

正弦関数に基づく非対称な円周分布の推定理論における諸問題について

高崎経済大学・経済学部* 宮田 庸一

Yoichi Miyata

Faculty of Economics

Takasaki City University of Economics

東京理科大学・工学部† 塩濱 敬之

Takayuki Shiohama

Department of Information and Computer Technology

Tokyo University of Science

南山大学・理工学部‡ 阿部 俊弘

Toshihiro Abe

Faculty of Science and Engineering

Nanzan University

概要

本稿では、正弦関数を用いた非対称な円周分布における三角モーメント、パラメータの識別可能性、およびフィッシャー情報行列の正値定符号性に関して、これまでに明らかになっている研究結果の紹介を行う。

* 〒370-0801 高崎市上並榎町 1300

† 〒125-8585 東京都葛飾区新宿 6-3-1

‡ 〒466-8673 名古屋市昭和区山里町 18

1 はじめに

風向きや生物の移動方向など角度で表されるデータは、古典地磁気学、生物学、環境学等様々な分野で存在する。しかし、このようなデータにおいては0度と360度は同一視されるため、標本データに対して実軸上の数値と同様の統計解析を行うと、平均や分散、共分散や相関係数等の計算に不具合が生じることが知られている。角度データの代表的な確率分布として、von Mises分布や巻き込みコーシー分布のような単位円周上の確率モデルがあり、これらの分布の特徴を抽出するためには、平均方向や集中度といった三角モーメントから計算される指標が必要となる。上述した2つの分布はいずれも対称なモデルであるが、実際のデータは非対称な形状を示すことが頻繁にある。これまで、そのようなデータにモデルを当てはめるために、円周上の対称分布を非対称化させたモデルが多くの研究者 (Umbach and Jammalamadaka (2009), Abe and Pewsey (2011), Jones and Pewsey (2012)) により提案されてきた。非対称な分布を得る手法としては、基準となる対称分布の正弦振動によって非対称性を表現する手法 (Abe and Pewsey (2011)) と、基準となる対称分布の尺度変換を利用した手法 (Jones and Pewsey (2012)) がある。これらのモデルの最尤推定の一貫性を担保するためには、モデルの識別可能性が必要になる。一方で、データの非対称性を検証するために尤度比検定やWald検定などを行う場合には、帰無仮説の下でのフィッシャー情報行列が正値定符号である必要がある。しかし、これらの理論的な性質は明らかになっていない、もしくはよく知られていないところがある。このため、本稿では、これまで提案されてきた円周上の非対称分布を紹介するとともに、上記の理論的な性質に関して議論を行う。

本稿の構成は以下の通りである。2章では、方向統計学における確率密度関数とモーメントを紹介し、3章では代表的な対称分布を紹介する。4章で非対称分布の解説を行う。5章においては、非対称分布の識別可能性に関して明らかになっている研究成果および、フィッシャー情報行列の正値定符号性が成り立たなくなるパラメーターの集合について議論を行う。

2 円周上の確率分布と分布の特徴を表す指標

2.1 円周上の確率密度関数

確率変数 Θ が円周 S^1 上の点に対応する角度を値に取る場合, その確率密度関数 (pdf) $f(\theta)$ は, 非負性 (任意の θ に対して, $f(\theta) \geq 0$), 正規性 ($\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = 1$) に加えて, 以下の周期性を満たす.

$$f(\theta + 2\pi) = f(\theta) \quad a.e. \theta \in (-\infty, \infty).$$

このため, 円周分布 f において, その定義域の取り方は, 長さが 2π の任意の半开区間となる. このため, 定義域は $[0, 2\pi)$ と設定してよいし, $[-\pi, \pi)$ と設定してもよい. 確率密度関数 $f(\theta)$ に従う確率変数 Θ の p 次三角モーメント (trigonometric moment) は

$$\phi_p = E(e^{ip\Theta}) \quad p \in \mathbb{Z}$$

で定義される. ただし $i = \sqrt{-1}$ とする. ϕ_p の実部と虚部である p 次の余弦モーメントと p 次の正弦モーメントは, それぞれ

$$\alpha_p = E(\cos(p\Theta)), \quad \beta_p = E(\sin(p\Theta)) \quad (1)$$

で与えられる. また $p = 1$ のとき

$$\phi_1 = E(e^{i\Theta}) = \rho_1 \exp(i\mu_1) \quad (2)$$

となり, 角度分布の中心を表す μ_1 を平均方向 (mean direction), 角度分布の集中度を表す ρ_1 を平均合成ベクトル長 (mean resultant length) は

$$\mu_1 = \arg(\alpha_1 + i\beta_1), \quad \rho_1 = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}$$

で与えられる. 角度分布の非対称性を測る歪度の指標としては, 一般に平均方向 μ_1 周りの 2 次正弦モーメントと平均合成ベクトル長 ρ_1 を使って,

$$\gamma_1 = \frac{E\{\sin 2(\Theta - \mu_1)\}}{(1 - \rho_1)^{3/2}} \quad (3)$$

で与えられる.

3 円周上の対称分布

3.1 Von Mises 分布

円周分布でおそらく一番良く知られている分布は von Mises 分布 (von Mises (1918)) である. この分布は (a) 二変量正規分布を極座標変換し, 長さ一定の下での条件付分布として得られること, (b) 位置パラメータの最尤推定量が標本平均方向であるという特徴付けから導けることや (c) 一次の余弦モーメントと一次の正弦モーメントが一定という仮定の下でエントロピーを最大化することにより得られること等から, 円周上の正規分布 (circular normal distribution) と呼ばれている (Jammalamadaka and SenGupta (2001)). von Mises 分布 $VM(\mu, \kappa)$ の確率密度関数は

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \exp\{\kappa \cos(\theta - \mu)\}, \quad -\pi \leq \theta < \pi \quad (4)$$

で与えられる. ここで, $\mu \in [-\pi, \pi)$ は位置パラメータ, $\kappa \in [0, \infty)$ は集中パラメータである. I_p は p 次の第 1 種変形 Bessel 関数であり,

$$I_p(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos p\theta e^{\kappa \cos \theta} d\theta = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(p+r+1)r!} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{2r+p}$$

で与えられる. 集中パラメータ κ の範囲は負にしても確率密度関数になっているが, $VM(\mu, -\kappa) = VM(\mu + \pi, \kappa)$ であることとパラメータの解釈から通常は $\kappa \geq 0$ で定義される. このようなことから von Mises 分布に限らず, 他の多くの分布でも集中パラメータは通常, 非負である. また p 次三角モーメントが

$$\phi_p = \frac{I_p(\kappa)}{I_0(\kappa)} e^{ip\mu}, \quad p = \pm 1, \pm 2, \dots$$

であることから, 平均合成ベクトル長は $A(\kappa) = \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)}$ である.

3.2 巻き込みコーシー分布

von Mises 分布の他に, よく知られている分布としては, 巻き込みコーシー分布 $WC(\mu, \rho)$ がある. 巻き込みコーシー分布は (実軸上の) コーシー分布に巻き込み法 (wrapping) を適用することにより得られることから, このような名前がつけられている.

巻き込みコーシー分布の確率密度関数は

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - \mu)}, \quad -\pi \leq \theta < \pi$$

により与えられる. ここで, $\mu \in [-\pi, \pi)$ は位置パラメータ, $\rho \in [0, 1)$ は集中パラメータである. 巻き込みコーシー分布の p 次三角モーメントは

$$\phi_p = \rho^{|p|} e^{ip\mu}, \quad p = \pm 1, \pm 2, \dots$$

であり, 平均合成ベクトル長は ρ である. von Mises 分布は再生性をもたないが, 巻き込みコーシー分布は $WC(\mu_1, \rho_1)$ と $WC(\mu_2, \rho_2)$ に従う確率変数の和の分布が $WC(\mu_1 + \mu_2, \rho_1 \rho_2)$ となり, 再生性をもつ.

3.3 Jones–Pewsey 分布

Jones and Pewsey (2005) は既存の対称分布を含むような柔軟な対称分布族を提案した. その確率密度関数は

$$f(\theta) = \frac{(\cosh(\kappa\psi) + \sinh(\kappa\psi) \cos(\theta - \mu))^{1/\psi}}{2\pi P_{1/\psi}(\cosh(\kappa\psi))}, \quad -\pi \leq \theta < \pi \quad (5)$$

である. ここで, $\mu \in [-\pi, \pi)$ は位置パラメータ, $\kappa \in [0, \infty)$ は集中パラメータ, $\psi \in \mathbb{R}$ は形状パラメータ, $P_{1/\psi}$ は Legendre の陪関数であり (Gradshtey and Ryzhik (2014)),

$$P_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (z + \sqrt{z^2 - 1} \cos x)^\nu dx$$

を満たす. この分布は 3 つのパラメータだけで前に述べた分布や他の対称分布を特別な場合として含んでいる: (5) で, $\psi \rightarrow 0$ としたとき, von Mises 分布, $\psi = 1$ のとき, cardioid 分布, $\psi = -1$ のとき, 巻き込みコーシー分布, $\psi > 0$ で $\kappa \rightarrow \infty$ としたとき, Cartwright's power-of-cosine 分布 (Cartwright (1963)) に帰着する. Jones–Pewsey 分布は Shimizu and Iida (2002) の円周 t 分布においてパラメータの範囲を広げたものと解釈することもできる (清水 (2018)). Abe et al. (2010) は投影図法を用いることにより, Jones–Pewsey 分布を含む対称分布族を提案している.

4 円周上の非対称分布について

4.1 摂動法に基づく非対称化

実際のデータ解析において、非対称分布を適用することの利点が多いことから、種々の円周上の非対称分布も提案されている。本稿では、非対称性を取り入れる方法を2つ紹介する。一つ目として、基準となる対称分布の密度関数を $f_0(\theta)$ とすると、次のような確率分布を考えることで非対称性を表現することができる。

$$f(\theta - \mu) = \{1 + \lambda \sin(\theta - \mu)\} f_0(\theta - \mu)$$

パラメータ $\lambda \in [-1, 1]$ が非対称性を表す指標であり、 $\lambda > 0$ (< 0) なら右 (左) に歪んだ分布を表す。 $\lambda = 0$ の場合は、基準となる対称分布となる。この分布の p 次の三角モーメントは

$$\phi_p = \alpha_{0,p} + i \frac{\lambda(\alpha_{0,p-1} - \alpha_{0,p+1})}{2}, \quad p = \pm 1, \pm 2, \dots$$

となる。ここで、 $\alpha_{0,p}$ は確率密度関数が f_0 である基準となる対称分布の p 次の余弦モーメントである。

基準となる分布を von Mises 分布とした場合、von Mises 分布の正弦摂動による確率分布を Sine-skewed von Mises (SSvM) 分布といい、その密度関数は次のようになる。

$$f_{SSvM}(\theta|\mu, \kappa, \lambda) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \exp\{\kappa \cos(\theta - \mu)\} \{1 + \lambda \sin(\theta - \mu)\}, \quad (6)$$

ここで、 $0 \leq \mu < 2\pi$ は平均方向に影響を与え、 $\kappa \geq 0$ は集中度に影響を与えるパラメータである。図1は、異なる λ に対して、 $\kappa = 1$ とした SSvM 分布の密度関数をプロットしたものである。 λ の値が1に近づくにつれ右に歪み、一方で -1 に近づくにつれ左に歪むことがわかる。SSvM 分布の三角モーメントは次のように陽に与えられる：

$$\begin{aligned} \alpha_p^* &:= E\{\cos(p\Theta)\} = \left\{ \cos(p\mu) - \frac{p\lambda}{\kappa} \sin(p\mu) \right\} \alpha_p, \\ \beta_p^* &:= E\{\sin(p\Theta)\} = \left\{ \sin(p\mu) + \frac{p\lambda}{\kappa} \cos(p\mu) \right\} \alpha_p, \end{aligned}$$

ただし、 $\alpha_p := I_p(\kappa)/I_0(\kappa)$ とする。これより、平均合成ベクトル長は $\rho_{1,SSvM} = I_1(\kappa)\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}/(\kappa I_0(\kappa))$ となる。また SSvM 分布における歪度 (3) は次の形で与えられる：

$$\gamma_{1,SSvM} = -\frac{2\lambda^3}{(\kappa^2 + \lambda^2)(1 - \rho_{1,SSvM})^{3/2}} \frac{I_2(\kappa)}{\kappa I_0(\kappa)}.$$

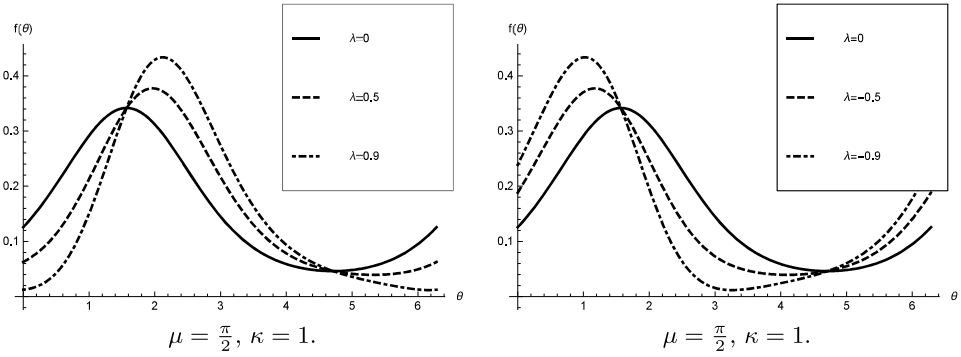


図1 von Mises 分布の正弦振動の密度関数のプロット

なお, Abe and Pewsey (2011) より, SSvM 分布の単峰性は保証されないことが示されている.

基準となる対称分布を巻き込みコーシー分布にすると, 巻き込みコーシー分布の正弦振動の密度関数を得られる (Sine-skewed Wrapped Cauchy (SSWC) 分布). 確率変数 Θ がパラメータ μ, ρ, λ の SSWC 分布に従うとき, Θ の密度関数は次のようになる.

$$f_{SSWC}(\theta|\mu, \rho, \lambda) = \frac{1 - \rho^2}{2\pi(1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - \mu))} \{1 + \lambda \sin(\theta - \mu)\}, \quad (7)$$

ここで $\lambda \in [-1, 1]$ は非対称性のパラメータで $\lambda = 0$ のときに, 巻き込みコーシー分布になる. 図2には, 巻き込みコーシー分布の正弦振動の密度関数をプロットした. 巻き込み

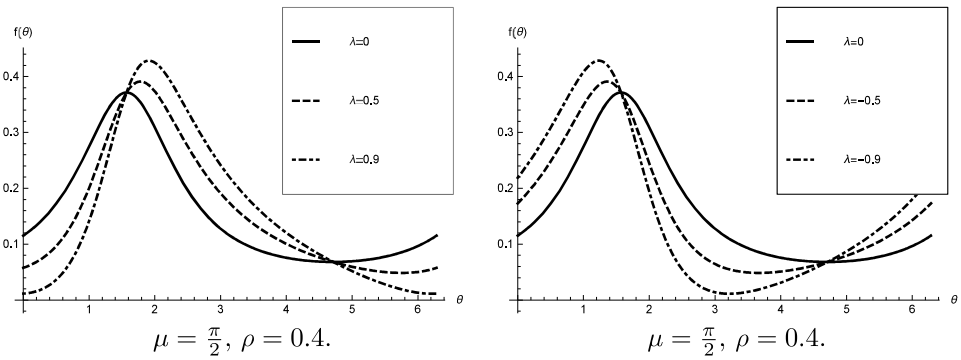


図2 巻き込みコーシー分布の正弦振動の密度関数のプロット

コーシー分布の正弦摂動の三角モーメントも次のように陽に与えられる.

$$\begin{aligned}\alpha_p^* &:= E \{ \cos(p\Theta) \} = \cos(p\mu)\rho^{|p|} - \sin(p\mu)\frac{\lambda}{2}(\rho^{|p-1|} - \rho^{|p+1|}), \\ \beta_p^* &:= E \{ \sin(p\Theta) \} = \sin(p\mu)\rho^{|p|} + \cos(p\mu)\frac{\lambda}{2}(\rho^{|p-1|} - \rho^{|p+1|}), \quad (p \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

これより, 平均方向は $\mu = \arg\{\alpha_1^* + i\beta_1^*\}$ であり, 平均合成ベクトル長は $\rho_{1,SSWC} = \sqrt{\rho^2 + \lambda^2(1 - \rho^2)^2/4}$ となる. また歪度は

$$\gamma_{1,SSWC} = -\frac{\rho\lambda(1 - \rho^2)}{2(1 - \rho_{1,SSWC})^{3/2}}$$

となる. 尚, SSWC 分布は常に単峰であることが Abe and Pewsey (2011) により示されている.

Abe and Pewsey (2011) は, 参照となる対称分布 $f_0(\theta)$ を Jones–Pewsey 分布の確率密度関数とした sine skewed Jones–Pewsey(SSJP) 分布族を提案している. この分布族は, $4 - 3\sqrt{3} \leq \psi \leq -0.5$ ならば常に単峰となる. SSJP 分布の確率密度関数は $4 - 3\sqrt{3} \leq \psi \leq -0.5$ よりも広い範囲で単峰になっているようであるが, これに関する必要十分条件は得られていない. $\psi = -1$ のときの SSJP 分布である SSWC 分布の mode と antimode は, 以下のように陽に与えることができる:

$$\begin{aligned}\theta_{mode}^* &= -\arg(\lambda + ia) + \cos^{-1}\left(\frac{a\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + a^2}}\right), \\ \theta_{antimode}^* &= \begin{cases} -\arg(\lambda + ia) - \cos^{-1}\left(\frac{a\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + a^2}}\right), & 0 \leq \lambda \leq 1, \\ -\arg(\lambda + ia) - \cos^{-1}\left(\frac{a\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + a^2}}\right) + 2\pi, & -1 \leq \lambda \leq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

ここで, $a = 2\rho/(1 + \rho^2)$ ($\in [0, 1)$) である.

4.2 スケール変換に基づく非対称化

非対称分布を表現する二つ目の手法は, Jones and Pewsey (2012) で紹介された基準となる対称分布の尺度変換を利用した手法であり, 単峰性を持つ非対称分布を得ることができる. 基準となる対称分布の密度関数を $f_0(\theta)$ とし, 一般性を失うことなく平均方向を $\mu = 0$ とすれば, 次の尺度変換 τ によって非対称分布を得ることができる.

$$f(\theta) = f_0(\tau^{-1}(\theta))$$

ただし, Jones and Pewsey (2012) では $\tau(\theta) = \theta - \lambda - \lambda \cos \theta$ と定義した. この方法は Batschelet (1981) によって提案された手法に基づいているため, 逆 Batschelet 分布と呼ばれている. 基準となる対称分布を von Mises 分布にすれば, 次の von Mises 分布の尺度変換の密度関数が得られる.

$$f_{IB0}(\theta|\mu, \kappa, \lambda) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \exp[\kappa \cos\{\tau^{-1}(\theta)\}]. \quad (8)$$

よって位置母数 μ を加えた逆 Batschelet 分布の確率密度関数は,

$$f_{IB}(\theta|\mu, \kappa, \lambda) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \exp[\kappa \cos\{\tau^{-1}(\theta - \mu)\}] \quad (9)$$

で与えられる. 図 3 には, 様々な λ と異なる集中度 $\kappa \in \{1, 5\}$ に対する逆 Batschelet 分布の密度関数をプロットした.

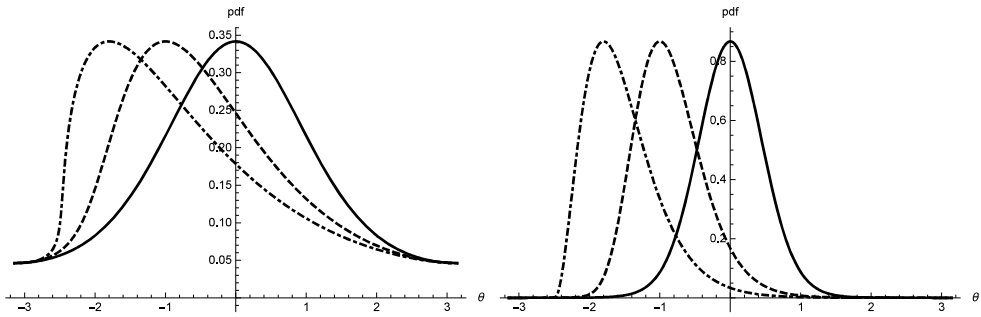


図 3 von Mises 分布の尺度変換による密度関数のプロット. $\mu = 0, \kappa = 1, \lambda \in \{0, 0.5, 1\}$ とした場合 (左), $\mu = 0, \kappa = 5, \lambda \in \{0, 0.5, 0.9\}$ とした場合 (右). $\lambda = 0$: —, $\lambda = 0.5$: - -, $\lambda = 0.9$: - · - ·.

5 理論的な性質

ここでは、SSvM 分布, SSWC 分布, および逆 Batschelet 分布における三角モーメント, 識別可能性およびフィッシャー情報行列の正值定符号性について, 知られている結果を紹介する. これらをまとめたものが, 以下の表となる.

	SSvM	SSWC	逆 Batschelet
三角モーメント	AP	AP	A
識別可能性	MSA	MSA	未解決
正值定符号性 ($\lambda = 0$)	退化 (LV)	退化しない (LV)	未解決

ただし, AP は Abe and Pewsey (2011), A は Abe (2015), MSA は Miyata et al. (2019), LV は Ley and Verdebout (2014) を略記したものとす.

5.1 三角モーメント

SSvM 分布と SSWC 分布に余弦, 正弦モーメントにおいては, すでに 4.1 章で紹介しているため, ここでは触れない. $\mu = 0$ としたときの逆 Batschelet 分布 (8) の特性関数は Abe (2015) により

$$\psi_{\mu=0}(p) := E_{\mu=0} \{ \exp(ip\Theta) \} = \frac{\kappa \exp\{-ip\lambda\} I_p(\kappa - ip\lambda)}{(\kappa - ip\lambda) I_0(\kappa)} \quad (p \in \mathbb{Z})$$

となることが示されている. よって位置母数 μ を加えた一般の逆 Batschelet 分布 (9) の特性関数は,

$$\begin{aligned} \psi(p) &:= E \{ \exp(ip\Theta) \} = E_{\mu=0} \{ \exp(ip(\Theta + \mu)) \} \\ &= \exp(ip\mu) \frac{\kappa \exp\{-ip\lambda\} I_p(\kappa - ip\lambda)}{(\kappa - ip\lambda) I_0(\kappa)} \quad (p \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

となる. これより, p 次の余弦モーメントは $E \{ \cos(p\Theta) \} = \frac{\psi(p) + \psi(-p)}{2}$ となり, p 次の正弦モーメントは $E \{ \sin(p\Theta) \} = \frac{\psi(p) - \psi(-p)}{2i}$ で与えられる.

5.2 識別可能性

次に識別可能性について考える. SSvM および SSWC の識別可能性は, 以下の定理が与えられている. 今, パラメーター空間 Γ を持つ確率密度関数 $f(\theta|\gamma)$ の族を考える. このと

き, $f(\theta|\gamma)$ は Γ において識別可能であるとは, 任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ に対して, $\gamma_1 \neq \gamma_2$ のときに $f(\theta|\gamma_1) \neq f(\theta|\gamma_2)$ が成り立つことをいう. このとき, 以下の結果が成り立つ.

定理 1 (Miyata et al.(2019))

- (i) SSvM 分布 (6) は, パラメーター空間 $\Gamma_1 = \{(\mu, \kappa, \lambda) | 0 \leq \mu < 2\pi, 0 < \kappa, -1 \leq \lambda \leq 1\}$ において識別可能.
- (ii) SSWC 分布 (7) はパラメーター空間 $\Gamma_2 = \{(\mu, \rho, \lambda) | 0 \leq \mu < 2\pi, 0 < \rho < 1, -1 \leq \lambda \leq 1\}$ において識別可能.

これらの定理は Miyata et al. (2019) において示されている. 特に SSWC 分布のパラメーター空間において $\rho = 0$ の点が含まれていないことに注意されたい. 実際, $\rho_1 = \rho_2 = 0$ とおき, $\lambda_1 = -\lambda_2$, $\mu_1 - \mu_2 = \pi \pmod{2\pi}$ となるようにとると, $f_{SSWC}(\theta|\mu_1, \rho_1, \lambda_1) = f_{SSWC}(\theta|\mu_2, \rho_2, \lambda_2)$ となり, 識別可能性が成り立たなくなることがわかる.

5.3 フィッシャー情報行列の正値定符号性

ここでは主に SSvM 分布 (6) のフィッシャー情報行列 $I(\boldsymbol{\eta})$ について議論を行う. ただし $\boldsymbol{\eta} = (\mu, \kappa, \lambda)^T$ とする. 実は Ley and Verdebout (2014) により, SSvM 分布は $\lambda = 0$ の点で退化することが示されている. このため我々は $\lambda = 0$ の点で退化することを確認, また集合 $\{(\mu, \kappa, \lambda) | 0 \leq \mu < 2\pi, \kappa > 0, \lambda = 0\}$ の任意の点において, $I(\boldsymbol{\eta})$ が退化することを明らかにする.

$$\log f_{SSvM}(\theta|\mu, \kappa, \lambda) = -\log(2\pi I_0(\kappa)) + \kappa \cos(\theta - \mu) + \log\{1 + \lambda \sin(\theta - \mu)\}$$

より, フィッシャー情報行列は

$$I(\boldsymbol{\eta}) = E \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}^T} \log f_{SSvM}(\Theta|\boldsymbol{\eta}) \right\}$$

$$= E \begin{pmatrix} \kappa \cos(\Theta - \mu) + \frac{\lambda \sin(\Theta - \mu) + \lambda^2}{\{1 + \lambda \sin(\Theta - \mu)\}^2} & -\sin(\Theta - \mu) & \frac{\cos(\Theta - \mu)}{\{1 + \lambda \sin(\Theta - \mu)\}^2} \\ * & \frac{1}{2} + \frac{I_2(\kappa)}{2I_0(\kappa)} - \frac{I_1(\kappa)^2}{I_0(\kappa)^2} & 0 \\ * & * & \frac{\sin^2(\Theta - \mu)}{\{1 + \lambda \sin(\Theta - \mu)\}^2} \end{pmatrix}$$

となる. これより

$$I(\boldsymbol{\eta}) = \begin{pmatrix} \iota_{\mu\mu} & \iota_{\mu\kappa} & \iota_{\mu\lambda} \\ \iota_{\mu\kappa} & \iota_{\kappa\kappa} & 0 \\ \iota_{\mu\lambda} & 0 & \iota_{\lambda\lambda} \end{pmatrix}$$

とおき, $I(\boldsymbol{\eta})$ の行列式をとると

$$\begin{aligned} |I(\boldsymbol{\eta})| &= \begin{vmatrix} \iota_{\mu\mu} - (\iota_{\mu\lambda}^2/\iota_{\lambda\lambda}) & \iota_{\mu\kappa} & \iota_{\mu\lambda} \\ \iota_{\mu\kappa} & \iota_{\kappa\kappa} & 0 \\ 0 & 0 & \iota_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} = \iota_{\lambda\lambda} \begin{vmatrix} \iota_{\mu\mu} - (\iota_{\mu\lambda}^2/\iota_{\lambda\lambda}) & \iota_{\mu\kappa} \\ \iota_{\mu\kappa} & \iota_{\kappa\kappa} \end{vmatrix} \\ &= \iota_{\kappa\kappa}(\iota_{\mu\mu}\iota_{\lambda\lambda} - \iota_{\mu\lambda}^2) - \iota_{\lambda\lambda}\iota_{\mu\kappa}^2 \end{aligned}$$

となる.

$$\begin{aligned} \iota_{\mu\kappa} &= - \int_0^{2\pi} \sin(\theta - \mu) f_{SSvM}(\theta|\mu, \kappa, \lambda) d\theta = - \int_0^{2\pi} \sin x f_{SSvM}(\theta|0, \kappa, \lambda) dx \\ &= - \frac{\lambda I_1(\kappa)}{\kappa I_0(\kappa)}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \iota_{\mu\mu} &= \int \left\{ \kappa \cos(\theta - \mu) + \frac{\lambda \sin(\theta - \mu) + \lambda^2}{(1 + \lambda \sin(\theta - \mu))^2} \right\} f_{SSvM}(\theta|\mu, \kappa, \lambda) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \kappa \cos x + \frac{\lambda \sin x + \lambda^2}{(1 + \lambda \sin x)^2} \right\} f_{SSvM}(x|0, \kappa, \lambda) dx \\ &= \kappa E_{\mu=0}(\cos X) + 1 + (\lambda^2 - 1) \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \lambda \sin x} f_{vM}(x|\kappa) dx \\ &= \kappa \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} + 1 + (\lambda^2 - 1) \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \lambda \sin x} f_{vM}(x|\kappa) dx \end{aligned} \quad (11)$$

ただし $f_{vM}(x|\kappa)$ は, von Mises 分布の確率密度関数 (4) において $\mu = 0$ としたものとし, $E_{\mu=0}(\bullet)$ は $\mu = 0$ とした SSvM 分布における期待値を表すものとする.

$$\begin{aligned} \iota_{\mu\lambda} &= E \left[\frac{\cos(\Theta - \mu)}{\{1 + \lambda \sin(\Theta - \mu)\}^2} \right] = \int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{1 + \lambda \sin x} f_{vM}(x|\kappa) dx \\ \iota_{\lambda\lambda} &= E \left[\frac{\sin^2(\Theta - \mu)}{\{1 + \lambda \sin(\Theta - \mu)\}^2} \right] = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \lambda \sin x} f_{vM}(x|\kappa) dx. \end{aligned}$$

ここで $\lambda = 0$ とすると, $\iota_{\mu\mu}|_{\lambda=0} = \kappa \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)}$, $\iota_{\mu\lambda}|_{\lambda=0} = \int_0^{2\pi} (\cos x) f_{vM}(x|\kappa) dx = \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)}$,

$$\iota_{\lambda\lambda}|_{\lambda=0} = \int_0^{2\pi} \sin^2 x f_{vM}(x|\kappa) dx = \frac{I_1(\kappa)}{\kappa I_0(\kappa)}$$

より

$$|I(\boldsymbol{\eta})|_{\lambda=0} = \iota_{\kappa\kappa}|_{\lambda=0} \left(\kappa \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} \cdot \frac{I_1(\kappa)}{\kappa I_0(\kappa)} - \frac{I_1(\kappa)^2}{I_0(\kappa)^2} \right) = 0 \quad (12)$$

となり, μ, κ の値に依存せずに, フィッシャー情報行列が退化することがわかる.

また, von-Mises 分布以外を基準とする対称分布の場合, フィッシャー情報行列は $\lambda = 0$ の点で退化しないことが, Ley and Verdebout (2014) により示されている.

5.4 正弦摂動分布の最大事後確率 (MAP) 推定

最尤推定量の統計的な性質として自然な正則条件の下で、一致性、漸近正規性、漸近有効性が成り立つことが知られている。SSvM 分布はフィッシャー情報行列が $\lambda = 0$ で退化するため、パラメータの真値を $\lambda_0 = 0$ とした場合、尤度に基づく推測論や検定論が成り立たない。また区間 $[-1, 1]$ に制限されている正弦摂動を表すパラメータ λ は、たとえ λ の真値が 0 であったとしても、 λ の推定値がパラメータ空間の端点に値を取ることが少なからずあり、正則条件が成立しない状況がしばしば生じる。^{*1} そこで、Gelman et al. (2013) の p.316 にある Boundary-avoiding prior と同様の目的から、 λ の推定値がパラメータ空間の境界に出てこないような、また対数事後密度のヘッセ行列が退化しないような事前分布を各パラメータに導入することで、ベイズ流の推測論が可能となる。ここでは、SSvM 分布 (6) の最大事後確率 (MAP) 推定を考える。いま、SSvM 分布のパラメータベクトルを $\boldsymbol{\eta} = (\mu, \kappa, \lambda)^T$ とし、パラメータベクトル $\boldsymbol{\eta}$ は $\boldsymbol{\psi} = (\psi_\mu, \psi_\kappa, \psi_\lambda)^T \in \Gamma_\psi$ (ただし $\Gamma_\psi \subseteq \mathbb{R}^3$) の変数変換 $h: \Gamma_\psi \rightarrow \Gamma_1$ によって表されているとする。また、 $h(\boldsymbol{\psi}) = (h_1(\psi_\mu), h_2(\psi_\kappa), h_3(\psi_\lambda))^T$ と定義する。ここで、変数変換の 2 つの例を与えておく:

$$\mu = h_1(\psi_\mu) = \psi_\mu, \quad \kappa = h_2(\psi_\kappa) = \psi_\kappa, \quad \lambda = h_3(\psi_\lambda) = \tanh(\psi_\lambda) \quad (13)$$

$$\mu = h_1(\psi_\mu) = \pi \tanh(\psi_\mu), \quad \kappa = h_2(\psi_\kappa) = \exp(\psi_\kappa), \quad \lambda = h_3(\psi_\lambda) = \tanh(\psi_\lambda). \quad (14)$$

$\boldsymbol{\psi}$ の確率分布を $p_\Psi(\boldsymbol{\psi})$ とすると、変数変換により $\boldsymbol{\eta}$ の事前分布は

$$p(\boldsymbol{\eta}) = p_\Psi(h^{-1}(\boldsymbol{\eta})) \left| \frac{\partial h^{-1}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right|$$

となる。ただし、 $|\partial h^{-1}(\boldsymbol{\eta})/\partial \boldsymbol{\eta}|$ は、変数変換に対するヤコビアン の絶対値とする。(13) の場合には、 (ψ_μ, ψ_κ) の確率分布として、 (μ, κ) に対する共役事前分布 (Guttorp and Lockhart (1988)) を仮定し、 ψ_λ に対しては、正規分布 $N(m_\lambda, \alpha)$ を仮定する、ただし $m_\lambda, \alpha > 0$ はハイパーパラメータとする。(14) の場合には、 $\mathbf{m} = (m_\mu, m_\kappa, m_\lambda)^T, \alpha > 0$ をハイパーパラメータとし、 $\boldsymbol{\psi}$ の確率分布を $p_\Psi(\boldsymbol{\psi})$ を 3 変量正規分布 $N_3(\mathbf{m}, \alpha \mathbf{I}_3)$ とする。

^{*1} 実際には、 $\mu = \pi/2, \kappa = 1.5, \lambda = 0$ とした SSvM 分布から大きさ 100 の乱数を生成し、最尤推定を行うシミュレーションを 500 回行ったところ、27 回 (5.4%) がパラメータ空間の端点の値を推定した。

このとき $\boldsymbol{\eta}$ の事後分布を最大にする MAP 推定量は次のようにして求めることができる。

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\eta}}^{(\text{MAP})} &= \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{\eta}} \left\{ \sum_{i=1}^n \log f_{SSvM}(\theta_i | \mu, \kappa, \lambda) + \log p(\boldsymbol{\eta}) \right\} \\ &= \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{\eta}} \left[\sum_{i=1}^n \log f_{SSvM}(\theta_i | \mu, \kappa, \lambda) + \log \left\{ p_{\Psi}(h^{-1}(\boldsymbol{\eta})) \left| \frac{\partial h^{-1}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right| \right\} \right] \\ &= \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{\eta}} \left[\sum_{i=1}^n \log f_{SSvM}(\theta_i | \mu, \kappa, \lambda) - \frac{3}{2} \log \alpha - \frac{1}{2\alpha} (h^{-1}(\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{m})^T (h^{-1}(\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{m}) \right. \\ &\quad \left. - \log \kappa - \log(1 - \lambda^2) - \log(1 - (\mu/\pi)^2) \right] =: \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{\eta}} \tilde{\ell}(\boldsymbol{\eta}).\end{aligned}$$

なお、上記の対数事後密度に (-1) を乗じたもののヘッセ行列、すなわち $-\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}^T} \tilde{\ell}(\boldsymbol{\eta})$ が正値定符号になるためには、 α を 0.5 未満の正の数とし、 $m_{\kappa} > 0$ を大きく取る必要がある。これにより、MAP 推定に対する退化しない分散共分散行列を得ることができ、信用区間の構成や対称性の帰無仮説に対するベイズ型の仮説検定が実行しやすくなる。また尤度比検定に替わる手法としては、ベイズファクター (Gelman et al. (2013)) や尤度比の事後確率 (Dempster (1997)) に基づく検定などがあるが、実際のパフォーマンスや妥当性に関しては、さらなる研究が必要になる。

6 まとめ

ここでは、円周上の非対称分布における識別可能性に関する結果の紹介を行った。特に SSvM 分布はパラメーターに対する識別は可能であるが、フィッシャー情報行列が $\lambda = 0$ で退化することを確かめた。特にフィッシャー情報行列が退化するパラメーター集合は無限集合になることを明らかにした。一方で SSWC 分布のフィッシャー情報行列については、 $\lambda = 0$ の点で正値定符号になるが、シミュレーション、データ解析を通じて、正値定符号性はパラメーター空間の任意の点で成り立つ可能性が高いことが推測できる。最後に逆 Batschelet 分布に関しては、識別可能性およびフィッシャー情報行列の正値定符号性のいずれも明らかになっていない。逆 Batschelet 分布はデータのサイズが非常に大きい場合の最尤推定量の計算においては、繰り返して逆関数の計算をする必要があり、多くの時間を要するが、図 3 を見てわかるように、歪みパラメーター λ により分布を非対称化させる度合いが sine-skewing アプローチよりも強い。このような分布における理論的特性を明らかにすることは、大きな意味がある。

謝辞

本研究集会にて講演の機会をいただきました筑波大学の小池健一先生に厚くお礼申し上げます。また本研究は、科学研究費（課題番号:19K11863, 18K01706, 19K11869）の助成を受けている。

参考文献

- Abe, T. (2015). Discussion: On families of distributions with shape parameters, *International Statistical Review*, **83**(2), 193-197.
- Abe, T. and Pewsey, A. (2011). Sine-skewed circular distributions, *Statistical Papers*, **52**, 683 – 707.
- Abe, T., Pewsey, A. and Shimizu, K. (2013). Extending circular distributions through transformation of argument, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **65**(5), 833-858.
- Abe, T., Shimizu, K. and Pewsey, A. (2010). Symmetric unimodal models for directional data motivated by inverse stereographic projection, *Journal of the Japan Statistical Society*, **40**, 45–61.
- Azzalini, A. and Capitanio, A. (2003). Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t -distribution, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **65**(2), 367–389.
- Batschelet, E. (1981). *Circular Statistics in Biology*. Academic Press, London.
- Cartwright, D. E. (1963). The use of directional spectra in studying the output of a wave recorder on a moving ship. In *Ocean Wave Spectra*, Prentice Hall, New Jersey, 203–218.
- Dempster, A. P. (1997). The direct use of likelihood for significance testing. *Statistics and Computing*, **7**(4), 247–252.
- Fraser, M. D., Hsu, Y.-S. and Walker, J. J. (1981). Identifiability of finite mixtures of von Mises distributions, *The Annals of Statistics*, **9**, 1130–1131.
- Gradshteyn, I. S., and Ryzhik, I. M. (2014). *Table of integrals, series, and products*. Academic press.
- Gelman, A., Stern, H. S., Carlin, J. B., Dunson, D. B., Vehtari, A., and Rubin, D. B.

- (2013). *Bayesian data analysis*. Chapman and Hall/CRC.
- Guttorp, P., and Lockhart, R. A. (1988). Finding the location of a signal: A Bayesian analysis. *Journal of the American Statistical Association*, **83**, 322–330.
- Jammalamadaka, S. R. and SenGupta, A. (2001). *Topics in Circular Statistics*. World Scientific Press, Singapore.
- Jones, M. C. and Pewsey, A. (2005). A family of symmetric distributions on the circle, *Journal of the American Statistical Association*, **100**, 1422–1428.
- Jones, M. C. and Pewsey, A. (2012). Inverse Batschelet distributions for circular data, *Biometrics*, **68**, 183–193.
- Ley, C. and Verdebout, T. (2014). Simple optimal tests for circular reflective symmetry about a specified median direction. *Statistica Sinica*, **24**, 1319–1339.
- Ley, C. and Verdebout, T. (2017a). Skew-rotationally-symmetric distributions and related efficient inferential procedures, *Journal of Multivariate Analysis*, **59**, 67–81.
- Ley, C. and Verdebout, T. (2017b). *Modern Directional Statistics*. CRC Press.
- Miyata, Y., Shiohama, T., and Abe, T. (2019). Identifiability of asymmetric circular and cylindrical distributions, Manuscript submitted for publication.
- 宮田庸一, 塩濱敬之, 阿部俊弘. (2018). 非対称な円周分布による有限混合分布とその推定について (Statistical Inference and Modelling). 数理解析研究所講究録, No. 2091, 96–115.
- 清水 邦夫 (2018). 角度データのモデリング (ISM シリーズ:進化する統計数理), 近代科学社.
- Shimizu, K. and Iida, K. (2002). Pearson type VII distributions on spheres, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **31**, 513–526.
- Umbach, D. and Jammalamadaka, S. R. (2009). Building asymmetry into circular distributions, *Statistics & Probability Letters*, **79**, 659–663.
- von Mises, R. (1918). Über die “Ganzzahligkeit” der Atomgewichte und verwandte Fragen, *Physikal. Z.*, **19**, 490–500.