数理解析研究所講究録 第2124巻 2019年 148-154

Empirical Bayes estimation of a truncation parameter for a oTEF

筑波大学・数理物質系　赤平　昌文
Masafumi Akahira
Institute of Mathematics
University of Tsukuba

1. はじめに

正則と非正則の両方の性質を併せもつ分布族として, 切断指数型分布族は有用である. たとえば, その分布族に属するパレート (Pareto) 分布はファイナンス, 物理学, 水文学, 天文学等の分野でよく用いられ, その性質も研究されている (Johnson et al.[JKB94], Arnold[Ar15]).

従来, 切断母数 γ と自然母数 θ をもつ片側切断指数型分布族 (one-sided truncated exponential family of distributions, 略して oTEF) の分布から得られた大きさ n の無作為標本に基づいて γ の最尤推定量 (maximum likelihood estimator, 略して MLE), ベイズ (Bayes) 推定量の漸近平均, 漸近分散を 2 次のオーダーまで求めて比較が行われた (Akahira[A17]). しかし, ベイズ推定量の場合には事前分布を主観的に選ぶことも多いので, 本稿では, 客観的にベイズ推定を行うために, 経験的ベイズの観点から γ の推定について考察する. 実際, γ の経験的ベイズ推定量を求め, その漸近平均, 漸近分散を 2 次のオーダーまで計算する. そして, γ の補正 MLE, ベイズ推定量との漸近的比較も行う.

2. 片側切断指数型分布族と共役事前分布族

まず, $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立に, いずれも (Lebesgue 測度に関する) 密度

$$p(x;\theta,\gamma) = \begin{cases} a(x)e^{\theta u(x)}/b(\theta,\gamma) & (\gamma \le x < d), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{2.1}$$

をもつ片側切断指数型分布族 (oTEF)$\mathcal{P}$ の分布に従う確率変数列とする (Bar-Lev[BL84], [A17]). ただし, $-\infty \le c < \gamma < d \le \infty$ とし, $a(\cdot)$ は正値で, ほとんど至るところ連続とし, $u(\cdot)$ は区間 (γ, d) 上で絶対連続で $du(x)/dx \not\equiv 0$ とする. また, $\gamma \in (c,d)$ について

$$\Theta(\gamma) := \left\{ \theta \;\middle|\; 0 < b(\theta,\gamma) := \int_\gamma^d a(x)e^{\theta u(x)}dx < \infty \right\}$$

とし, 任意の $\gamma \in (c,d)$ について $\Theta \equiv \Theta(\gamma)$ は空でない開区間であると仮定する. 次に, γ の事前密度として

$$\pi(\gamma;\eta,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\alpha(\gamma)e^{\eta w(\gamma)}}{\beta(\eta,\xi)} & (\xi \le \gamma < d), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{2.2}$$

となる oTEF の密度を取る．ただし, $c < \xi < d$ とし, $\alpha(\cdot)$ は正値で微分可能とし, $w(\cdot)$ は区間 (ξ, d) 上で微分可能で $w'(\gamma) \not\equiv 0$ とする．また, $\xi \in (c, d)$ について

$$\mathcal{H}(\xi) := \left\{ \eta \;\middle|\; 0 < \beta(\eta, \xi) = \int_\xi^d \alpha(\gamma) e^{\eta w(\gamma)} d\gamma < \infty \right\} \tag{2.3}$$

とし, 任意の $\xi \in (c, d)$ について $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(\xi)$ は空でない開区間であると仮定する．

いま, (2.1) より $\boldsymbol{X} := (X_1, \cdots, X_n)$ の同時密度は

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}; \theta, \gamma) = \begin{cases} \dfrac{\prod_{i=1}^n a(x_i) e^{\theta \sum_{i=1}^n u(x_i)}}{b^n(\theta, \gamma)} & (\gamma \leq x_{(1)},\ x_{(n)} < d), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{2.4}$$

になる．ただし, $x_{(1)} := \min_{1 \leq i \leq n} x_i$, $x_{(n)} := \max_{1 \leq i \leq n} x_i$ とする．このとき, (2.2), (2.4) より $\boldsymbol{X}$ の周辺密度は

$$\begin{aligned} m(\boldsymbol{x}|\theta, \eta, \xi) &:= \int_c^d f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}; \theta, \gamma) \pi(\gamma; \eta, \xi) d\gamma \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n a(x_i) e^{\theta \sum_{i=1}^n u(x_i)}}{\beta(\eta, \xi)} \int_\xi^{x_{(1)}} \frac{\alpha(\gamma) e^{\eta w(\gamma)}}{b^n(\theta, \gamma)} d\gamma \end{aligned} \tag{2.5}$$

となるから, 事後密度は

$$\pi_{\theta,\eta,\xi}(\gamma|\boldsymbol{x}) = \frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}; \theta, \gamma) \pi(\gamma; \eta, \xi)}{\int_c^d f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}; \theta, \gamma) \pi(\gamma; \eta, \xi) d\gamma} = \frac{\alpha(\gamma) e^{\eta w(\gamma)}}{b^n(\theta, \gamma) B(\theta, \eta, \xi)} \chi_{[\xi, x_{(1)}]}(\gamma) \tag{2.6}$$

になる．ただし, $B(\theta, \eta, \xi) := \int_\xi^{x_{(1)}} \alpha(\gamma) e^{\eta w(\gamma)} / b^n(\theta, \gamma) d\gamma$, $\chi_A(x)$ は集合 A の定義関数とする．このとき, θ が既知ならば $\pi_{\theta,\eta,\xi}(\cdot|\boldsymbol{x})$ は oTEF の密度になるので, 事前分布族の oTEF は oTEF $\mathcal{P}$ に対して共役事前分布族になる．

3. 経験的ベイズ推定

前節の設定の下で, $\boldsymbol{X}$ の周辺密度 (2.5) は

$$m(\boldsymbol{x}; \theta, \eta, \xi) = \prod_{i=1}^n a(x_i) e^{\theta \sum_{i=1}^n u(x_i)} \int_\xi^{x_{(1)}} \frac{\pi(\gamma; \eta, \xi)}{b^n(\theta, \gamma)} d\gamma \tag{3.1}$$

になる．ここで, θ, η を既知と仮定し,

$$G(\xi) := \int_\xi^{x_{(1)}} \frac{\pi(\gamma; \eta, \xi)}{b^n(\theta, \gamma)} d\gamma \qquad (c < \xi < x_{(1)})$$

とおく．いま, (2.2), (2.3) より $(\partial/\partial\xi) \log \beta(\eta, \xi) = -\pi(\xi; \eta, \xi)$ となるから $G'(\xi) = 0$ の解は

$$\pi(\xi; \eta, \xi) \int_\xi^{x_{(1)}} \frac{\{\alpha(\gamma)/\alpha(\xi)\} e^{\eta\{w(\gamma) - w(\xi)\}}}{\{b(\theta, \gamma)/b(\theta, \xi)\}^n} d\gamma = 1 \tag{3.2}$$

の解となるから, これを $\xi = \hat{\xi}(x_{(1)})$ とする. 通常の経験的ベイズ法では $G(\xi)$ を最大にする $\xi = \hat{\xi}^*(x_{(1)})$, すなわち $\boldsymbol{X}$ の周辺密度 (3.1) を最大にする $\hat{\xi}^*(x_{(1)})$ を用いて, 2 乗損失による事後リスクを最小にする事後平均 $E_{\theta,\eta,\xi}(\gamma|\boldsymbol{X})$ の ξ に $\hat{\xi}^*(X_{(1)})$ を代入したものを γ の経験的ベイズ (empirical Bayes, 略して EB) 推定量と定義している (Lehmann and Casella[LC98]). ただし, $X_{(1)} = \min_{1\le i\le n} X_i$ とする. しかし, ここでは, (3.2) の解 $\xi = \hat{\xi}(x_{(1)})$ を用いて

$$E_{\theta,\eta,\xi}(\gamma|\boldsymbol{X}) = \int_{\xi}^{X_{(1)}} \gamma\pi_{\theta,\eta,\xi}(\gamma|\boldsymbol{X})d\gamma \tag{3.3}$$

の ξ に $\hat{\xi}(X_{(1)})$ を代入したものを γ の EB 推定量 $\hat{\gamma}_{EB}(\boldsymbol{X})$ と定義する. このとき, (2.4), (2.6), (3.3) より

$$\hat{\gamma}_{EB}(\boldsymbol{X}) = \int_{\hat{\xi}}^{X_{(1)}} \frac{\gamma}{b^n(\theta,\gamma)}\pi(\gamma;\eta,\hat{\xi})d\gamma \Bigg/ \int_{\hat{\xi}}^{X_{(1)}} \frac{1}{b^n(\theta,\gamma)}\pi(\gamma;\eta,\hat{\xi})d\gamma \tag{3.4}$$

となるから, [A17] の第 6.3 節と同様にして, $T_{(1)} := n(X_{(1)}-\gamma)$, $\tau_n := n(\hat{\xi}-\gamma)$ とすれば

$$\hat{\gamma}_{EB} = \gamma + \frac{1}{n}\left\{\int_{\tau_n}^{T_{(1)}} \frac{u\pi\left(\gamma+(u/n);\eta,\hat{\xi}\right)}{b^n\left(\theta,\gamma+(u/n)\right)}du \Bigg/ \int_{\tau_n}^{T_{(1)}} \frac{\pi\left(\gamma+(u/n);\eta,\hat{\xi}\right)}{b^n\left(\theta,\gamma+(u/n)\right)}du\right\}$$

になり, 右辺の第 2 項の分子, 分母を Taylor 展開して, 確率展開

$$\begin{aligned} T_{EB} :=& n(\hat{\gamma}_{EB}-\gamma) \\ =& T_{(1)} - \frac{1}{k} + \frac{1}{kn}\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right)\left(T_{(1)}-\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k^2n}\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k - \tilde{\pi}_{\eta,\hat{\xi}}(\gamma)\right) + O_p\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

を得る. ただし,

$$\begin{aligned} k &= k(\theta,\gamma) = a(\gamma)e^{\theta u(\gamma)}/b(\theta,\gamma), \\ \tilde{\pi}_{\eta,\hat{\xi}}(\gamma) &= \left\{\frac{\partial}{\partial\gamma}\log\pi(\gamma;\eta,\hat{\xi})\right\}\chi_{(\hat{\xi},d)}(\gamma) = \left\{\frac{\alpha'(\gamma)}{\alpha(\gamma)} + \eta w'(\gamma)\right\}\chi_{(\hat{\xi},d)}(\gamma) \end{aligned} \tag{3.6}$$

とする. ここで, $C(\eta,\gamma) = \{\alpha'(\gamma)/\alpha(\gamma)\} + \eta w'(\gamma)$ とおく.

次に, T_{EB} の漸近平均, 漸近分散を求めよう. まず

$$\hat{\xi} = \xi(X_{(1)}) = \hat{\xi}\left(\gamma + \frac{T_{(1)}}{n}\right) = \hat{\xi}(\gamma) + \frac{T_{(1)}}{n}\hat{\xi}'(\gamma) + O_p\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

となる. ここで $\hat{\xi}'(\gamma) \neq 0$ と仮定する. いま, $\hat{\xi}'(\gamma) > 0$ のとき, $\hat{\xi} = \hat{\xi}(X_{(1)}) < \gamma$ は

$$T_{(1)} < \frac{n}{\xi'(\gamma)}\left(\gamma - \hat{\xi}(\gamma)\right) + O_p\left(\frac{1}{n}\right) =: nh(\gamma) + O_p\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.7}$$

と同等になる．なお，$h(\gamma) > 0$ であることに注意．一方，$T_{(1)}$ の漸近密度は

$$f_{T_{(1)}}(t) = \begin{cases} ke^{-kt} - \dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right)(kt^2 - 2t)ke^{-kt} + O_p\left(\dfrac{1}{n^2}\right) & (t > 0), \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases} \tag{3.8}$$

になるから

$$E_\gamma\left[T_{(1)} - \frac{1}{k}\right] = -\frac{1}{k^2 n}\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{3.9}$$

$$E_\gamma\left[\left(T_{(1)} - \frac{1}{k}\right)^2\right] = \frac{1}{k^2} - \frac{4}{k^3 n}\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.10}$$

になる ([A17] の第 2.9 節，第 4.8 節参照)．また，(3.7) より

$$P_\gamma\left\{\hat{\xi} < \gamma\right\} = P_\gamma\left\{T_{(1)} < nh(\gamma) + O_p\left(\frac{1}{n}\right)\right\} = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

になり，そして，(3.6) より

$$E_\gamma\left[\tilde{\pi}_{\eta,\hat{\xi}}(\gamma)\right] = C + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.11}$$

になる．同様にして

$$E_\gamma\left[\tilde{\pi}_{\eta,\hat{\xi}}\left(T_{(1)} - \frac{1}{k}\right)\right] = O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.12}$$

になる．そこで，(3.5), (3.9), (3.11) より

$$\begin{aligned} E_\gamma\left(T_{EB}\right) =& E_\gamma\left[T_{(1)} - \frac{1}{k}\right] + \frac{1}{kn}\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right)E_\gamma\left[T_{(1)} - \frac{1}{k}\right] \\ & - \frac{1}{k^2 n}\left\{\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k - E_\gamma\left(\tilde{\pi}_{\eta,\hat{\xi}}\right)\right\} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ =& -\frac{2}{k^2 n}\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right) + \frac{1}{k^2 n}C + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned} \tag{3.13}$$

となる．さらに，(3.5), (3.9)〜(3.12) より

$$\begin{aligned} E_\gamma\left(T_{EB}^2\right) =& E_\gamma\left[\left(T_{(1)} - \frac{1}{k}\right)^2\right] + \frac{1}{k^2 n}E_\gamma\left[\tilde{\pi}_{\eta,\hat{\xi}}\left(T_{(1)} - \frac{1}{k}\right)\right] \\ & + \frac{2}{kn}\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right)E_\gamma\left[\left(T_{(1)} - \frac{1}{k}\right)\left(T_{(1)} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2 n}\tilde{\pi}_{\eta,\hat{\xi}}\right)\right] \\ & - \frac{2}{k^2 n}\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right)E_\gamma\left[T_{(1)} - \frac{1}{k}\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

$$=\frac{1}{k^2}-\frac{2}{k^3n}\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

となるから, T_{EB} の漸近分散は (3.13) より

$$V_\gamma\left(T_{EB}\right)=\frac{1}{k^2}-\frac{2}{k^3n}\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.14}$$

になる. 次に, $\hat{\xi}'(\gamma)<0$ のときには, $h(\gamma)<0$ となるので, (3.6), (3.8) より $E_\gamma[\tilde{\pi}_{\theta,\eta,\hat{\xi}}(\gamma)]=C+O(1/n)$,

$$E_\gamma\left[\tilde{\pi}_{\theta,\eta,\hat{\xi}}\left(T_{(1)}-\frac{1}{k}\right)\right]=CE_\gamma\left[T_{(1)}-\frac{1}{k}\right]=-\frac{C}{k^2n}\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

となり, T_{EB} の漸近平均, 漸近分散もそれぞれ (3.13), (3.14) になる. よって (3.13), (3.14) より

$$E_\gamma\left(kT_{EB}\right)=-\frac{2}{kn}\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right)+\frac{1}{kn}C+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{3.15}$$

$$V_\gamma\left(kT_{EB}\right)=1-\frac{2}{kn}\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.16}$$

になる. ただし, $C=C(\eta,\gamma)=\{\alpha'(\gamma)/\alpha(\gamma)\}+\eta w'(\gamma)$ とする.

4. 経験的ベイズ推定量とベイズ推定量, 補正 MLE の比較

第 2 節の設定の下で, θ が既知のときに γ の事前密度を $\pi(\gamma)$ とし, 2 乗損失と π に関するベイズ推定量 $\hat{\gamma}_{B,\theta}$ とすれば,

$$\begin{aligned}T_{B,\theta}=&n\left(\hat{\gamma}_{B,\theta}-\gamma\right)\\=&T_{(1)}-\frac{1}{k}+\frac{1}{kn}\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right)T_{(1)}-\frac{1}{k^2n}\left\{2\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right)-\pi_{(1)}\right\}+O_p\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned} \tag{4.1}$$

となる ([A17] の第 6.3 節). ただし, $\pi_{(1)}=\pi_{(1)}(\gamma):=(\partial/\partial\gamma)\log\pi(\gamma)$ とする. また, γ の MLE$\hat{\gamma}_{ML}$ は $X_{(1)}$ となるので, それを偏り補正して

$$\hat{\gamma}^{\theta}_{ML^*}:=X_{(1)}-\frac{1}{\hat{k}_\theta n}$$

とすると, $T^*_{(1)}=n(\hat{\gamma}^{\theta}_{ML^*}-\gamma)$ の確率展開は

$$T^*_{(1)}=T_{(1)}-\frac{1}{k}+\frac{1}{kn}\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right)T_{(1)}+O_p\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.2}$$

となる ([A17] の第 4.3 節参照). ただし, $\hat{k}_\theta=k(\theta,X_{(1)})$ とする. このとき, (3.5), (4.1), (4.2) より

$$T_{EB}=T^*_{(1)}-\frac{1}{k^2n}\left\{2\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right)-\tilde{\pi}_{\eta,\hat{\xi}}\right\}+O_p\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$T_{B,\theta} = T^*_{(1)} - \frac{1}{k^2 n}\left\{2\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right) - \pi_{(1)}\right\} + O_p\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

となり, また

$$T_{EB} - T_{B,\theta} = \frac{1}{k^2 n}\left(\tilde{\pi}_{\eta,\hat{\xi}} - \pi_{(1)}\right) + O_p\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.3}$$

になる. よって, (4.3) より

$$n\left\{E_\gamma\left[kT_{EB}\right] - E_\gamma\left[kT_{B,\theta}\right]\right\} = \frac{1}{k}\left\{C - \pi_{(1)}(\gamma)\right\} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

になる. さらに, (3.16) と [A17] の第 6.3 節より, 漸近分散について

$$\begin{aligned} V_\gamma\left(kT_{EB}\right) =& V_\gamma\left(kT_{B,\theta}\right) = V_\gamma\left(kT^*_{(1)}\right) \\ =& 1 - \frac{2}{kn}\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\log k\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

となる. よって, $\hat{\gamma}_{EB}$, $\hat{\gamma}_{B,\theta}$, $\hat{\gamma}^\theta_{ML^*}$ は漸近平均の $1/n$ のオーダーで異なるが, 漸近分散については $1/n$ のオーダーまで等しいことが分かる.

例 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立に, いずれも密度

$$p(x;\theta,\gamma) = \begin{cases} \theta\gamma^\theta/x^{\theta+1} & (\gamma \le x), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつパレート分布に従う確率変数列とする. ただし, $\theta > 0$, $\gamma > 0$ とする. また, γ が事前密度

$$\pi(\gamma;\eta,\xi) = \begin{cases} \eta\xi^\eta/\gamma^{\eta+1} & (\xi \le \gamma), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつパレート分布に従うとする. ただし, $\eta > 0$, $\xi > 0$ とする. ここで, θ, η を既知とする. このとき, (2.1) において $b(\theta,\gamma) = \theta^{-1}\gamma^{-\theta}$, (2.2) において $\alpha(\gamma) = 1/\gamma$, $w(\gamma) = -\log\gamma$ であるから, (3.2) は

$$\frac{\eta}{n\theta - \eta}\left\{\left(\frac{x_{(1)}}{\xi}\right)^{n\theta-\eta} - 1\right\} = 1$$

となる. よって

$$\xi = \left(\frac{\eta}{n\theta}\right)^{1/(n\theta-\eta)} x_{(1)} =: \hat{\xi}^*(x_{(1)}) \tag{4.4}$$

のとき, $G(\xi)$ は最大値をとる. ゆえに, $\hat{\xi}^*$ は $\boldsymbol{X}$ の周辺密度 (3.1) を最大にし, $\hat{\xi}^{*\prime}(\gamma) > 0$ となることに注意. また, (3.4), (4.4) より γ の EB 推定量は

$$\hat{\gamma}_{EB}(\boldsymbol{X}) = \frac{\eta X_{(1)}}{\eta - 1}\cdot\frac{1 - \left(X_{(1)}/\hat{\xi}^*\right)^{\eta-1}}{1 - \left(X_{(1)}/\hat{\xi}^*\right)^{\eta}} = \frac{\eta X_{(1)}}{\eta - 1}\cdot\frac{1 - (n\theta/\eta)^{(\eta-1)/(n\theta-\eta)}}{1 - (n\theta/\eta)^{\eta/(n\theta-\eta)}}$$

になる．ここで，$n \to \infty$ のとき $\hat{\gamma}_{EB}(\boldsymbol{X})/X_{(1)}$ は 1 に概収束する．いま，$\alpha'(\gamma)/\alpha(\gamma) = -1/\gamma$, $w'(\gamma) = -1/\gamma$ となるから，

$$C = C(\eta, \gamma) = -\frac{\eta + 1}{\gamma}$$

となり，また，$k(\theta, \gamma) = \theta/\gamma$ となるから (3.15), (3.16) より $T_{EB} = n(\hat{\gamma}_{EB} - \gamma)$ について漸近平均，漸近分散はそれぞれ

$$E_\gamma\left(\frac{\theta}{\gamma}T_{EB}\right) = \frac{1-\eta}{\theta n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
$$V_\gamma\left(\frac{\theta}{\gamma}T_{EB}\right) = 1 + \frac{2}{\theta n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

になる．

5. おわりに

本稿では，切断母数 γ と自然母数 θ をもつ片側切断指数型分布族において，θ が既知の場合に γ の経験的ベイズ推定量 $\hat{\gamma}_{EB}$ を求め，その漸近平均，漸近分散を 2 次のオーダーまで求めた．その際，事後密度が超母数 (hyperparameter) の推定量にも依存するために，通常のベイズ推定量より面倒にはなるが，得られた結果は類似していて，$T_{EB} = n(\hat{\gamma}_{EB} - \gamma)$ の漸近平均の $1/n$ のオーダーの項が事前分布の超母数に依存するが，その漸近分散は $1/n$ の項までは事前分布には無関係になる．さらに，θ の未知の場合にも，γ の経験的ベイズ推定問題を考えることができるが，少し面倒になるであろう．

参考文献

[A17] Akahira, M. (2017). *Statistical Estimation for Truncated Exponential Families.* Springer Briefs in Statistics, JSS Research Series in Statistics, Springer, Singapore.

[Ar15] Arnold, B. C. (2015). *Pareto Distributions.* 2nd ed. CRC Press, Boca Raton.

[BL84] Bar-Lev, S. K. (1984). Large sample properties of the MLE and MCLE for the natural parameter of a truncated exponential family. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **36**, Part A, 217–222.

[JKB94] Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions.* Vol. 1(2nd ed.), Wiley, New York.

[LC98] Lehmann, E. L. and Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation.* 2nd ed., Springer, New York.