作用素は $U = SC$ であり，S と C はそれぞれシフト作用素，コイン作用素と呼ばれ，

$$(S\psi)(x) = \begin{bmatrix} \psi^{(1)}(x+1) \\ \psi^{(2)}(x-1) \end{bmatrix} \qquad x \in \mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

$$(C\psi)(x) = C(x)\psi(x) \qquad C(x) \in U(2), \qquad x \in \mathbb{Z}$$

で定義されるユニタリ作用素である．

古典的なランダムウォークは中心極限定理を介して正規分布と密接な関係にあることは知られている．では量子ウォークの場合に対応する極限分布とはどんなものになるだろうか．$\psi_0 \in \mathcal{H}$ を量子ウォーカーの初期状態とする．X_t を確率変数で，時刻 $t \in \mathbb{N}$ で量子ウォーカーが位置 $x \in \mathbb{Z}$ に存在する確率が

$$\mathbb{P}(\{X_t = x\}) = \|(U^t\psi_0)(x)\|^2_{\mathbb{C}^2} \tag{1.3}$$

で与えられるものとする．このとき，X_t を t でスケーリングさせた特性関数 $\mathbb{E}[e^{i\xi X_t/t}]$ が $t \to \infty$ でどのような確率変数に弱収束するかが問題となる．Konno はコイン作用素が場所に依存しない場合を考察した．そして確率変数 X_t は $t \to \infty$ においてある確率変数 V に弱収束し，その確率密度関数は正規分布とは全く異なることを示した [5]．Konno の証明は組み合わせ論を用いており，初期状態について次のような仮定を置いている:

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} & x = 0, \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & x \neq 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

但し α と β は $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ を満たす複素数である．後に Grimmett らは，フーリエ変換を用いて Konno の結果にある初期状態の条件を外し，より簡潔な証明を与えた [3]．その際に漸近速度作用素が重要な役割を果たしている．当初の量子ウォークの研究は確率論に重きを置いた研究が多かったが，Suzuki[10] によって初めてスペクトル・散乱理論のアイデアが量子ウォークに導入されて関数解析的なアプローチが可能となった．本稿の内容は [7][8][10] の延長線上と位置づけられるものである．

2 Position independent quantum walks

(1.2) 式で C は位置 x においてユニタリ行列 $C(x)$ を掛ける掛け算作用素と定義したが，この章では C が位置に依存しない量子ウォークを考える．$C_0\in U(2)$ とし，時間発展作用素を $U_0=SC_0$ と定める．ただし，ここでの C_0 は $(C_0\psi)(x)=C_0\psi(x)$ と作用するユニタリ作用素として同じ記号を用いることにする．コイン作用素が位置に依ってないので，U_0 のスペクトルを調べる為に離散フーリエ変換が有効に働く．離散フーリエ変換 $\mathcal{F}$ を次で定まるユニタリ作用素とする:

$$\mathcal{F}:\mathcal{H}\to L^2([0,2\pi),dk/2\pi;\mathbb{C}^2)$$
$$(\mathcal{F}\psi)(k)=\hat{\psi}(k):=\sum_{x\in\mathbb{Z}}\psi(x)e^{-ikx}\quad \psi\in\mathcal{H}_{\mathrm{fin}},\quad k\in[0,2\pi),$$

但し，

$$\mathcal{H}_{\mathrm{fin}}:=\{\psi\in\mathcal{H}|\psi(x)=0,\ \ |x|\geq N \text{ for some } N\in\mathbb{N}\}$$

$\hat{U}_0:=\mathcal{F}U_0\mathcal{F}^{-1}$ とおく．すると $\hat{U}_0$ は

$$(\hat{U}_0\phi)(k)=\hat{U}_0(k)\phi(k),\quad \hat{U}_0(k)=\begin{bmatrix}e^{ik} & 0\\ 0 & e^{-ik}\end{bmatrix}C_0$$

のように作用する事が分かる．更に $\hat{U}_0(k)$ は 2 次正方行列であるから，固有値 $\lambda_j(k)$ $(j=1,2)$ と正規化された固有ベクトル $u_j(k)$ $(j=1,2)$ から

$$\hat{U}_0(k)=\sum_{j=1,2}\lambda_j(k)\langle u_j(k),\cdot\rangle u_j(k) \tag{2.1}$$

と表示出来る．$\lambda_j(k)$ は微分可能である事がわかるから，次のような作用素を導入することが出来る:

$$\widehat{V_0\psi}(k)=\sum_{j=1,2}\frac{i\lambda_j'(k)}{\lambda_j(k)}\langle u_j(k),\hat{\psi}(k)\rangle u_j(k)\quad k\in[0,2\pi).$$

V_0 は $U_0=SC_0$ に対する漸近速度作用素と呼ばれている．Q を $\mathbb{Z}$ 上の位置作用素としよう $((Q\psi)(x)=x\psi(x))$．次の定理が重要である:

Theorem 2.1. [10] $Q_0(t):=U_0^{-t}QU_0^t$ とする．任意の $\xi\in\mathbb{R}$ に対し、

$$\text{s-}\lim_{t\to\infty}e^{i\xi Q_0(t)/t}=e^{i\xi V_0}$$

が成り立つ．但し，s-lim は強極限の意味である．

Remark 2.1. 上の定理は時刻 t が十分大きいとき，$Q(t)/t$ は V_0 に十分近いと言っている．この事を

$$Q_0(t)/t\sim V_0\qquad t\to\infty,$$

と表すことにする．両辺に t を掛けるという操作を形式的に行うと，

$$Q_0(t)\sim tV_0\qquad t\to\infty$$

のような発見法的な関係式が得られる．この式が言っているのは，量子ウォーカーは t のオーダーで無限遠方へ進んで行くという事である。この性質を量子ウォークの線形的広がりと言う．

コインが位置に依存しない場合の量子ウォークに対して，対応する漸近速度作用素 V_0 が得られる．では C が空間に依存する場合に対応する漸近速度作用素は得られるのだろうか．次章からこの問いについて考えていく．

3 Position dependent quantum walks I

I この章からは C が位置に依存しても良い場合を考えていく。この場合、離散フーリエ変換が機能しない為に、$U = SC$ に対する漸近速度作用素を構成するのは非自明な問題である。この困難を克服する為に Suzuki は量子ウォークの文脈に波動作用素を導入し、漸近速度作用素を構成する事に成功した。結果を紹介する為に以下の仮定を導入する:

Assumption 3.1. コイン作用素 C に対し，あるユニタリ行列 C_0 と定数 $\epsilon > 0$, $\kappa > 0$ が存在して

$$\|C(x) - C_0\|_{\mathcal{B}(\mathbb{C}^2)} \leq \kappa(1 + |x|)^{-1-\epsilon} \qquad x \in \mathbb{Z}. \tag{3.1}$$

が成立する．

この章でも $U_0 = SC_0$ を位置に依らない量子ウォークとする．(3.1) の形の条件を短距離型条件と言う．Assumption 3.1 から次の事が証明される:

Theorem 3.1. [10] 以下で定義される波動作用素

$$W_{\pm}(U, U_0) = \text{s-}\lim_{t\to\pm\infty} U^{-t}U_0^t \Pi_{\mathrm{ac}}(U_0)$$

は存在して完全である。

更に，U は特異連続スペクトルを持たない事が証明できる (例えば [7][8])．Theorem 3.1 で導入された波動作用素を用いると以下が証明できる．

Theorem 3.2. [10] $Q(t) := U^{-t}QU^t$，$V_+ := W_+(U, U_0)V_0W_+(U, U_0)^*$ とおく．任意の $\xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$\text{s-}\lim_{t\to\infty} e^{i\xi Q(t)/t} = \Pi_{\mathrm{p}}(U) + e^{i\xi V_+}\Pi_{\mathrm{ac}}(U)$$

が成立する．但し，$\Pi_{\mathrm{p}}(U)$ と $\Pi_{\mathrm{ac}}(U)$ はそれぞれ U の固有ベクトル達が張る部分空間，絶対連続部分空間への直交射影である．

Theorem3.2 からわかる事は，波動作用素が構成出来ればそこから漸近速度作用素を構成する事が可能であるという事である．それでは Assumption 3.1 の条件を緩めて，以下の条件をおいた場合を考えてみる:

Assumption 3.2. コイン作用素 C に対し，あるユニタリ行列 C_0 と定数 $\gamma > 0$，$\kappa > 0$ が存在して

$$\|C(x) - C_0\|_{\mathcal{B}(\mathbb{C}^2)} \leq \kappa(1 + |x|)^{-\gamma} \quad x \in \mathbb{Z} \tag{3.2}$$

が成立する．

(3.2) の条件を長距離型条件と呼ぶ．この場合，波動作用素が一般には存在しない事が示される:

Theorem 3.3. a, b を $|a|^2+|b|^2=1$ を満たす複素数とし，$\delta \in [0,2\pi)$ とする．コイン作用素 C を

$$C(x) = e^{i(1+|x|)^{-\gamma}} \begin{bmatrix} a & b \\ -e^{i\delta}b^* & e^{i\delta}a^* \end{bmatrix} \quad x \in \mathbb{Z}$$

と定める．$0<|a|\le 1$，$0<\gamma\le 1$ に対し，波動作用素 $W_\pm(U,U_0)$ は存在しない．

証明は [11] を参照されたい．この意味で，Assumption 3.2 を仮定した場合の漸近速度作用素の構成は非自明な問題となる．次章でこの問題についての部分的な結果を説明する．

4 Position dependent quantum walks II

η を $\mathbb{Z}$ 上の $\mathbb{R}$-値関数とする．この章を通してコイン作用素 C は次の形をしていると仮定する．

$$C(x) = \begin{bmatrix} e^{i\eta(x)} & 0 \\ 0 & e^{-i\eta(x)} \end{bmatrix} C_0.$$

$\eta(x)$ に対して次の仮定をおく:

Assumption 4.1. η は $\lim_{t\to\pm\infty}\eta(x)=0$ を満たすとする．この η に対し，$\mathbb{Z}$ 上の $\mathbb{R}$-値関数 θ，定数 $\kappa>0$, $\epsilon>0$ が存在して

$$\begin{cases} \left|\eta(x) - \left\{\theta(x+1)-\theta(x)\right\}\right| \le \kappa(1+|x|)^{-1-\epsilon}, \\ \left|\eta(x) - \left\{\theta(x)-\theta(x-1)\right\}\right| \le \kappa(1+|x|)^{-1-\epsilon}, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{Z},$$

が成り立つ．

Example 4.1. $\eta(x) = (1+|x|)^{-1}$ $(x\in\mathbb{Z})$ としよう．この場合，C と C_0 は Assumption 3.2 は満たすが，Assumption 3.1 は満たさない．この η に対し，θ を次のように取る:

$$\theta(x) = \begin{cases} \log(1+x) & x \ge 0, \\ -\log(1-x) & x \le -1. \end{cases}$$

この場合は Assumption 4.1 が満たされる．

Assumption 4.1 に登場する θ を用いて以下の作用素 J を導入する:

$$(J\Psi)(x) := J(x)\Psi(x), \qquad J(x) = \begin{bmatrix} e^{i\theta(x)} & 0 \\ 0 & e^{i\theta(x)} \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{Z}, \quad \Psi \in \mathcal{H}.$$

J は明らかにユニタリ作用素である．そして $\tilde{U_0} := JU_0J^{-1}$ と定める．直接計算により，$\tilde{U_0}$ は $\tilde{U_0} = S\tilde{C_0}$ $(\tilde{C_0} := S^{-1}JSC_0J^{-1})$ と表示する事が出来る

Proposition 4.1. $\tilde{C_0}$ は $U(2)$ に値をとる $\mathbb{Z}$ 上の掛け算作用素で

$$\tilde{C_0}(x) = \begin{bmatrix} e^{-i\{\theta(x)-\theta(x-1)\}} & 0 \\ 0 & e^{i\{\theta(x+1)-\theta(x)\}} \end{bmatrix} C_0, \quad x \in \mathbb{Z}.$$

である．更に，

$$\left\| C(x) - \tilde{C_0}(x) \right\|_{\mathcal{B}(\mathbb{C}^2)} \le 2\kappa(1+|x|)^{-1-\epsilon} \quad x \in \mathbb{Z}$$

が成り立つ．

Remark 4.1. 数列 $a_n = 1/n$ $(n \in \mathbb{N})$ は $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$ だが，$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} 1/n - \log N \right)$ はオイラー定数に収束する事はよく知られている．Assumption 4.1 はこの思想に基づいて導入した仮定である．この仮定のおかげで C と C_0 は長距離型条件を満たすように見えていても，θ を用いたユニタリ変換によって，短距離型条件を満たすように出来るのである．$\tilde{C}_0(x)$ の形から，θ は無限大を除く Counter term を作る役割を果たしていると考えられる．

C と $\tilde{C}_0$ が短距離型条件を満たすので，U のスペクトル解析のほとんどが短距離型を仮定した理論の枠組みで収めることが出来る．本稿の主結果を述べる為にいくつかの言葉を導入する．線形作用素 A に対し，$\sigma(A)$ は A のスペクトル，$\sigma_{\mathrm{p}}(A)$ は A の固有値全体からなる集合とする．U の Threshold を $\tau(U)$ と表し，$\sigma(U)$ の $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ における境界と定める．

Theorem 4.1. 以下の性質が成り立つ:

1. U は特異連続スペクトルを持たない．

2. $\Theta := \sigma(U_0) \setminus (\sigma_{\mathrm{p}}(U) \cup \tau(U))$ とおく．以下の強極限が存在して完全である:

$$W_{\pm}(U, U_0, J, \Theta) := \lim_{t\to\infty} U^{-t} J U_0 E^{U_0}(\Theta)$$

ただし，E^{U_0} は U のスペクトル測度である．

3. $Q(t) = U^{-t} Q U^{t}$，$V_{J+} := W_+(U, U_0, J, \Theta) V_0 W_+(U, U_0, J, \Theta)^*$ とそれぞれおく．このとき，任意の $\xi \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\text{s-}\lim_{t\to\infty} e^{i\xi Q(t)/t} = \Pi_{\mathrm{p}}(U) + e^{i\xi V_{J+}} \Pi_{\mathrm{ac}}(U)$$

が成立する．

Remark 4.2. Theorem 4.1 に登場した $W_{\pm}(U, U_0, J, \Theta)$ は Isozaki-Kitada 型修正波動作用素 [2] の，量子ウォークにおける一つの実現とみる事が可能で，J は修正子の役割を果たしていることが分かる．

5 Concluding remarks

本稿では一部の長距離型量子ウォークに対し，漸近速度作用素が構成出来る事を説明した．しかしコイン作用素の形が限定的である為，他の型の場合にどのような修正子を導入すればよいかという問題を考える事は意義があると思われる．例えば，コイン作用素が

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{1 + |x|^{-\gamma}} & \sqrt{1 - |x|^{-\gamma}} \\ -\sqrt{1 - |x|^{-\gamma}} & \sqrt{1 + |x|^{-\gamma}} \end{bmatrix} \qquad x \neq 0$$

で与えられた場合の修正子がどのようになるか興味のある所である．最終的にはシュレディンガー作用素の文脈で既に確立されているような一般論を構築する事が目標となるであろう．

Acknowledgements
この研究は京都大学数理解析研究所共同利用・共同研究拠点事業からの援助を頂いております．講演の機会を与えて下さった研究代表者の廣島文生氏に感謝申し上げます．

参考文献

[1] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, and J. Watrous, “One-dimensional quantum walks”, In Proceedings of the Thirty-Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 37-49, ACM, New York, 2001.

[2] J. Dereziński and C. Gérard, “Scattering Theory of Classical and Quantum N-particle Systems, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.

[3] G. Grimmett, S. Janson and P. F. Scudo “Weak limits for quantum random walks”, Phys. Rev. E 69, 026119, 2004.

[4] S. P. Gudder, “Quantum Probability. Probability and Mathematical Statistics”, Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.

[5] N. Konno, “Quantum random walks in one dimension, Quantum Inf. Proc.”, 1, 245-354, 2002.

[6] M. Reed and B. Simon, “Methods of Modern Mathematical Physics Vol.III Scattering theory”, Academic Press, 1980.

[7] S. Richard, A. Suzuki and R. Tiedra de Aldecoa, “Quantum walks with an anisotropic coin I: spectral theory”, Lett. Math. Phys. vol. 108, 2, 331-357, 2018.

[8] S. Richard, A. Suzuki and R. Tiedra de Aldecoa, “Quantum walks with an anisotropic coin II: scattering theory”, Lett. Math. Phys., https://doi.org/10.1007/s11005-018-1100-1,2018.

[9] E. Segawa and A. Suzuki, “Generator of an abstract quantum walk”, Quantum Studies: Math. and Found., volume 3, issue 1, pp 11-30, 2016.

[10] A. Suzuki, “Asymptotic velocity of a position-dependent quantum walk”, Quamtum Inf. Process, 15(1):103—119, 2016.

[11] K.Wada, “Absence of wave operators for one-dimensional quantum walks”, arXiv:1809.07597.

National Institute of Technology, Hachinohe College
Hachinohe 039-1192
JAPAN
E-mail address: wada-g@hachinohe-ct.ac.jp