数理解析研究所講究録 第2125巻 2019年 117-125

On mappings between Möbius gyrovector spaces corresponding to Hilbert space operators

Keiichi Watanabe (Niigata University)

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

1　はじめに

Ungar の gyrovector space では交換法則, 結合法則, 分配法則がそのままでは成り立たない. しかし, 最近の研究によって, 或いは, 自然にそうなっているからというべきなのか, Möbius gyrovector space については Hilbert 空間との間に強いアナロジーがはたらく事が知られてきた. 閉部分空間に関する直交分解, 閉部分空間さらには閉凸集合の最近点, 正規直交基底による直交展開, 線形作用素などの counterpart が考察されている.

有界線形作用素の対応物を考えるとき, 演算と連続性の関係を明らかにする必要がある. この講究録では, 上記に関する [W4], [W5] の結果をアナウンスし, またそのために Möbius gyrovector space の幾つかの事項を概説する. [W3] と重複するところが大きいが, ご了承いただきたい.

2　準備

（実または複素）内積空間 $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ における Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz の不等式 ([C], [B], [S]. 以下 CBS 不等式という）

$$|\langle u, v\rangle| \leq \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}} \langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}} \qquad (u,\, v \in \mathbb{V})$$

等号が成立するのは u, v が線形従属のとき, そのときに限る

は数学における最も基本的な不等式のひとつである.

いっぽう, 複素平面の単位開円板 $\mathbb{D} = \{a \in \mathbb{C};\ |a| < 1\}$ における Möbius の和は

$$a \oplus_{\mathrm{M}} b = \frac{a+b}{1+\overline{a}b} \qquad (a, b \in \mathbb{D})$$

であり, 数学の広く様々な分野に現れる. Möbius の和は以前から知られていたが, その群のような構造は, Einstein の特殊相対論の脈絡で Ungar によって 1988 年に明らかにされるまで, 気付かれていなかった. さらに Ungar は任意の実内積空間の開球に Möbius の和を拡張し, また Möbius のスカラー倍を導入して, ベクトル空間のような構造をもつ gyrovector space の概念を確立した.

手短に Möbius gyrovector space の定義を思い出そう. 次節の CBS 型不等式は Möbius の演算や gyrovector space の理論を使わなくても述べることができるが, それらは我々の重要なモチベーションおよび背景であり, その記法は我々の不等式の記述を著しく簡単にする. 抽象的な (gyrocommutative) gyrogroup, gyrovector space の定義や基本的事項については, 例えば [U] を参照していただきたい.

Möbius Gyrovector Spaces.[U] $\mathbb{V}$ を任意の実内積空間, 固定された正の数 s に対して

$$\mathbb{V}_s = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{V};\ ||\boldsymbol{a}|| < s\}$$

とする. Möbius の和および Möbius のスカラー倍は

$$\boldsymbol{a} \oplus_{\mathrm{M}} \boldsymbol{b} = \frac{\left(1 + \frac{2}{s^2}\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + \frac{1}{s^2}||\boldsymbol{b}||^2\right)\boldsymbol{a} + \left(1 - \frac{1}{s^2}||\boldsymbol{a}||^2\right)\boldsymbol{b}}{1 + \frac{2}{s^2}\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + \frac{1}{s^4}||\boldsymbol{a}||^2||\boldsymbol{b}||^2}$$

$$r \otimes_{\mathrm{M}} \boldsymbol{a} = s\,\tanh\left(r\tanh^{-1}\frac{||\boldsymbol{a}||}{s}\right)\frac{\boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||} \quad (\text{if } \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}), \qquad r \otimes_{\mathrm{M}} \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

for all $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{V}_s$, $r \in \mathbb{R}$ によって定義される.
公理 (VV) の, $||\mathbb{V}_s|| = (-s, s)$ における演算 $\oplus_{\mathrm{M}}$, $\otimes_{\mathrm{M}}$（同一の記号が使われる）は

$$a \oplus_{\mathrm{M}} b = \frac{a+b}{1+\frac{1}{s^2}ab}$$

$$r \otimes_{\mathrm{M}} a = s\tanh\left(r\tanh^{-1}\frac{a}{s}\right)$$

for all $a, b \in (-s, s)$, $r \in \mathbb{R}$ によって定義される.

このとき, $(\mathbb{V}_s, \oplus_{\mathrm{M}}, \otimes_{\mathrm{M}})$ は gyrovector space となる. $\oplus_{\mathrm{M}}$, $\otimes_{\mathrm{M}}$ をそれぞれ単に $\oplus, \otimes$ と書く. パラメータ s を明示したい場合は $\oplus_s, \otimes_s$ と書く.

一般には，演算は可換でも，結合的でも，分配的でもないことに注意する：

$$\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{a}$$
$$\boldsymbol{a} \oplus (\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{c}) \neq (\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) \oplus \boldsymbol{c}$$
$$r \otimes (\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) \neq r \otimes \boldsymbol{a} \oplus r \otimes \boldsymbol{b}$$
$$t(\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) \neq t\boldsymbol{a} \oplus t\boldsymbol{b}.$$

しかし, 左（および右）ジャイロ結合法則, ジャイロ交換法則, スカラー分配法則, スカラー結合法則などがあるように, gyrovector space は解明すべき豊かな対称性を有している.

$s \to \infty$ とすると $\mathbb{V}_s$ は全空間 $\mathbb{V}$ に拡大し, 演算 $\oplus_s, \otimes_s$ は通常のベクトル和, スカラー倍に近づく.

Proposition.[U]

$$\boldsymbol{a} \oplus_s \boldsymbol{b} \to \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \quad (s \to \infty)$$
$$r \otimes_s \boldsymbol{a} \to r\boldsymbol{a} \quad (s \to \infty).$$

Notation.[U] It is obvious that $-u$ is the inverse element of u with respect to $\oplus$ as well. As in group theory, we use the notation

$$\boldsymbol{a} \ominus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \oplus (-\boldsymbol{b}).$$

The Möbius gyrodistance function d on a Möbius gyrovector space $(\mathbb{V}_s, \oplus, \otimes)$ is defined by the equation

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ||\boldsymbol{b} \ominus \boldsymbol{a}||.$$

Moreover, the Poincaré distance function h on the ball $\mathbb{V}_s$ is introduced by the equation

$$h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \tanh^{-1} \frac{d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{s}.$$

Theorem.[U] The function h satisfies the triangle inequality, so that $(\mathbb{V}_s, h)$ is a metric space. It is also complete as a metric space provided $\mathbb{V}$ is complete.

Proposition. Let $s > 0$. The following formulae hold

(i) $\dfrac{\boldsymbol{a}}{s} \oplus_1 \dfrac{\boldsymbol{b}}{s} = \dfrac{\boldsymbol{a} \oplus_s \boldsymbol{b}}{s}$

(ii) $||\boldsymbol{a} \oplus_s \boldsymbol{b}||^2 = \dfrac{||\boldsymbol{a}||^2 + 2\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + ||\boldsymbol{b}||^2}{1 + \frac{2}{s^2}\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + \frac{1}{s^4}||\boldsymbol{a}||^2||\boldsymbol{b}||^2}$

for any $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{V}_s$.

3 Möbius の演算に関連した CBS 型不等式

Möbius の和に関連した CBS 型不等式として, 我々は次の定理を得ることができた.

Theorem.[W2] Let $\mathbb{V}$ be a complex inner product space and let $w \in \mathbb{V}$ be a fixed element with $||w|| \leq 1$. For any $u, v \in \mathbb{V}$ and for any $s > \max\{||u||, ||v||\}$, the following inequality holds

$$\left| \frac{\langle u, w\rangle - \langle v, w\rangle}{1 - \frac{1}{s^2}\overline{\langle u, w\rangle}\langle v, w\rangle} \right| \leq \sqrt{\frac{||u||^2 - 2\mathrm{Re}\langle u, v\rangle + ||v||^2}{1 - \frac{2}{s^2}\mathrm{Re}\langle u, v\rangle + \frac{1}{s^4}||u||^2||v||^2}}. \tag{1}$$

The equality holds if and only if one of the following conditions is satisfied :

(i) $u = v$

(ii) $||w|| = 1$ and $u = \lambda w, v = \mu w$ for some $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Remark. • 実内積空間でも同様である. その不等式は次のように述べられる.

$$|\langle u, w\rangle \ominus_s \langle v, w\rangle| \leq ||u \ominus_s v||$$

for any $||u||, ||v|| < s$, $||w|| \leq 1$.

• v, w を $0, \frac{w}{||w||}$ で置き換えると古典的な CBS 不等式を得る. また, $s \to \infty$ とすることにより極限として古典的な CBS 不等式が復元される.

• 不等式 (1) を次のように示すことはできない.（最初の不等号が一般には成り立たない.）

$$|\langle u, w\rangle \ominus_s \langle v, w\rangle| \leq |\langle u \ominus_s v, w\rangle| \leq ||u \ominus_s v||\, ||w|| \leq ||u \ominus_s v||\,.$$

Example. $\mathbb{C}$ において通常の内積 $\langle u, v\rangle = u\overline{v}$ を用い,

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad v = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad w = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

とすると

$$\left|\frac{\langle u,w\rangle-\langle v,w\rangle}{1-\overline{\langle u,w\rangle}\langle v,w\rangle}\right|=\frac{4}{5}>\frac{2}{3}=\sqrt{\frac{||u||^2-2\mathrm{Re}\langle u,v\rangle+||v||^2}{1-2\mathrm{Re}\langle u,v\rangle+||u||^2||v||^2}}\,||w||.$$

このように, $||u||,||v||<1$, $||w||<1$ に対して不等式

$$\left|\frac{\langle u,w\rangle-\langle v,w\rangle}{1-\overline{\langle u,w\rangle}\langle v,w\rangle}\right|\leq\sqrt{\frac{||u||^2-2\mathrm{Re}\langle u,v\rangle+||v||^2}{1-2\mathrm{Re}\langle u,v\rangle+||u||^2||v||^2}}\,||w||$$

は一般に成立しない. 筆者が 2018 年 6 月の米沢数学セミナーでこれらを発表したとき, 高橋眞映先生は次の質問をなされた.

Qusetion.(S.-E. Takahasi) Is there any constant $C>1$ s.t.

$$\left|\frac{\langle u,w\rangle-\langle v,w\rangle}{1-\overline{\langle u,w\rangle}\langle v,w\rangle}\right|\leq C\sqrt{\frac{||u||^2-2\mathrm{Re}\langle u,v\rangle+||v||^2}{1-2\mathrm{Re}\langle u,v\rangle+||u||^2||v||^2}}\,||w||$$

for any $||u||,||v||<1$, $||w||\leq 1$?

これに答えようとして次の定理が得られた.

Theorem.[W4] Let $\mathbb{V}$ be a complex inner product space. For any u, $v\in\mathbb{V}$, $s>\max\{||u||,||v||\}$ and $w\in\mathbb{V}$ with $||w||\leq 1$, the following inequality holds

$$\left|\frac{\langle u,w\rangle-\langle v,w\rangle}{1-\frac{1}{s^2}\overline{\langle u,w\rangle}\langle v,w\rangle}\right|\leq\sqrt{\frac{||u||^2-2\mathrm{Re}\langle u,v\rangle+||v||^2}{1-\frac{2}{s^2}\mathrm{Re}\langle u,v\rangle+\frac{1}{s^4}||u||^2||v||^2}}\cdot\frac{2||w||}{1+||w||^2}. \tag{2}$$

The equality holds if and only if one of the following conditions is satisfied :

(i) $u=v$
(ii) $w=0$
(iii) $||w||=1$ and $u=\lambda w, v=\mu w$ for some $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$.

$\dfrac{2||w||}{1+||w||^2}\leq 2||w||$ だから次が成り立ち, Takahasi の問いに $C=2$ として肯定的な回答を与える.

Corollary. If $||u||,||v||<1$, $||w||\leq 1$, then

$$\left|\frac{\langle u,w\rangle-\langle v,w\rangle}{1-\overline{\langle u,w\rangle}\langle v,w\rangle}\right|\leq 2\sqrt{\frac{||u||^2-2\mathrm{Re}\langle u,v\rangle+||v||^2}{1-2\mathrm{Re}\langle u,v\rangle+||u||^2||v||^2}}\,||w||.$$

Remark. • 不等式 (2) は不等式 (1) の改良である. $\dfrac{2||w||}{1+||w||^2} \leq 1$ だから.
• 実内積空間でも同様である.

次の命題は, 上記の系の右辺の定数 2 はある意味で最良であることを示している.

Proposition. For any constant $C < 2$, there exist elements $u, v, w \in \mathbb{V}$ satisfying $||u||, ||v|| < 1$, $||w|| \leq 1$ and

$$\left|\frac{\langle u, w\rangle - \langle v, w\rangle}{1 - \overline{\langle u, w\rangle}\langle v, w\rangle}\right| > C\sqrt{\frac{||u||^2 - 2\mathrm{Re}\langle u, v\rangle + ||v||^2}{1 - 2\mathrm{Re}\langle u, v\rangle + ||u||^2||v||^2}}||w||.$$

次の命題は, 不等式 (2) を古典的な CBS 不等式とそれ以外の部分に単純に分解して証明できないことを意味している.

Proposition. For any constant $C > 0$, there exist elements $u, v, w \in \mathbb{V}$ satisfying $||u||, ||v|| < 1$, $||w|| \leq 1$ and

$$\left|\frac{1}{1 - \overline{\langle u, w\rangle}\langle v, w\rangle}\right| > C\sqrt{\frac{1}{1 - 2\mathrm{Re}\langle u, v\rangle + ||u||^2||v||^2}} \cdot \frac{2}{1+||w||^2}.$$

Möbius 和および Möbius スカラー倍双方に関連したある離散的 Cauchy 型不等式が [W1] で得られている. 次の定理は, 内積空間と Möbius 和および Möbius スカラー倍双方との関係の脈絡において, CBS 型不等式の最も自然な拡張とみなされ得る.

Theorem.[W4] Let $\mathbb{V}$ be a complex inner product space. For any $u, v \in \mathbb{V}$, $s > \max\{||u||, ||v||\}$ and $w \in \mathbb{V}$ with $||w|| \leq 1$, the following inequality holds

$$\left|\frac{\langle u, w\rangle - \langle v, w\rangle}{1 - \frac{1}{s^2}\overline{\langle u, w\rangle}\langle v, w\rangle}\right| \leq ||w|| \otimes_s \sqrt{\frac{||u||^2 - 2\mathrm{Re}\langle u, v\rangle + ||v||^2}{1 - \frac{2}{s^2}\mathrm{Re}\langle u, v\rangle + \frac{1}{s^4}||u||^2||v||^2}}. \tag{3}$$

The equality holds if and only if one of the following conditions is satisfied :

(i) $u = v$
(ii) $w = 0$
(iii) $||w|| = 1$ and $u = \lambda w, v = \mu w$ for some $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Remark. • 不等式 (3) は不等式 (1) の改良である. $0 \le r \le 1, 0 \le a < s$ ならば $r \otimes_s a \le a$ だから.

• 実内積空間でも同様である. その不等式は次のように述べられる.

Let $s > 0$. For any elements $u, v, w \in \mathbb{V}$ with $||u||, ||v|| < s$, $||w|| \le 1$,

$$|\langle u, w\rangle \ominus_s \langle v, w\rangle| \le ||w|| \otimes_s ||u \ominus_s v|| \,. \tag{4}$$

In other words,

$$\tanh^{-1} \frac{|\langle u, w\rangle \ominus_s \langle v, w\rangle|}{s} \le ||w|| \tanh^{-1} \frac{||u \ominus_s v||}{s}$$

or

$$h(\langle u, w\rangle, \langle v, w\rangle) \le h(u, v)\,||w||.$$

• 不等式 (3) や (4) で $s \to \infty$ とすると古典的な CBS 不等式

$$|\langle u, w\rangle - \langle v, w\rangle| \le ||w|| ||u - v||$$

が復元される.

また, 次が成り立つ.

Theorem. Let $\mathbb{V}$ be a complex inner product space and let $w \in \mathbb{V}$ be an arbitrary fixed element with $||w|| \le 1$. If K is a constant satisfying

$$\left| \frac{\langle u, w\rangle - \langle v, w\rangle}{1 - \overline{\langle u, w\rangle}\langle v, w\rangle} \right| \le K \otimes_1 \sqrt{\frac{||u||^2 - 2\mathrm{Re}\langle u, v\rangle + ||v||^2}{1 - 2\mathrm{Re}\langle u, v\rangle + ||u||^2||v||^2}}.$$

for any any element $u, v \in \mathbb{V}$ with $||u||, ||v|| < 1$, then $||w|| \le K$.

4　Riesz 型の表現定理

最後に, 不等式 (4) の応用として Riesz の表現定理のひとつの counterpart を提示する.

Definition. Let $\mathbb{V}$ be an inner product space. For any map $f : \mathbb{V}_1 \to (-1,1)$, define $f_s : \mathbb{V}_s \to (-s,s)$ by

$$f_s(\boldsymbol{x}) = sf\left(\frac{\boldsymbol{x}}{s}\right)$$

for any element $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_s$.

Theorem.[W5] Let $\mathbb{V}$ be a real inner product space, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{V}$ with $||\boldsymbol{c}|| \leq 1$, and consider the functional $f : \mathbb{V}_1 \to (-1,1)$ defined by

$$f(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{c} \rangle$$

for any element $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_1$. Then,

(i) For any $\epsilon > 0$, f_s satisfies the following conditions:

$$-\{f_s(\boldsymbol{x}) \oplus_s f_s(\boldsymbol{y})\} \oplus_s f_s(\boldsymbol{x} \oplus_s \boldsymbol{y}) = o(s^{-2+\epsilon}) \quad (s \to \infty)$$

$$-\{r \otimes_s f_s(\boldsymbol{x})\} \oplus_s f_s(r \otimes_s \boldsymbol{x}) = o(s^{-2+\epsilon}) \quad (s \to \infty)$$

for any element $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{V}$ and any real number $r \in \mathbb{R}$. Here, $f(s) = o(s^{\alpha})$ $(s \to \infty)$ means that $\dfrac{f(s)}{s^{\alpha}} \to 0$ $(s \to \infty)$.

(ii) The following formula

$$\sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{V}_1,\, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}} \frac{h(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))}{h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} = ||\boldsymbol{c}||$$

holds.

Theorem.[W5] Let $\mathbb{V}$ be a real Hilbert space. Suppose that $f : \mathbb{V}_1 \to (-1,1)$ satisfies the following conditions

$$-\{f_s(\boldsymbol{x}) \oplus_s f_s(\boldsymbol{y})\} \oplus_s f_s(\boldsymbol{x} \oplus_s \boldsymbol{y}) \to 0 \quad (s \to \infty)$$

$$-\{r \otimes_s f_s(\boldsymbol{x})\} \oplus_s f_s(r \otimes_s \boldsymbol{x}) \to 0 \quad (s \to \infty)$$

and

$$0 \leq \sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{V}_1,\, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}} \frac{h(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))}{h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} \leq 1.$$

Then,

(i) For any $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}$, $\lim_{s\to\infty} f_s(\boldsymbol{x})$ exists as a real number.

(ii) There exists a unique element $\boldsymbol{c} \in \mathbb{V}$ satisfying

$$\lim_{s\to\infty} f_s(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{c} \rangle \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}) \qquad \text{and} \qquad \sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{V}_1,\, \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}} \frac{h\left(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})\right)}{h\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\right)} = ||\boldsymbol{c}||.$$

References

[B] Bouniakowsky, V. (1859). Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies. *Mémoires de l'Acad. de St.-Pétersbourg* (ser. 7) 1, No. 9.

[C] Cauchy, A. (1821). *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique, Premiére Partie. Analyse algébrique*, Debure fréres, Paris. (Also in *Oeuvres complétes d'Augustin Cauchy, Série 2, Tome 3*, Gauthier-Villars et Fils, Paris, 1897.)

[S] Schwarz, H.A. (1885). Über ein die Flächen kleinstern Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung. *Acta Soc. Scient. Fenn.*, **15**, 315–362.

[St] J. M. Steele, *The Cauchy-Schwarz master class : an introduction to the art of mathematical inequalities*, MAA Problem Books Series, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[U] A. A. Ungar, *Analytic Hyperbolic Geometry and Albert Einstein's Special Theory of Relativity*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2008.

[W1] K. Watanabe, A Cauchy type inequality for Möbius operations, J. Inequal. Appl. 2018 **2018**:97. 9 pages. doi:10.1186/s13660-018-1690-2

[W2] K. Watanabe, A Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz type inequality related to the Möbius addition, J. Math. Inequal. **12** (2018), doi:10.7153/jmi-2018-12-75

[W3] K. Watanabe, Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz type inequalities related to Möbius operations, Proceedings of Conference on Function Algebras 2018, to appear.

[W4] K. Watanabe, Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz type inequalities related to Möbius operations, preprint.

[W5] K. Watanabe, A representation theorem of Riesz type in Möbius gyrovector spaces, preprint.