

パレート分布における形状母数の推定とリスクの比較

大阪府立大学大学院理学系研究科 藪野 摩周

Mashu Yabuno

Graduate School of Science, Osaka Prefecture University

概要

パレート分布の尺度母数が制限されているときに、形状母数の推定問題を考察する。従来知られていたすべての推定量を改良する推定量を提案する。数値実験によっても提案する推定量が優れていることを確認する。

1 導入

パレート分布は人口集積、ネットワーク間でやり取りされるデータ容量、生物属あたりの生物種のバリエーションのモデル化など広範な研究領域に渡って用いられている確率分布である。この分布に関する推定問題は広範囲に渡り多角的に研究されてきており、農業、生物学、産業、経済など様々な分野で応用されている。

一方、制限された母数空間における決定論的推定問題は、Katz [4] によってはじめて提起された。彼は制限された母数空間での推定量の許容性やミニマックス性について述べている。例えば、1母数の指数型分布族において母数制約されているときの一般化ベイズ推定量は許容的であり、かつミニマックスであることを示した。また、Tripathi et al. [10], [11] は、尺度母数に制限がある場合と形状母数に制限がある場合に、パレート分布の母数の推定問題を考察した。そして、Patra and Kumar [8] は、パレート分布の尺度母数に制限がある場合に、形状母数の推定問題を考えた。ここでは、Stein [9], Brewster and Zidek [2] 及び Kubokawa [5] の手法を用いて導出した推定量のリスク関数を比較し、数値実験により Stein [9] の手法による推定量が優れていると主張している。しかし、その根拠は曖昧に感じられ、再考の余地があるものと思われる。そこで、本論では Patra and Kumar [8] が扱った問題についてさらに深く考察し、Patra and Kumar [8] が導出したすべての推定量よりも優れた推定量を提案することを目的とする。さらに推定量の優劣を数値実験によっても確認する。

本論の構成は以下のとおりである。第2節では本論での設定、記号、および後節で用いる補題などの準備を行う。第3節では、Patra and Kumar [8] が考察した推定量の他に、一様最小分散不偏推定量の紹介を行う。第4節では、第3節で紹介したすべての推定量を優越する推定量を提案する。また、第5節で数値実験を行い、提案する推定量が他の推定量を優越することを可視化する。

2 準備

X_1, X_2, \dots, X_n をパレート分布 $\text{Pa}(\theta)$ からの無作為標本とする。ただし、 $\theta = (\alpha, \beta)$ は未知であり、 $\theta \in \Theta := \{(\alpha, \beta) : 0 < \alpha < \delta, \beta > 0\}$ 、 $n \geq 3$ である。また、 $\delta \in (0, \infty)$ は既知とする。ここで、パレート分布 $\text{Pa}(\theta)$ の確率密度関数は

$$f(x, \theta) = \frac{\beta \alpha^\beta}{x^{\beta+1}} \quad (\alpha \leq x < \infty, 0 < \alpha < \delta, \beta > 0)$$

で与えられる。いま、

$$X_{(1)} := \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}, \quad S_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \frac{X_i}{X_{(1)}}, \quad T_n := \log \frac{X_{(1)}}{\delta}$$

とする。このとき、Neyman の因子分解定理より (S_n, T_n) は θ に関する完備十分統計量となることがわかり、 S_n, T_n は独立にそれぞれガンマ分布 $Ga(n-1, n\beta)$ 、指数分布 $Ex(\log(\alpha/\delta), n\beta)$ に従う。つまり、 S_n, T_n の確率密度関数はそれぞれ、

$$\begin{aligned} f_{S_n}(s, \theta) &= \frac{(n\beta)^{n-1}}{\Gamma(n-1)} s^{n-2} e^{-n\beta s} \quad (s > 0), \\ f_{T_n}(t, \theta) &= n\beta e^{-n\beta(t - \log(\alpha/\delta))} \quad (t \geq \log(\alpha/\delta)) \end{aligned} \quad (2.1)$$

である。ここで、

$$V_n := \frac{T_n}{S_n}$$

とすると、 (S_n, V_n) はまた θ に関する完備十分統計量となり、その同時確率密度関数は

$$f_{S_n, V_n}(s, v, \theta) = \frac{(n\beta)^n}{\Gamma(n-1)} \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{n\beta} s^{n-1} e^{-n\beta s(v+1)} \quad ((s, v) \in D_\alpha) \quad (2.2)$$

となる。ただし、 $D_\alpha := \{(s, v) \in \mathbb{R}^2 \mid sv > \log(\alpha/\delta), s > 0\}$ である。

次に関数 $L(t)$ を以下のように仮定する。

仮定 1. $L(t)$ ($t > 0$) は次を満たす。

(A1) 2 回微分可能。

(A2) $L(1) = 0$ 。

(A3) $L(t) \geq 0$ 。

(A4) 狭義凸関数。

(A5) 積分と極限の順序交換可能。

ここで、 β の推定量 $\hat{\beta}$ の損失関数を $L(\hat{\beta}/\beta)$ とし、 $\hat{\beta}$ のリスク関数を $R_\theta(\hat{\beta}, \beta) = E_\theta[L(\hat{\beta}/\beta)]$ とする。

つぎに、本論で扱う推定量のリスク関数を計算する過程で必然的に現れる数列について説明する。数列 a_n は、

$$\int_0^{\infty} L\left(\frac{a}{z}\right) z^{n-2} e^{-z} dz$$

を最小にするものとする。 a_n について、以下のことが成り立つ。

補題 2.1. (i) a_n は

$$\int_0^{\infty} L'\left(\frac{a_n}{z}\right) z^{n-3} e^{-z} dz = 0$$

の解であり、これは \mathbb{R}_+ に一意に存在する。

(ii) a_n は単調増加である。

証明. (i) 関数 $g(a)$ を、

$$g(a) := \int_0^{\infty} L'\left(\frac{a}{z}\right) z^{n-3} e^{-z} dz$$

とおくと、仮定 1 (A4) より、 $L''(t) \geq 0$ であり、

$$g'(a) = \int_0^{\infty} L''\left(\frac{a}{z}\right) z^{n-4} e^{-z} dz > 0$$

となる。また、 $L(t)$ を $t = 1$ でテイラー展開すると、 $L(1) = 0$ であるので、

$$L(t) = L'(1 + (t-1)\theta)(t-1) \geq 0 \quad (0 < \theta < 1)$$

となる。したがって、

$$L'(t) \begin{cases} \geq 0 & (t \geq 1), \\ < 0 & (0 < t < 1) \end{cases}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +0} g(a) &= \int_0^{\infty} \lim_{a \rightarrow +0} L'\left(\frac{a}{z}\right) z^{n-3} e^{-z} dz < 0, \\ \lim_{a \rightarrow \infty} g(a) &= \int_0^{\infty} \lim_{a \rightarrow \infty} L'\left(\frac{a}{z}\right) z^{n-3} e^{-z} dz > 0 \end{aligned}$$

となる。以上より、 $g(a) = 0$ の解、 $a = a_n$ は \mathbb{R}_+ に一意に存在することがわかる。

(ii) 関数 $F(x, y)$ を、

$$F(x, y) := \int_0^{\infty} L'\left(\frac{y}{z}\right) z^{x-3} e^{-z} dz$$

とおくとき、 $F(x, y) = 0$ を満たす y を $y(x)$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} &= \int_0^{\infty} L'\left(\frac{y}{z}\right) z^{x-3} e^{-z} \log z dz, \\ \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} &= \int_0^{\infty} L''\left(\frac{y}{z}\right) z^{x-4} e^{-z} dz > 0 \end{aligned}$$

となり, 陰関数定理より,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\int_0^\infty L'(y/z) z^{x-3} e^{-z} \log z dz}{\int_0^\infty L''(y/z) z^{x-4} e^{-z} dz}$$

となる. ここで, $\log y \cdot F(x, y) = 0$ であるので,

$$\begin{aligned} & -\int_0^\infty L'\left(\frac{y}{z}\right) z^{x-3} e^{-z} \log z dz \\ &= -\int_0^\infty L'\left(\frac{y}{z}\right) z^{x-3} e^{-z} \log z dz + \int_0^\infty L'\left(\frac{y}{z}\right) z^{x-3} e^{-z} \log y dz \\ &= \int_0^\infty L'\left(\frac{y}{z}\right) z^{x-3} e^{-z} \log\left(\frac{y}{z}\right) dz \\ &= \int_0^y L'\left(\frac{y}{z}\right) z^{x-3} e^{-z} \log\left(\frac{y}{z}\right) dz + \int_y^\infty L'\left(\frac{y}{z}\right) z^{x-3} e^{-z} \log\left(\frac{y}{z}\right) dz > 0 \end{aligned}$$

となる. よって, $dy/dx > 0$ となり, a_n は単調増加であることがわかる. \square

3 先行結果について

本節では, Patra and Kumar [8] によって扱われた推定量, 及び一様最小分散不偏推定量について紹介する.

3.1 最尤推定量

対数尤度関数は

$$l(\theta) = n \log \beta + n \beta \log \alpha - (\beta + 1) \sum_{i=1}^n \log x_i \quad (\theta \in \Theta)$$

で与えられる. したがって, α の最尤推定量は $\hat{\alpha}_{\text{ML}} = \min\{X_{(1)}, \delta\}$ となる. また,

$$\frac{\partial}{\partial \beta} l(\hat{\alpha}_{\text{ML}}, \beta) = \frac{n}{\beta} + n \log \hat{\alpha}_{\text{ML}} - \sum_{i=1}^n \log x_i = 0$$

より, β の最尤推定量は,

$$\hat{\beta}_{\text{ML}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log X_i - n \log \hat{\alpha}_{\text{ML}}} = \begin{cases} \frac{1}{S_n(1+V_n)} & (V_n > 0), \\ \frac{1}{S_n} & (V_n \leq 0) \end{cases}$$

となる.

3.2 改良最尤推定量

β の推定量

$$\hat{\beta}_{\text{IML}} = \hat{\beta}_{\text{IML}}(S_n, V_n) = \begin{cases} \frac{a_{n+1}}{n S_n(1+V_n)} & (V_n > 0), \\ \frac{1}{S_n} & (V_n \leq 0) \end{cases}$$

を考える.

定理 3.1 (Patra and Kumar [8]). $\hat{\beta}_{\text{IML}}$ は $\hat{\beta}_{\text{ML}}$ を優越する.

証明. $\hat{\beta}_{\text{ML}}$ と $\hat{\beta}_{\text{IML}}$ のリスク差は (2.2) より

$$\begin{aligned} \Delta_{\theta}(\hat{\beta}_{\text{ML}}, \hat{\beta}_{\text{IML}}) &= R_{\theta}(\hat{\beta}_{\text{ML}}, \beta) - R_{\theta}(\hat{\beta}_{\text{IML}}, \beta) \\ &= E_{\theta} \left[\left\{ L \left(\frac{\hat{\beta}_{\text{ML}}}{\beta} \right) - L \left(\frac{\hat{\beta}_{\text{IML}}}{\beta} \right) \right\} \chi_{\{V_n > 0\}}(V_n) \right] \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ L \left(\frac{n}{n\beta s(1+v)} \right) - L \left(\frac{a_{n+1}}{n\beta s(1+v)} \right) \right\} f_{S_n, V_n}(s, v, \theta) ds dv \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{\alpha}{\delta} \right)^{n\beta} \left\{ \int_0^{\infty} L \left(\frac{n}{x} \right) x^{n-1} e^{-x} dx - \int_0^{\infty} L \left(\frac{a_{n+1}}{x} \right) x^{n-1} e^{-x} dx \right\} > 0 \end{aligned}$$

となり, $\hat{\beta}_{\text{IML}}$ は $\hat{\beta}_{\text{ML}}$ を優越することがわかる. \square

定理 3.1 のことから $\hat{\beta}_{\text{IML}}$ を改良最尤推定量と呼ぶ.

3.3 最小リスク不変推定量

β の最小リスク不変推定量は

$$\hat{\beta}_0 = \hat{\beta}_0(S_n, V_n) = \frac{a_n}{nS_n}$$

である.

3.4 一様最小分散不偏推定量

(2.1) より

$$E_{\theta} \left[\frac{1}{S_n} \right] = \frac{n}{n-2} \beta$$

となるので, Lehmann-Scheffé の定理より β の一様最小分散不偏推定量は

$$\hat{\beta}_{\text{UMVU}} = \hat{\beta}_{\text{UMVU}}(S_n, V_n) = \frac{n-2}{nS_n}$$

となる.

3.5 Stein 型推定量

$A_n := (a_{n+1} - a_n)/a_n$ とおき, β の推定量

$$\hat{\beta}_{\text{ST}} = \hat{\beta}_{\text{ST}}(S_n, V_n) = \begin{cases} \frac{a_{n+1}}{nS_n(1+V_n)} & (0 < V_n < A_n), \\ \frac{a_n}{nS_n} & (V_n \leq 0, A_n \leq V_n) \end{cases}$$

を考える.

定理 3.2 (Patra and Kumar [8]). $\hat{\beta}_{ST}$ は $\hat{\beta}_0$ を優越する.

証明. 補題 2.1 (ii) より $A_n > 0$ である. $\hat{\beta}_{ST}$ と $\hat{\beta}_0$ のリスク差は (2.2) より

$$\begin{aligned} \Delta_\theta \left(\hat{\beta}_{ST}, \hat{\beta}_0 \right) &= R_\theta \left(\hat{\beta}_{ST}, \beta \right) - R_\theta \left(\hat{\beta}_0, \beta \right) \\ &= E_\theta \left[\left\{ L \left(\frac{a_{n+1}}{n\beta S_n (1 + V_n)} \right) - L \left(\frac{a_n}{n\beta S_n} \right) \right\} \chi_{\{0 < V_n < A_n\}} (V_n) \right] \\ &= \int_0^{A_n} \int_0^\infty L \left(\frac{a_{n+1}}{n\beta s (1 + v)} \right) - L \left(\frac{a_n}{n\beta s} \right) f_{S_n, V_n} (s, v, \theta) ds dv \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-1)} \left(\frac{\alpha}{\delta} \right)^{n\beta} \int_0^{A_n} \frac{1}{(1+v)^n} \\ &\quad \times \left\{ \int_0^\infty L \left(\frac{a_{n+1}}{x} \right) x^{n-1} e^{-x} dx - \int_0^\infty L \left(\frac{(1+v)a_n}{x} \right) x^{n-1} e^{-x} dx \right\} dv < 0 \end{aligned}$$

となり, $\hat{\beta}_{ST}$ は $\hat{\beta}_0$ を優越することがわかる. □

3.6 Brewster-Zidek 型推定量

まず, 関数 $\phi_n(x)$ を以下のように仮定する.

仮定 2. 関数 $\phi_n(x)$ ($x > 0$) は以下の条件を満たすとす.

(B1) 各 n に対して, $\phi'_n(x) \leq 0$.

(B2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_n(x) = a_n$.

(B3) $\int_0^\infty \int_0^x L' \left(\frac{\phi(x)}{y} \right) y^{n-2} e^{-y(1+v)} dv dy \leq 0$.

このとき,

$$\hat{\beta}_{\phi_n} = \hat{\beta}_{\phi_n}(S_n, V_n) = \begin{cases} \frac{\phi_n(V_n)}{nS_n} & (V_n > 0), \\ \frac{a_n}{nS_n} & (V_n \leq 0) \end{cases}$$

とする.

定理 3.3 (Patra and Kumar [8]). $\hat{\beta}_{\phi_n}$ は $\hat{\beta}_0$ を優越する.

証明. $Y_n = n\beta S_n$, $V_n = T_n/S_n$ とすると, (Y_n, V_n) の同時確率密度関数は

$$f_{Y_n, V_n}(y, v, \theta) = \frac{1}{\Gamma(n-1)} \left(\frac{\alpha}{\delta} \right)^{n\beta} y^{n-1} e^{-y(1+v)} \quad (yv > n\beta \log(\alpha/\delta), y > 0) \quad (3.1)$$

となる。また、 $\hat{\beta}_{\phi_n}$ と $\hat{\beta}_0$ のリスク差は (3.1) より

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\theta}(\hat{\beta}_{\phi_n}, \hat{\beta}_0) &= R_{\theta}(\hat{\beta}_0, \beta) - R_{\theta}(\hat{\beta}_{\phi_n}, \beta) = E_{\theta} \left[L \left(\frac{\hat{\beta}_0}{\beta} \right) \right] - E_{\theta} \left[L \left(\frac{\hat{\beta}_{\phi_n}}{\beta} \right) \right] \\
 &= E_{\theta} \left[L \left(\frac{a_n}{\sigma_n S_n} \right) \right] - E_{\theta} \left[L \left(\frac{\phi_n(V_n)}{\sigma_n S_n} \right) \right] = E_{\theta} \left[L \left(\frac{a_n}{Y_n} \right) \right] - E_{\theta} \left[L \left(\frac{\phi_n(V_n)}{Y_n} \right) \right] \\
 &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_1^{\infty} L' \left(\frac{\phi_n(zv)}{y} \right) \frac{v}{y} \phi'_n(zv) f_{Y_n, V_n}(y, v, \theta) dz dv dy \\
 &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_v^{\infty} L' \left(\frac{\phi_n(x)}{y} \right) \frac{\phi'_n(x)}{y} f_{Y_n, V_n}(y, v, \theta) dx dv dy \\
 &= \int_0^{\infty} \phi'_n(x) \left[\int_0^{\infty} \int_0^x L' \left(\frac{\phi_n(x)}{y} \right) \frac{1}{y} f_{Y_n, V_n}(y, v, \theta) dv dy \right] dx \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n-1)} \left(\frac{\alpha}{\delta} \right)^{n\beta} \int_0^{\infty} \phi'_n(x) \left[\int_0^{\infty} \int_0^x L' \left(\frac{\phi_n(x)}{y} \right) y^{n-2} e^{-y(1+v)} dv dy \right] dx
 \end{aligned}$$

となる。(B1), (B3) より $\Delta_{\theta}(\hat{\beta}_{\phi_n}, \hat{\beta}_0) > 0$ となり、 $\hat{\beta}_{\phi_n}$ は $\hat{\beta}_0$ を優越することがわかる。□

仮定 2 (B3) において、等号が成り立つ ϕ_n を ϕ_0 とする。つまり、 ϕ_0 は

$$\int_0^{\infty} \int_0^x L' \left(\frac{\phi_0(x)}{y} \right) y^{n-2} e^{-y(1+v)} dv dy = 0$$

を満たすものとする。このとき、

$$\hat{\beta}_{\text{BZ}} = \hat{\beta}_{\text{BZ}}(S_n, V_n) = \begin{cases} \frac{\phi_0(V_n)}{nS_n} & (V_n > 0), \\ \frac{a_n}{nS_n} & (V_n \leq 0) \end{cases}$$

を Brewster-Zidek 型推定量という。

系 3.1. $\hat{\beta}_{\text{BZ}}$ は $\hat{\beta}_0$ を優越する。

3.7 一般化ベイズ推定量

事前分布として

$$\pi_k(\theta) \sim \frac{\beta^{k-1}}{\alpha} \quad (0 < \alpha < \delta, \beta > 0, k \geq 0) \quad (3.2)$$

を考える。このとき、推定量 $\hat{\beta} = \hat{\beta}(S_n, V_n)$ の事後リスクは (2.2) より

$$\begin{aligned}
 R(\hat{\beta}(s, v), \beta | s, v) &= \frac{1}{\int_{\Theta} f_{S_n, V_n}(s, v, \theta) \pi_k(\theta) d\theta} \int_{\Theta} L_{\theta} \left(\frac{\hat{\beta}(s, v)}{\beta} \right) f_{S_n, V_n}(s, v, \theta) \pi_k(\theta) d\theta \\
 &= \begin{cases} \frac{n\{ns(v+1)\}^{n+k-1}}{\Gamma(n+k-1)} \int_0^{\infty} L \left(\frac{\hat{\beta}(s, v)}{\beta} \right) \beta^{n+k-2} e^{-n\beta s(v+1)} d\beta & (v > 0), \\ \frac{n(n\beta)^{n+k-1}}{\Gamma(n+k-1)} \int_0^{\infty} L \left(\frac{\hat{\beta}(s, v)}{\beta} \right) \beta^{n+k-2} e^{-n\beta s} d\beta & (v \leq 0) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n+k-1)} \int_0^{\infty} L \left(\frac{n\hat{\beta}(s, v)s(1+v)}{x} \right) x^{n+k-2} e^{-x} dx & (v > 0), \\ \frac{1}{\Gamma(n+k-1)} \int_0^{\infty} L \left(\frac{n\hat{\beta}(s, v)s}{x} \right) x^{n+k-2} e^{-x} dx & (v \leq 0) \end{cases}
 \end{aligned}$$

となる. これを最小にする $\hat{\beta}$, すなわち β の一般化ベイズ推定量は

$$\hat{\beta}_{\pi_k} := \hat{\beta}_{\pi_k}(S_n, V_n) = \begin{cases} \frac{a_{n+k}}{nS_n(1+V_n)} & (V_n > 0), \\ \frac{a_{n+k}}{nS_n} & (V_n \leq 0) \end{cases}$$

となることがわかる.

4 提案される推定量

本節では, 前節で紹介したすべての推定量よりも優れている推定量を提案する. β の推定量

$$\hat{\beta}_Y := \hat{\beta}_Y(S_n, V_n) = \begin{cases} \frac{a_{n+1}}{nS_n(1+V_n)} & (V_n > 0), \\ \frac{a_n}{nS_n} & (V_n \leq 0) \end{cases}$$

を考える.

定理 4.1. $\hat{\beta}_Y$ は, $\hat{\beta}_{ML}$, $\hat{\beta}_{IML}$, $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_{ST}$, $\hat{\beta}_{BZ}$, $\hat{\beta}_{\pi_k}$ を優越する.

証明. $\hat{\beta}_{IML}$ と $\hat{\beta}_Y$ のリスク差は (2.2) より

$$\begin{aligned} \Delta_\theta(\hat{\beta}_{IML}, \hat{\beta}_Y) &= R_\theta(\hat{\beta}_{IML}, \beta) - R_\theta(\hat{\beta}_Y, \beta) \\ &= E_\theta \left[\left\{ L\left(\frac{\hat{\beta}_{IML}}{\beta}\right) - L\left(\frac{\hat{\beta}_Y}{\beta}\right) \right\} \chi_{\{V_n \leq 0\}}(V_n) \right] \\ &= \int_0^\infty \int_{\mu/s}^0 \left\{ L\left(\frac{a_{n+1}}{n\beta s}\right) - L\left(\frac{a_n}{n\beta s}\right) \right\} f_{S_n, V_n}(s, v, \theta) ds dv \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-1)} \left\{ 1 - \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{n\beta} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \int_0^\infty L\left(\frac{a_{n+1}}{x}\right) x^{n-2} e^{-x} dx - \int_0^\infty L\left(\frac{a_n}{x}\right) x^{n-2} e^{-x} dx \right\} > 0 \quad (4.1) \end{aligned}$$

となり, $\hat{\beta}_Y$ は $\hat{\beta}_{IML}$ を優越することがわかる.

$\hat{\beta}_{ML}$ と $\hat{\beta}_Y$ のリスク差は, 定理 3.1, (4.1) より

$$R_\theta(\hat{\beta}_{ML}, \beta) > R_\theta(\hat{\beta}_{IML}, \beta) > R_\theta(\hat{\beta}_Y, \beta)$$

となり, $\hat{\beta}_Y$ は $\hat{\beta}_{ML}$ を優越することがわかる.

$\hat{\beta}_{ST}$ と $\hat{\beta}_Y$ のリスク差は (2.2) より

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\theta}(\hat{\beta}_{ST}, \hat{\beta}_Y) &= R_{\theta}(\hat{\beta}_{ST}, \beta) - R_{\theta}(\hat{\beta}_Y, \beta) \\
 &= E_{\theta} \left[\left\{ L\left(\frac{\hat{\beta}_{ST}}{\beta}\right) - L\left(\frac{\hat{\beta}_Y}{\beta}\right) \right\} \chi_{\{A_n \leq V_n\}}(V_n) \right] \\
 &= \int_0^{A_n} \int_0^{\infty} \left\{ L\left(\frac{a_n}{n\beta s}\right) - L\left(\frac{a_{n+1}}{n\beta s(1+v)}\right) \right\} f_{S_n, V_n}(s, v, \theta) ds dv \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n-1)} \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{n\beta} \int_0^{A_n} \frac{1}{(1+v)^n} \\
 &\quad \times \left\{ \int_0^{\infty} L\left(\frac{(1+v)a_n}{x}\right) x^{n-1} e^{-x} dx - \int_0^{\infty} L\left(\frac{a_{n+1}}{x}\right) x^{n-1} e^{-x} dx \right\} dv > 0
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

となり, $\hat{\beta}_Y$ は $\hat{\beta}_{ST}$ を優越することがわかる.

$\hat{\beta}_0$ と $\hat{\beta}_Y$ のリスク差は, 定理 3.2, (4.2) より,

$$R_{\theta}(\hat{\beta}_0, \beta) > R_{\theta}(\hat{\beta}_{ST}, \beta) > R_{\theta}(\hat{\beta}_Y, \beta)$$

となり, $\hat{\beta}_Y$ は $\hat{\beta}_0$ を優越することがわかる.

$\hat{\beta}_{BZ}$ と $\hat{\beta}_Y$ のリスク差は (2.2) より

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\theta}(\hat{\beta}_{BZ}, \hat{\beta}_Y) &= R_{\theta}(\hat{\beta}_{BZ}, \beta) - R_{\theta}(\hat{\beta}_Y, \beta) \\
 &= E_{\theta} \left[\left\{ L\left(\frac{\hat{\beta}_{BZ}}{\beta}\right) - L\left(\frac{\hat{\beta}_Y}{\beta}\right) \right\} \chi_{\{V_n > 0\}}(V_n) \right] \\
 &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ L\left(\frac{\phi_0(v)}{n\beta s}\right) - L\left(\frac{a_{n+1}}{n\beta s(1+v)}\right) \right\} f_{S_n, V_n}(s, v, \theta) ds dv \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n-1)} \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{n\beta} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+v)^n} \\
 &\quad \times \left\{ \int_0^{\infty} L\left(\frac{(1+v)\phi_0(v)}{x}\right) x^{n-1} e^{-x} dx - \int_0^{\infty} L\left(\frac{a_{n+1}}{x}\right) x^{n-1} e^{-x} dx \right\} dv > 0
 \end{aligned}$$

となり, $\hat{\beta}_Y$ は $\hat{\beta}_{BZ}$ を優越することがわかる.

$\hat{\beta}_{\pi_k}$ と $\hat{\beta}_Y$ のリスク差は (2.2) より

$$\begin{aligned}
 \Delta_\theta \left(\hat{\beta}_{\pi_k}, \hat{\beta}_Y \right) &= R_\theta \left(\hat{\beta}_{\pi_k}, \beta \right) - R_\theta \left(\hat{\beta}_Y, \beta \right) \\
 &= E_\theta \left[\left\{ L \left(\frac{\hat{\beta}_{\pi_k}}{\beta} \right) - L \left(\frac{\hat{\beta}_Y}{\beta} \right) \right\} \left(\chi_{\{V_n > 0\}} (V_n) + \chi_{\{V_n \leq 0\}} (V_n) \right) \right] \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ L \left(\frac{a_{n+k}}{n\beta s(1+v)} \right) - L \left(\frac{a_{n+1}}{n\beta s(1+v)} \right) \right\} f_{S_n, V_n} (s, v, \theta) ds dv \\
 &\quad + \int_0^\infty \int_{\log(\alpha/\delta)/s}^0 \left\{ L \left(\frac{a_{n+k}}{n\beta s} \right) - L \left(\frac{a_n}{n\beta s} \right) \right\} f_{S_n, V_n} (s, v, \theta) ds dv \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{\alpha}{\delta} \right)^{n\beta} \left\{ \int_0^\infty L \left(\frac{a_{n+k}}{x} \right) x^{n-1} e^{-x} dx - \int_0^\infty L \left(\frac{a_{n+1}}{x} \right) x^{n-1} e^{-x} dx \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(n-1)} \left\{ 1 - \left(\frac{\alpha}{\delta} \right)^{n\beta} \right\} \\
 &\quad \times \left\{ \int_0^\infty L \left(\frac{a_{n+k}}{x} \right) x^{n-2} e^{-x} dx - \int_0^\infty L \left(\frac{a_n}{x} \right) x^{n-2} e^{-x} dx \right\} > 0
 \end{aligned}$$

となり, $\hat{\beta}_Y$ は $\hat{\beta}_{\pi_k}$ を優越することがわかる。 □

5 数値実験

本節では, 第 4 章で提案した推定量 $\hat{\beta}_Y$ の良さを数値実験により確認する. 損失関数は, 二乗誤差損失関数, エントロピー損失関数, シンメトリック損失関数の 3 つとする. 各損失関数及び対応する数列 a_n を表 1 にまとめた. $\delta = 1$, サンプルサイズ $n = 10, 20, 30, 50$, $\beta = 1, 2, 5, 10$, 繰り返し回数 10^6 として, 推定量 $\hat{\beta}_{ML}$, $\hat{\beta}_{IML}$, $\hat{\beta}_{UMVU}$, $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_{ST}$, $\hat{\beta}_{BZ}$, $\hat{\beta}_{\pi_0}$, $\hat{\beta}_Y$ のリスクの平均を図 1~4 (二乗誤差損失関数), 図 5~8 (エントロピー損失関数), 図 9~12 (シンメトリック損失関数) に表した. これらの図より, $\hat{\beta}_Y$ のリスクの平均が, 他のすべての推定量のリスクの平均より小さいことがわかる¹.

— $\hat{\beta}_{ML}$	— $\hat{\beta}_0$	— $\hat{\beta}_{ST}$	— $\hat{\beta}_{GB}$
— $\hat{\beta}_{IML}$	— $\hat{\beta}_{UMVU}$	— $\hat{\beta}_{BZ}$	— $\hat{\beta}_Y$

¹ モノクロで作成することを前提としていなかったため判断しづらいですが, $\hat{\beta}_Y$ のリスクの平均が他のすべての推定量のリスクの平均を下回っています.

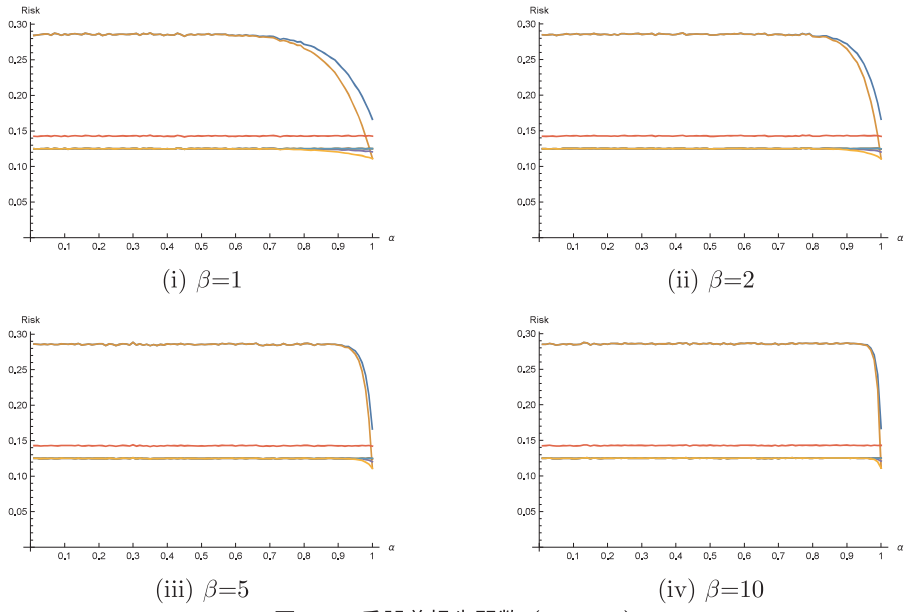


图 1. 二乘誤差損失関数 ($n = 10$)

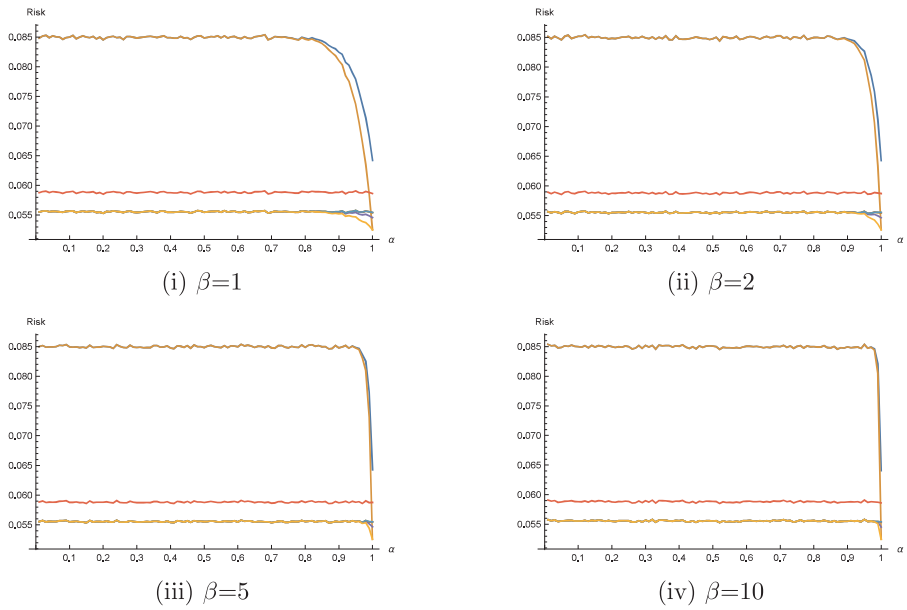


图 2. 二乘誤差損失関数 ($n = 20$)

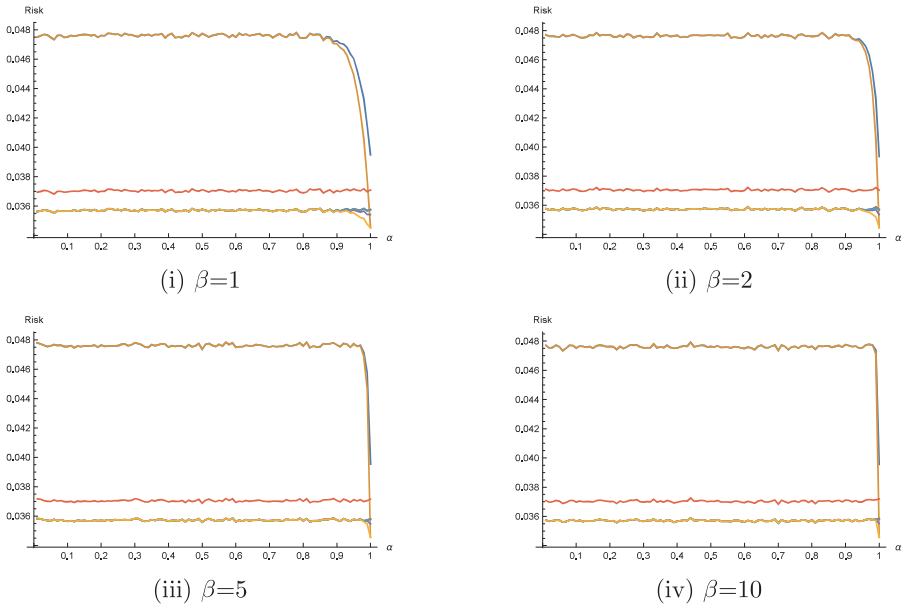


图 3. 二乘誤差損失関数 ($n = 30$)

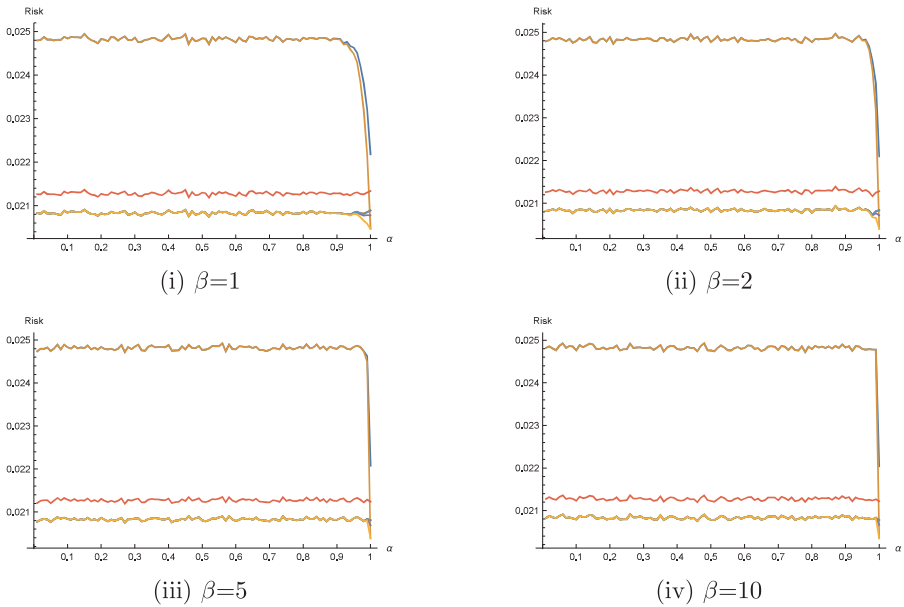


图 4. 二乘誤差損失関数 ($n = 50$)

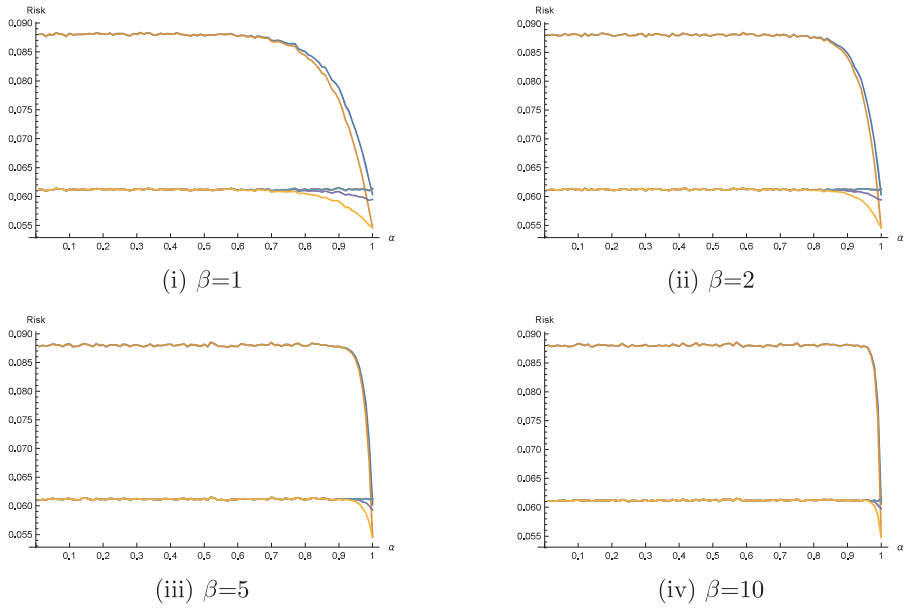


図 5. エントロピー損失関数 ($n = 10$)

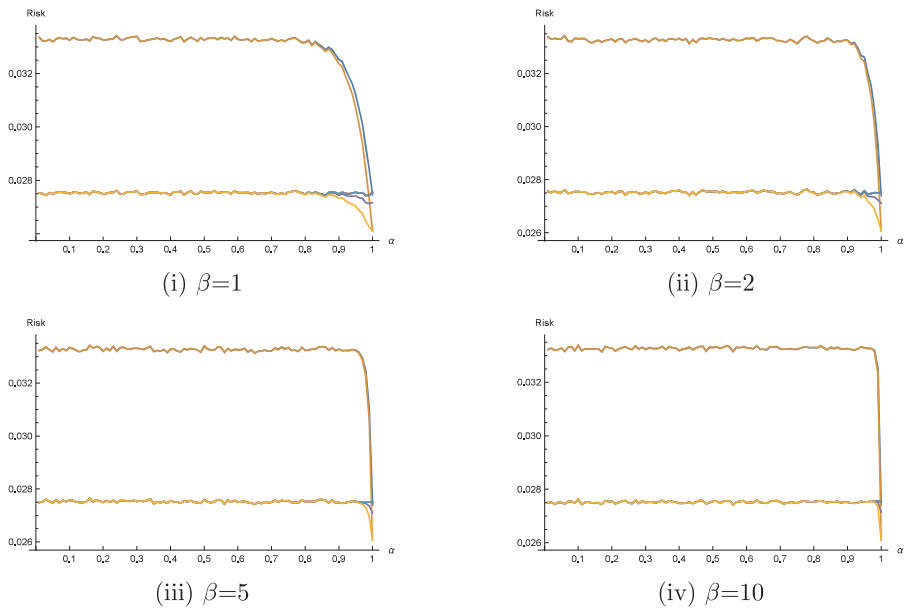


図 6. エントロピー損失関数 ($n = 20$)

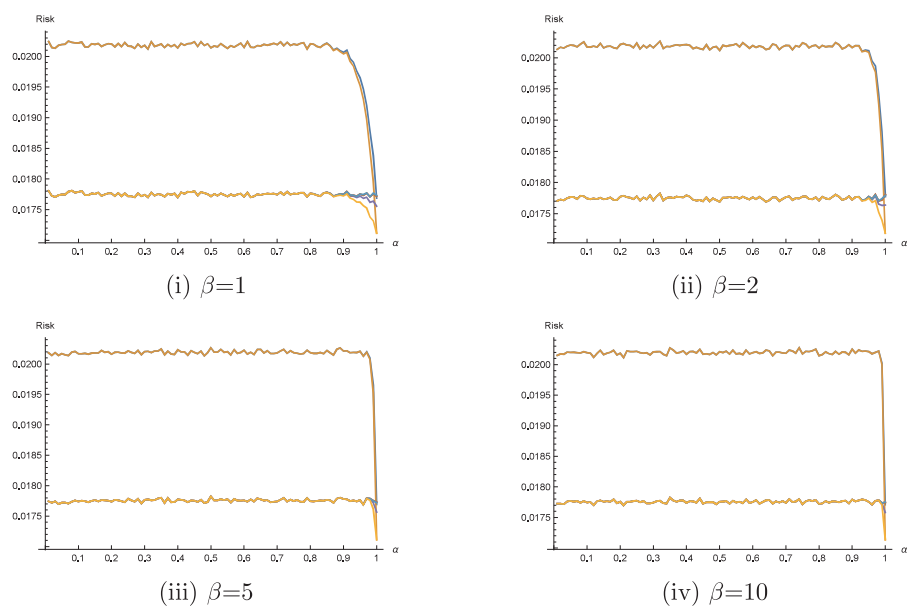


図 7. エントロピー損失関数 ($n = 30$)

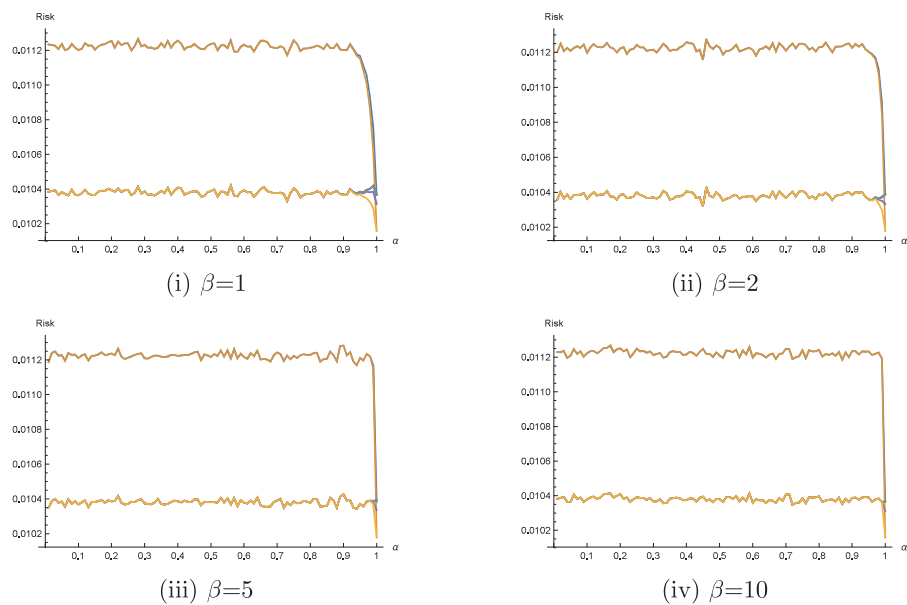


図 8. エントロピー損失関数 ($n = 50$)

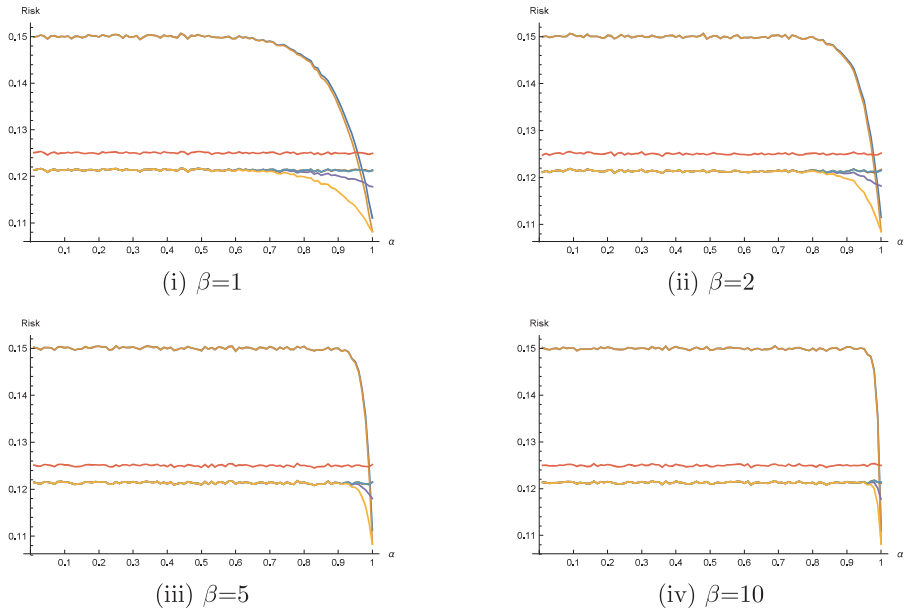


図 9. シンメトリック損失関数 ($n = 10$)

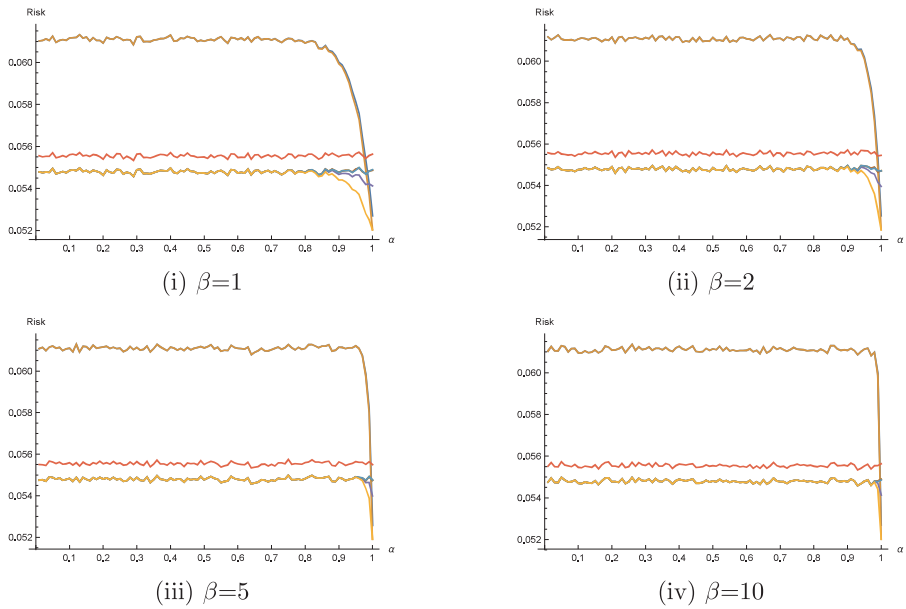


図 10. シンメトリック損失関数 ($n = 20$)

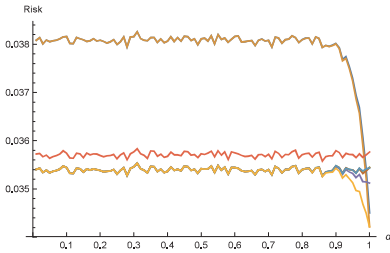
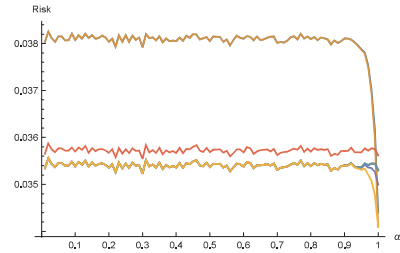
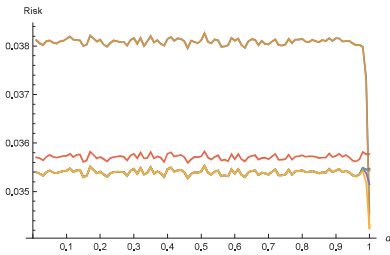
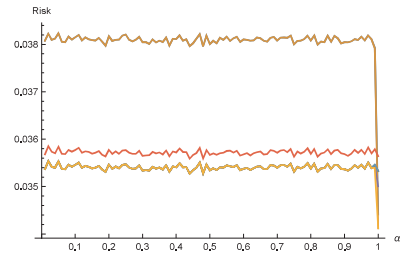
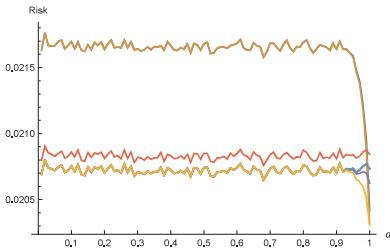
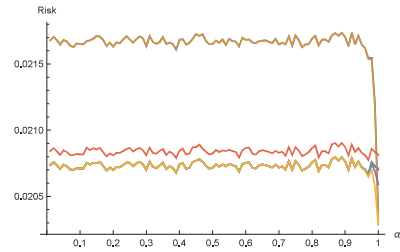
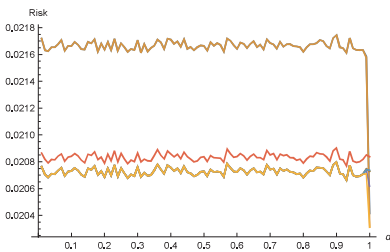
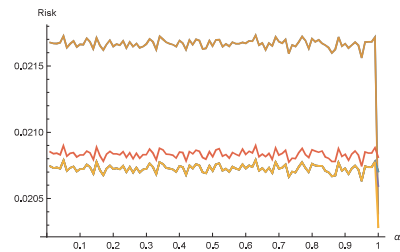
(i) $\beta=1$ (ii) $\beta=2$ (iii) $\beta=5$ (iv) $\beta=10$ 図 11. シンメトリック損失関数 ($n = 30$)(i) $\beta=1$ (ii) $\beta=2$ (iii) $\beta=5$ (iv) $\beta=10$ 図 12. シンメトリック損失関数 ($n = 50$)

表 1. 損失関数と対応する数列 a_n

損失関数	二乗誤差	エントロピー	シンメトリック
$L(t)$	$(t-1)^2$	$t - \log t - 1$	$t + \frac{1}{t} - 2$
a_n	$n-3$	$n-2$	$\sqrt{(n-1)(n-2)}$

参考文献

- [1] B. R. Asrabadi (1990). Estimation in the Pareto distribution. *Metrika* **37**, no. 3-4, 199-205.
- [2] J. F. Brewster and J. Zidek (1974). Improving on Equivariant Estimators. *Ann. Statist.* **2**, no. 1, 21-38.
- [3] R. H. Farrell (1964). Estimators of a Location Parameter in the Absolutely Continuous Case. *Ann. Math. Statist.* **35**, no. 3, 949-998.
- [4] M. W. Katz (1961). Admissible and Minimax Estimates of Parameters in Truncated Spcaes. *Ann. Statist.* **32**, no. 1, 136-142.
- [5] T. Kubokawa (1994). A Unified Approach to Improving Equivariant Estimator. *Ann. Statist.* **22**, no. 1, 290-299.
- [6] E. L. Lehmann and George Casella (1998). *Theory of Point Estimation*. Second edition.
- [7] H. J. Malik (1970). Estimation of the parameters of the Pareto distribution. *Metrika* **15**, no. 1, 126-132.
- [8] L. K. Patra and S. Kumar (2017). Classes of Improved Estimators for Parameters of a Paleto Distribution. *Math. Methods Statist.* **26**, no. 3, 226-235.
- [9] C. Stein (1964). Inadmissibility of the Usual Estimator for the Variance of a Normal Distribution with Unknown Mean. *Ann. Inst. Statisit. Math.* **16**, no. 1, 155-160.
- [10] Y. Tripathi, S. Kumar and C. Petropoulos (2014). Improved estimators for parameters of a Pareto distribution with a restricted scale. *Stat. Methodol.* **18**, 1-13.
- [11] Y. Tripathi, S. Kumar and C. Petropoulos (2016). Estimating the shape parameter of a Pareto distribution under restrictions. *Metrika* **79**, no. 1, 91-111.