数理解析研究所講究録 第2126巻 2019年 77-86

Deegan-Packel 指数に基づく非対称投票力指数の合理性と応用
Rationality and an Application of a Nonsymmetric Power Index based on the Deegan-Packel Index

筑波技術大学 保健科学部 情報システム学科 鶴見昌代
Masayo TSURUMI
Dept. of Computer Science, Fac. of Health Sciences, Tsukuba Univ. of Tech.

1　はじめに

複数の意思決定者が存在する状況においては，協力ゲームやその解による分析が有効であることが知られている．協力ゲームの重要な解としては，Shapley 値 [9] や Banzhaf 値などがある．また，投票が行われる状況では，プレイヤーの発言力を客観的に分析することが重要であるが，投票が行われる状況を協力ゲームとして定式化したものが投票ゲームである．投票ゲームに適用された解は投票力指数と呼ばれ，プレイヤーの発言力を分析できる．主要な投票力指数には，Shapley-Shubik 指数，Banzhaf 指数 [1]，正規化 Banzhaf 値，Deegan-Packel 指数 [2] などがある．Shapley-Shubik 指数，Banzhaf 指数は，それぞれ Shapley 値や Banzhaf 値を投票ゲームに適用されたものである．これらの投票力指数は，順列や提携における影響力を元に算出されるが，通常は順列や提携が生じる確率は等しいものという前提に基づいてる．このような前提に基づく投票力指数は，この前提に基づかないものと区別するために，対称な投票力指数と呼ばれる．

しかし，実際には順列や提携が等確率で成立するとは限らないなどの非対称性が存在しうる．このような非対称性を扱うための協力ゲームの解として，確率値やランダム順序値 [13]，重みつき Shapley 値 [4] や重みつき Banzhaf 値 [8] などが提案されている．

また，投票ゲームにおいては，各プレイヤーや議案のイデオロギーを選好空間に配置することにより，選好空間に基づいた非対称な指数が考えられており [7]，それに基づいて実際の日本の参議院における政党の投票力の分析を行った研究がある [6]．松井・上原 [5] は，選考空間を導入せずに分析できる Shapley 指数を用いた非対称な投票力指数を提案し，公理化と日本の参議院における政党の投票力の分析を行った．また，遠藤ら [3] は，Banzhaf 指数を用いた非対称な投票力指数を提案し, 1998 年と 1999 年のデータを導出し，参議院の投票力を測定した．

また，これまでの研究 [10],[11] で，順列や提携を含むような基準の概念を考え，各基準におけるプレイヤーの限界貢献度の概念を導入することで，各基準が生じる確率，あるいは重みに，その基準におけるプレイヤーの限界貢献度を乗じたものの和を解として提案した．この値は，順列や提携などの限界貢献度の基準が確率分布にしたがって生じる場合には各プレイヤーの限界貢献度の期待値となる．これは，Shapley 値（Shapley-Shubik 指数），Banzhaf 値（Banzhaf 指数）の一般化であるとみなせる．また，これを全体合理性を満たすように基準化したものをもう一つの解として提案した．これは，Shapley 値（Shapley-Shubik 指数），正規化 Banzhaf 指数の一般化であるとみなせる．これらの解概念を公理化し，性質を明らかにし，実際の日本の参議院における政党の影響力を評価した．また，[12] では，分数カウント型非対称投票力指数を導入した．これは，Deegan-Packel 指数の一般化であると考えられる．この投票力指数の合理性について議論し，議長をどのように扱うかを中心に，実際の柏市議会における各会派の投票力分析に応用した．

本研究では，限界貢献度加重和，限界型非対称解 (MC)，分数カウント型非対称解 (FC) に関するいくつかの性質を明らかにする．また，対称な投票力指数である Shapley-Shubik 指数 (SS)，正規化 Banzhaf 指数 (NBz)，Deegan-Packel 指数 (DP) と非対称な投票力指数である限界貢献度

加重和，限界型非対称解 (MC)，分数カウント型非対称解 (FC) を用いて，議長がどの会派から選出されたかや，会派の構成人数の変更を踏まえて，期間を分けて，平成 27 年の選挙以降，現在までの柏市議会における各会派の投票力分析に応用する．

2　投票ゲームと投票力指数

$N=\{1,2,\ldots,n\}$ をプレイヤーの集合とする．このとき，$v(\emptyset)=0$ を満たす $v:2^N\to\mathbb{R}$ は，協力ゲーム，あるいは単にゲームとよばれる．協力ゲーム全体を $\mathcal{G}$ とかく．$v\in\mathcal{G}$ のうち，次の性質を持つものは投票ゲームと呼ばれる．

1. $v(N)=1$，$v(\emptyset)=0$.
2. 任意の $S\subseteq T$ に対して，$v(S)\leq v(T)$.
3. $v(S)=1$ ならば $v(N\backslash S)=0$.

投票ゲーム v に対して，$v(S)=1$ を満たす S は勝利提携と呼ばれる．投票ゲーム全体を $\mathcal{VG}$ と表す．v が与えられたときの勝利提携の全体を $\mathcal{W}=\{S\subseteq N\mid v(S)=1\}$ と定義すると，v と $\mathcal{W}$ は一対一に対応する．また，任意の $i\in S$ に対して $S\backslash\{i\}\notin\mathcal{W}$ を満たす $S\in\mathcal{W}$ は最小勝利提携と呼ばれる．最小勝利提携全体を $\mathcal{W}_{\min}$ と表す．

投票ゲームのうち，投票者（プレイヤー）i が議席数 w_i を持ち，賛成するプレイヤーの議席数が $q(>\sum_{i\in N}w_i/2)$ 以上となったときに議案が可決できると考えられるような場合，$[q;w_1,w_2,\ldots,w_n]$ と表され，重みつき多数決ゲームと呼ばれる．重みつき多数決ゲーム $[q;w_1,w_2,\ldots,w_n]$ の勝利提携の全体は，$\mathcal{W}=\left\{S\subseteq N\;\middle|\;\sum_{i\in S}w_i\geq q\right\}$ と表される．

2.1　対称な投票力指数

投票ゲームにおける解 $g:\mathcal{VG}\to\mathbb{R}^N$ は投票力指数と呼ばれ，代表的なものに，Shapley-Shubik 指数 (SS)[9]，Banzhaf 指数 (Bz)[1]，正規化 Banzhaf 指数 (NBz)，Deegan-Packel 指数 (DP)[2] などがある．Shapley-Shubik 指数は順列に基づく貢献度の期待値であり，Banzhaf 指数は提携に基づく貢献度の期待値であり，正規化 Banzhaf 指数は全体が 1 になるように Banzhaf 指数を正規化して得られるものである．Shapley-Shubik 指数，Banzhaf 指数，正規化 Banzhaf 指数，Deegan-Packel 指数は次のように定義される．

任意の $S\subseteq N$ に対して，$s=|S|$ とするとき全単射 $\pi_S:S\to\{1,2,\ldots,s\}$ を提携 S における順列とし，この順列の集合を $\Pi(S)$ と表す．混乱の恐れがない場合には，N における順列を単に順列とよぶ．$i\in N$ に対して $P(\pi,i)=\{j\in N\mid\pi(j)<\pi(i)\}$ とするとき，プレイヤー i の提携 S における限界貢献度は $C_i(v)(S)=v(S\cup\{i\})-v(S\backslash\{i\})$ で，順列 π における限界貢献度は $m_i(v)(\pi)=v(P(\pi,i)\cup\{i\})-v(P(\pi,i))$ で定義される．$C_i(v)(S)=v(S\cup\{i\})-v(S\backslash\{i\})$ となる $i\in N$ は，S において swing であると呼ばれる．また，$m_i(v)(\pi)=v(P(\pi,i)\cup\{i\})-v(P(\pi,i))$ となる $i\in N$ は，π において pivot であると呼ばれる．

つぎで定義される $\phi_i(v)$ と $\beta_i(v)$ は，それぞれゲーム v におけるプレイヤー i の Shapley 値，Banzhaf 値と呼ばれる．

$$
\begin{aligned}
\phi_i(v) &= \sum_{\pi\in\Pi(N)}\frac{1}{n!}\cdot m_i(v)(\pi),\\
\beta_i(v) &= \sum_{S\subseteq N}\frac{1}{2^n}\cdot C_i(v)(S).
\end{aligned}
$$

与えられたゲーム v が投票ゲームである場合には，これらはそれぞれ Shapley-Shubik 指数，Banzhaf 指数と呼ばれる．

Shapley/Banzhaf 値は，各順列/提携が生じる確率が等しいと考えたときの限界貢献度の期待値といえる．また，$\sum_{j\in N}\beta_j(v)\neq 0$ をみたす v に対して，つぎで定義される $\hat{\beta}$ は，正規化 Banzhaf 値と呼ばれる．

$$\hat{\beta}_i(v)=\frac{v(N)}{\sum_{j\in N}\beta_j(v)}\cdot\beta_i(v)$$

与えられたゲームが投票ゲームである場合には，正規化 Banzhaf 指数と呼ばれる．

また，投票ゲーム $\mathcal{W}$ に対して，次は Deegan-Packel 指数と呼ばれる．

$$\rho_i(\mathcal{W})=\frac{1}{|\mathcal{W}_{\min}|}\sum_{S\in\mathcal{W}_{\min},S\ni i}\frac{1}{|S|}$$

$S\cup\{j\}\in\mathcal{W}$，$S\backslash\{j\}\notin\mathcal{W}$ となる $S\in 2^N$ が存在しない $j\in N$ は，ナルプレイヤーと呼ばれる．これは，どの勝利提携においても，その勝利に貢献することができないプレイヤーであると考えられる．投票力指数の多くについては，次のナルプレイヤーに関する性質が成り立つ．

性質 1 ナルプレイヤーに関する性質

$j\in N$ が v においてナルプレイヤーならば，$g_j(v)=0$ が成り立つ．すなわち，$S\cup\{j\}\in\mathcal{W}$，$S\backslash\{j\}\notin\mathcal{W}$ となる $S\in 2^N$ が存在しないならば，$g_j(v)=0$ が成り立つ．

また，次のように定義される対称性に関する性質も多くの投票力指数に成り立つ性質である．

性質 2 対称性に関する性質

$S\not\ni i, S\not\ni j$ を満たす任意の $S\in 2^N$ に対して $v(S\cup\{i\})=v(S\cup\{j\})$ が成り立つならば，$g_i(v)=g_j(v)$ が成り立つ．

性質 3 全体合理性

任意の $v\in\mathcal{VG}$ に対して，$\sum_{i\in N}g_i(v)=1$ が成り立つ．

Shapley-Shubik 指数についても，Banzhaf 指数についても，Deegan-Packel 指数についても，これらの性質が成り立つことが知られている．

2.2 非対称な投票力指数

投票ゲームにおいて提携が生じる確率が異なる場合を扱うため，松井・上原はプロファイルに基づく Shapley-Shubik 指数を考えた [5]．松井・上原が提案した指数をそのまま一般の協力ゲームに適用すると，つぎのような定義が得られる．

定義 1 [5] $p:2^N\to[0,1]$ をプロファイルとし，$\phi_i(v)[S]$ をゲーム v と S における i の Shapley 値とする．すなわち，$\phi_i(v)[S]=1/s!\cdot\sum_{\pi_S\in\Pi(S)}m_i(v)(\pi_S)$ とする．このとき，つぎで定義される $\rho_i^{\phi}(v;p)$ をプロファイル p が与えられたときの MU 値とよぶ．

$$\rho_i^{\phi}(v;p)=\sum_{S\subseteq N}p(S)\cdot\phi_i(v)[S]$$

遠藤らは，プロファイルに基づく Banzhaf 指数を提案した．この指数をそのまま一般の協力ゲームに適用したものが次である．

定義 2 [3] $p : 2^N \to [0,1]$ をプロファイルとし，$\beta_i(v)[S]$ をゲーム v と S における i の Banzhaf 値とする．すなわち，$\beta_i(v)[S] = 1/2^s \cdot \sum_{T \subseteq S} C_i(v)(T)$ とする．このとき，つぎで定義される $\rho_i^\beta(v;p)$ をプロファイル p が与えられたときの ESA 値とよぶ．

$$\rho_i^\beta(v;p) = \sum_{S \subseteq N} p(S) \cdot \beta_i(v)[S]$$

順列や提携などのプレイヤーの影響力を測る基準を x と表し，その全体を X とする．各基準は，$h_i : X \to 2^N$ によって提携と関連づけられると考える．x という貢献度を測る基準が与えられたとき，$D_i(v)(x) = v(h_i(x) \cup \{i\}) - v(h_i(x) \backslash \{i\})$ でプレイヤー i の貢献度を測ることができると考える．v が投票ゲームであるとき，$v(h_i(x) \cup \{i\}) = 1, v(h_i(x) \backslash \{i\}) = 0$ ($\Leftrightarrow h_i(x) \cup \{i\} \in \mathcal{W}, h_i(x) \backslash \{i\} \notin \mathcal{W}$) となる $i \in N$ を $h_i(x)$ において swing と呼ぶ．また，基準に対して，生起確率などを表すプロファイル $p : X \to \mathbb{R}_+$ が与えられるものと考える．X に対するプロファイル全体を $\mathcal{P}^X$ で表す．ここでは，投票力指数 $f : \mathcal{VG} \times \mathcal{P}^X \to \mathbb{R}^N$ を非対称投票力指数と呼ぶ．

このとき，Shapley-Shubik 指数や Banzhaf 指数の一般化として，次のような解が考えられる．

定義 3 [10], [11] $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ に対して，次で定義される関数 $\eta_i^{X;(h_i)_{i \in N}} : \mathcal{G}' \times \mathcal{P}^X \to \mathbb{R}$ を加重和限界貢献度と呼ぶ．

$$\eta_i^{X,(h_i)_{i \in N}}(v;p) = \sum_{x \in X} p(x) \cdot D_i(v)(x).$$

$X_i(h_i;\mathcal{W}) = \{x \in X \mid h_i(x) \cup \{i\} \in \mathcal{W}, h_i(x) \backslash \{i\} \notin \mathcal{W}\}$ とすると，投票ゲーム $\mathcal{W}$ に対する加重和限界貢献度は，

$$\eta_i^{X;(h_i)_{i \in N}}(\mathcal{W}, p) = \sum_{x \in X_i(h_i;\mathcal{W})} p(x)$$

と表される．これを加重和限界貢献度指数 (MC) と呼ぶ．

また，正規化 Banzhaf 値を一般化した解として，次が考えられる．

定義 4 [10], [11] X と $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ に対して，$[\mathcal{G}' \times \mathcal{P}][X,(h_i)_{i \in N}] = \{(v,p) \in \mathcal{G}' \times \mathcal{P}^X \mid \sum_{j \in N} \eta_j(v;p^X) \neq 0\}$ とする．このとき，$(v,p) \in [\mathcal{G}' \times \mathcal{P}][X,(h_i)_{i \in N}]$ に対して，次で定義される $\hat{\eta}^{X,(h_i)_{i \in N}} : [\mathcal{G}' \times \mathcal{P}][X,(h_i)_{i \in N}] \to \mathbb{R}^N$ を限界型非対称解 (MC) とよぶ．

$$\hat{\eta}_i^{X,(h_i)_{i \in N}}(v;p) = \frac{v(N)}{\sum_{j \in N} \eta_j^{X,(h_i)_{i \in N}}(v;p^X)} \cdot \eta_i^{X,(h_i)_{i \in N}}(v;p),$$

$h_i : X \to 2^N$ が i に依存しないとき，$h : X \to 2^N$ と表す．このとき，各基準において，影響力のあるプレイヤーが複数いる場合には，その基準が与えられたときの影響力をその人数で割ったものと考えると，次のような投票力指数が考えられる．

定義 5 [12] 次で定義される κ_i を分数カウント型非対称投票力指数 (FC) と呼ぶ．

$$\kappa_i^{X,h}(\mathcal{W};p) = \sum_{x \in X_i(h;\mathcal{W})} \frac{p(x)}{|N_x(h;\mathcal{W})|}$$

ただし $X_i(h;\mathcal{W}) = \{x \in X \mid h(x) \cup \{i\} \in \mathcal{W}, h(x) \backslash \{i\} \notin \mathcal{W}\}$, $N_x(h;\mathcal{W}) = \{j \in N \mid h(x) \cup \{j\} \in \mathcal{W}, h(x) \backslash \{j\} \notin \mathcal{W}\}$ とする．

分数カウント型非対称投票力指数は，次のようなプロファイルが与えられたときには，Deegan-Packel 指数と一致する．

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\mathcal{W}_{\min}|} & h(x) \in \mathcal{W}_{\min}\text{のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

この意味において，Deegan-Packel 指数の一般化であると考えられる．

$p_{\bar{x}}(\bar{x}) = 1$, 任意の $x \neq \bar{x}$ に対して $p_{\bar{x}}(x) = 0$ で $p_{\bar{x}} : X \to \mathbb{R}_+$ と定義すると，非対称投票力指数 $f : \mathcal{VG} \times \mathcal{P}^X \to \mathbb{R}^N$ について，次のような公理が考えられる．

公理 1

$$f_i(p_{\bar{x}}; \mathcal{W}) = \frac{1}{|N_x(h; \mathcal{W})|}$$

任意の $p_1, p_2 \in \mathcal{P}^X$ に対して，任意の $x \in X$ について $p_1 + p_2(x) = p_1(x) + p_2(x)$ と定めると次のような公理が考えられる．

公理 2 任意の $p_1, p_2 \in \mathcal{P}^X$ に対して，次が成り立つ．

$$f_i(p_1 + p_2; \mathcal{W}) \quad = \quad f_i(p_1; \mathcal{W}) + f_i(p_2; \mathcal{W})$$

このような公理に基づいて，次のように分数カウント型非対称投票力指数 (FC) を特徴づけることができる．

定理 1 [12] 分数カウント型非対称投票力指数 (FC) は公理 1 と公理 2 を満たし，公理 1 と公理 2 を満たす非対称投票力指数は分数カウント型非対称投票力指数 (FC) のみである．

この定理より，公理 1 と公理 2 が合理的であると考えられるならば，分数カウント型非対称投票力指数が合理的であると考えられる．

3　非対称投票力指数の性質

投票力指数 $f : \mathcal{VG} \times \mathcal{P}^X \to \mathbb{R}^N$ として表すことができる，加重和限界貢献度，限界型非対称解 (MC)，分数カウント型非対称投票力指数 (FC) については，いくつかの合理的な性質が成り立つことがわかる．このための準備の一つとして，ナルプレイヤーを定義する．ナルプレイヤーは，対称な投票力指数の場合と同様に，どの勝利提携においても，その勝利に貢献することができないプレイヤーであると考え，次を満たす $j \in N$ を $\mathcal{W}$ におけるナルプレイヤーと呼ぶ．

$$\nexists x \in X \ [h_j(x) \cup \{j\} \in \mathcal{W}, h_j(x) \backslash \{j\} \notin \mathcal{W}]$$

$\{h_j(x) \mid x \in X\} = 2^N$ が成り立つならば，通常のナルプレイヤーの定義と一致することに注意する．ここで，ナルプレイヤーに関する性質を定義する．

性質 4 ナルプレイヤーに関する性質

$j \in N$ が $\mathcal{W}$ においてナルプレイヤーならば，任意の $p \in \mathcal{P}^X$ に対して $f_j(\mathcal{W}; p) = 0$ が成り立つ．すなわち，$h_j(x) \cup \{j\} \in \mathcal{W}, h_j(x) \backslash \{j\} \notin \mathcal{W}$ となる $x \in X$ が存在しないならば，任意の $p \in \mathcal{P}^X$ に対して $f_j(\mathcal{W}; p) = 0$ が成り立つ．

$h_i : X \to 2^N$ が i に依存せず，$h : X \to 2^N$ と表せるとき，対称性についても，同様に，次のように定義できる．

性質 5 対称性に関する性質

$h(x) \not\ni i, j$ を満たす任意の $h(x) \in 2^N$ に対して $v(h(x) \cup \{i\}) = v(h(x) \cup \{j\})$ が成り立つならば，任意の $p \in \mathcal{P}^X$ に対して $f_i(\mathcal{W}; p) = f_j(\mathcal{W}; p)$ が成り立つ．

性質 6 全体合理性

任意の $\mathcal{W} \in \mathcal{VG}$ と任意の $p \in \mathcal{P}^X$ に対して，$\sum_{i \in N} f_i(\mathcal{W}; p) = 1$ が成り立つ．

限界貢献度加重和，限界型非対称解 (MC)，分数カウント型非対称解 (FC) については，次の命題が成り立つ．

命題 1

1. 限界貢献度加重和は，ナルプレイヤーに関する性質を満たす．
2. 限界型非対称解 (MC) は，ナルプレイヤーに関する性質，全体合理性を満たす．
3. 分数カウント型非対称解 (FC) は，ナルプレイヤーに関する性質，対称性，全体合理性を満たす．

4　柏市議会における投票力分析

文献 [12] では，平成 27 年 8 月の柏市議会議員一般選挙のすぐ後の平成 27 年第 3 回定例議会 (H27-3) から平成 29 年第 4 回定例議会 (H29-4) までの議席数および投票行動に基づいた分析を行ったが，本論文では，平成 27 年第 3 回定例議会 (H27-3) から平成 30 年第 4 回定例議会 (H30-4) までの議席数および投票行動に基づいて分析する．文献 [12] では議長の取り扱いによる違いを中心に分析を行ったが，本論文では，議長がどの会派から選出されたか，無所属議員の一人が新たに会派に加わったことなどを踏まえて，期間を分けて投票力指数を算出する．分析に用いる投票力指数は，対称な投票力指数である Shapley-Shubik 指数 (SS)，正規化 Banzhaf 指数 (NBz)，Deegan-Packel 指数 (DP) と非対称な投票力指数である限界型非対称解 (MC) や分数カウント型非対称解 (FC) とする．

4.1　所属政党の変更と分析期間の分け方について

柏市議会は，平成 27 年 8 月の柏市議会議員一般選挙終了後には，柏清風（清風），公明党（公明），日本共産党（共産），柏愛倶楽部（柏愛），市民サイド・ネット（市民），護憲市民会議（護憲）の各会派と，無所属 4 名 (無 A, 無 B, 無 C, 無 D) から構成された．議席数は，柏清風（清風）: 11，公明党（公明）: 7，日本共産党（共産）: 5，柏愛倶楽部（柏愛）: 4，市民サイド・ネット（市民）: 3，護憲市民会議（護憲）: 2 であった．また，平成 30 年第 2 回定例議会 (H30-2) からは，無所属議員の一人 (無 D) が柏愛倶楽部（柏愛）に加入し，無所属議員が一人減り，柏愛倶楽部（柏愛）の議席数が 5 となった．

議長は，平成 27 年第 3 回定例議会 (H27-3) から平成 29 年第 2 回定例議会 (H29-2) までは，柏清風の議員が選出されたが，平成 29 年第 3 回定例議会 (H29-3) から平成 30 年第 2 回定例議会 (H30-2) までは，公明党の議員が選出され，平成 30 年第 3 回定例議会 (H30-3) から平成 30 年第 4 回定例議会 (H30-4) までは柏清風の議員が選出されている．

対称な投票力指数である Shapley-Shubik 指数 (SS) や正規化 Banzhaf 指数 (NBz)，Deegan-Packel 指数 (DP) は，これらの議席数に応じて算出する必要がある．すなわち，この場合には，次の 4 つの期間に分けて分析する必要がある．

Case1:H27-3～H29-2，Case2: H29-3～H30-1，Case3:H30-2，Case4:H30-3～H30-4

なお，対称な投票力指数は議席数のみによって算出されるため，期間の長短によって値が影響を受けることがないことに注意する．

一方，限界型非対称解 (MC) や分数カウント型非対称解 (FC) では，一般議員の所属政党が変わることで政党自体がなくなってしまう場合には分けて分析する必要があると考えられるが，議長の所属政党が変わった場合や，所属議員数が変化した場合については，期間を分けることなく分析することができる．この場合，H27-3〜H30-1 と H30-2〜H30-4 に分ければ問題なく分析できる．分析する議案パターンの数が多い方がより適切な値が得られると考えられるため，限界型非対称解 (MC) や分数カウント型非対称解 (FC) については，次の二つの期間に分けて分析する．

Case1+2:H27-3〜H30-1，Case3+4:H30-2〜H30-4

4.2 分析方法

例として，平成 29 年第 3 回定例議会 (H29-3) における全会一致以外の議案に対する各会派の投票行動を表 1 に示す．

表 1. 平成 29 年第 3 回定例議会 (H29-3) における全会一致以外の議案への投票行動

				清	公	共	柏	市	護	A	B	C	D	
No.	結果	＃Y	＃N	10	7	5	4	3	2	1	1	1	1	＃議案
1	可決	22	13	Y	Y	N	Y	N	N	N	N	N	Y	1
2	可決	34	1	Y	Y	Y	Y	Y	Y	N	Y	Y	Y	1
3	可決	33	2	Y	Y	Y	Y	Y	N	Y	Y	Y	Y	1
4	可決	22	12	D1	Y	N	Y	N	N	N	N	Y	Y	1
5	可決	22	12	Y	D1	N	Y	N	N	N	N	Y	Y	1
6	可決	32	3	Y	Y	Y	Y	N	Y	Y	Y	Y	Y	1
7	否決	14	21	N	N	Y	N	Y	Y	Y	Y	Y	Y	1
8	可決	13	22	N	N	Y	N	Y	Y	Y	Y	Y	N	1
9	可決	24	11	N	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	3
10	可決	19	16	N	Y	Y	N	Y	Y	Y	Y	Y	N	2

ただし，Y：賛成，N：反対，D1：一人は除斥でそれ以外は賛成を表す．
2 行目は各会派の議席数（議長を除く）を表している．

議案 No.1 では，賛成議員数が 22，反対議員が 13 で可決されている．このような議案パターンはこの定例議会では 1 件のみであった．この議案の場合，柏清風が賛成から反対に変更すると，採決結果が可決から否決に変わる．したがって，この議案において柏清風は swing であると考えられる．同様に，この議案では公明党や共産党も swing となっている．したがって，この議案では，swing となる会派が 3 つあることがわかる．議案 No.9 では，柏清風と公明党の二つの会派が swing となる．このように，議案パターンによって swing の数が異なることに注意する．

議案パターンにおける swing の数を合計して正規化して得られるものが限界型非対称解である．これに対して，分数カウント型非対称解は，swing となる会派の影響力が，swing の数が n となる場合は swing の数が 1 の場合の $1/n$ 倍であると考えて計算する．

議案 No.2, 3, 6 では，swing となる会派が存在しない．表 1 で省略した全会一致の場合も同様に swing が存在しない．このように，swing が存在しない議案パターンについては，そのプロファイルの値をゼロとし，一つ以上の swing が存在する議案パターンが等確率で生じるものとみなし，そのプロファイルの値を等しく設定する．

また，文献 [12] と同様に，議決をとるとき，欠席者は存在しないものとして扱われることが多い．棄権者については，柏市議会では反対したものとして計上されるため，この前提に基づいて算出する．

4.3 分析結果

4.3.1 対称な投票力指数

Case1:H27-3〜H29-2，Case2: H29-3〜H30-1，Case3:H30-2，Case4:H30-3〜H30-4 について，対称な投票力指数である Shapley-Shubik 指数 (SS)，正規化 Banzhaf 指数（NBz)，Deegan-Packel 指数 (DP) を算出した結果を表 2〜5 に示す．なお，議長を除いた議席数で計算している．

表 2. Case1:H27-3〜H29-2 における SS, NBz, DP

	清風	公明	共産	柏愛	市民	護憲	無 A	無 B	無 C	無 D
議席数	10	7	5	4	3	2	1	1	1	1
議席数比例	0.29	0.20	0.14	0.11	0.09	0.06	0.03	0.03	0.03	0.03
SS	0.33	0.20	0.13	0.10	0.08	0.05	0.03	0.03	0.03	0.03
NBz	0.33	0.19	0.14	0.10	0.08	0.06	0.03	0.03	0.03	0.03
DP	0.15	0.12	0.11	0.10	0.09	0.10	0.08	0.08	0.08	0.08

表 3. Case2:H29-3〜H30-1 における SS, NBz, DP

	清風	公明	共産	柏愛	市民	護憲	無 A	無 B	無 C	無 D
議席数	11	6	5	4	3	2	1	1	1	1
議席数比例	0.31	0.17	0.14	0.11	0.09	0.06	0.03	0.03	0.03	0.03
SS	0.39	0.16	0.13	0.10	0.07	0.06	0.03	0.03	0.03	0.03
NBz	0.40	0.15	0.13	0.10	0.06	0.06	0.03	0.03	0.03	0.03
DP	0.18	0.11	0.10	0.09	0.09	0.11	0.08	0.08	0.08	0.08

表 4. Case3:H30-2 における SS, NBz, DP

	清風	公明	共産	柏愛	市民	護憲	無 A	無 B	無 C	–
議席数	11	6	5	5	3	2	1	1	1	–
議席数比例	0.31	0.17	0.14	0.14	0.09	0.06	0.03	0.03	0.03	–
SS	0.38	0.16	0.12	0.12	0.06	0.06	0.03	0.03	0.03	–
NBz	0.39	0.15	0.13	0.13	0.06	0.06	0.03	0.03	0.03	–
DP	0.16	0.13	0.11	0.11	0.10	0.10	0.09	0.09	0.09	–

表 5. Case4:H30-3〜H30-4 における SS, NBz, DP

	清風	公明	共産	柏愛	市民	護憲	無 A	無 B	無 C	–
議席数	10	7	5	5	3	2	1	1	1	–
議席数比例	0.29	0.20	0.14	0.14	0.09	0.06	0.03	0.03	0.03	–
SS	0.33	0.20	0.13	0.13	0.08	0.05	0.03	0.03	0.03	–
NBz	0.33	0.19	0.13	0.13	0.08	0.06	0.03	0.03	0.03	–
DP	0.19	0.15	0.12	0.12	0.09	0.12	0.08	0.08	0.08	–

議長の所属政党が同じである「Case1 と Case4」,「Case2 と Case3」をそれぞれ比較すると，Shapley-Shubik 指数，Banzhaf 値は，無 D の分をそのまま柏清風に加算すると考えればほぼ等しい値となった．

無 D の所属が同じである「Case1 と Case2」,「Case3 と Case4」をそれぞれ比較すると，Shapley-Shubik 指数，Banzhaf 値は，議長が柏清風から選出されたか，公明党から選出されたかによって，大きな違いがあった．

Deegan-Packel 指数は，無 D の分をそのまま柏清風に加算する値とはならず，4 つの Case で似た値となっている．

4.3.2 非対称投票力指数

限界型非対称解 (MC) や分数カウント型非対称解 (FC) については，無 D が無所属のままか，柏愛に所属するかによって分けて分析する．すなわち，Case1+2:H27-3〜H30-1，Case3+4:H30-2〜H30-4 の二つの期間に分けて分析する．分析には，swing が存在する議案パターンを用いるが，そのような議案パターンの数は，Case1+2:H27-3〜H30-1 では 117，Case3+4:H30-2〜H30-4 では 34 であった．

表 6. Case1+2 H27-3〜H30-1 無 D は無所属

	清風	公明	共産	柏愛	市民	護憲	無 A	無 B	無 C	無 D
MC	0.48	0.39	0.03	0.03	0.03	0.02	0.00	0.00	0.00	0.01
FC	0.57	0.36	0.02	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.01

表 7. Case1+2 H30-2〜H30-4 無 D は柏愛に所属

	清風	公明	共産	柏愛	市民	護憲	無 A	無 B	無 C	無 D
MC	0.19	0.21	0.10	0.09	0.10	0.08	0.06	0.09	0.06	–
FC	0.34	0.31	0.06	0.06	0.06	0.04	0.03	0.06	0.03	–

無 D が無所属の場合と柏愛に所属している場合で，限界型非対称解 (MC) や分数カウント型非対称解 (FC) を用いて分析すると，議席数の多い柏清風と公明党については無 D が無所属の場合 (Case1+2:H27-3〜H30-1) の方がより大きい影響力を持っていた．また，無 D が無所属のときには，無 D 以外の無所属議員はほとんど swing になることがなく，限界型非対称解 (MC) や分数カウント型非対称解 (FC) の値はほぼ 0 となった．

また，MC と FC については，Case1+2:H27-3〜H30-1 で柏愛と無 D の非対称投票力数との和よりも，無 D が柏愛に加わった Case3+4:H30-2〜H30-4 における柏愛の非対称投票力指数の方が明らかに大きい数値となり，柏愛の影響力が大きくなったことがわかる．

次に，対称な投票力指数である Shapley-Shubik 指数 (SS)，正規化 Banzhaf 指数 (NBz)，Deegan-Packel 指数 (DP) と，非対称な投票力指数である限界型非対称解 (MC) や分数カウント型非対称解 (FC) を比較する．無 D が無所属の場合である Case1+2:H27-3〜H30-1 においては，議席数の多い柏清風と公明党は対称な投票力指数よりも大きい値となり，無所属議員は非対称な投票力指数では小さい値となった．無 D が柏愛に所属する Case3+4:H30-2〜H30-4 では，これとは逆に議席数の多い柏清風と公明党は対称な投票力指数よりも小さくなった．

5 まとめ

本研究では，限界貢献度加重和，限界型非対称解 (MC)，分数カウント型非対称解 (FC) に関するいくつかの性質を明らかにした．また，対称な投票力指数である Shapley-Shubik 指数 (SS)，正規化 Banzhaf 指数 (NBz)，Deegan-Packel 指数 (DP) と非対称な投票力指数である限界貢献度加重和，限界型非対称解 (MC)，分数カウント型非対称解 (FC) を用いて，平成 27 年の選挙以降の柏市議会における各会派の投票力について，議長がどの会派から選出されたか，ある議員が無所属からある会派に所属することになったことも踏まえて分析を行った．

今後の課題には，非対称投票力指数の性質を明らかにすることや，他の投票力指数に関する議論，次の選挙までの期間を総合した分析などが考えられる．

References

[1] J.F. Banzhaf, Weighted votind doesn't work: a mathematical analysis, Rutgers Law Review, 19 (1965) 317–343.

[2] J. Deegan and E.W. Packel, A new index of power for simple n-person games, International Journal of Game Theory, 7 (1978) 113–123.

[3] 遠藤理世，鈴木貴，穴太克則，選考空間を構成せずに議案行動より直接計算する非対称 Banzhaf 指数，京都大学数理解析研究所研究集会講究録 1207 「不確実なモデルによる動的計画理論の課題とその展望」研究集会報告集 (2001) 128–135.

[4] E. Kalai and D. Samet, Weighted Shapley values, in: “The Shapley value – Essays in honor of Lloyd S. Shapley,” edited by A.E. Roth, Cambridge University Press, pp. 83–99, 1988.

[5] T. Matsui and Y. Uehara, A note on asymmetric power index for voting games, 日本 OR 学会 2000 年度秋季研究発表会アブストラクト集.

[6] R. Ono and S. Muto, Party power in the house of councilors in Japan: an application of the nonsymmetric Shapley-Owen index, Journal of the Operations Research Society of Japan 40 (1997) 21–32.

[7] G. Owen, Political games, Naval Research Logistics Quarterly 18 (1971) 345–355.

[8] T. Radzik and A.S. Nowak, Weighted Banzhaf values, Mathematical Methods of Operations Research 45 (1997) 109–118.

[9] L.S. Shapley, A value for n-person games, Annals of Mathematics Studies 28 (1953) 307–318.

[10] 鶴見昌代, 谷野, 哲三, 乾口, 雅弘: 貢献度に基づく協力ゲームの解とその応用, 数理解析研究所講究録 1241「数理最適化の理論とアルゴリズム」(2001), pp.30-38

[11] M. Tsurumi, T. Tanino, M. Inuiguchi, Nonsymmetric Values in Cooperative Games and Their Application, Proceedings of The Second International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, pp. 507–516 (2003)

[12] 鶴見昌代，ある市議会における投票力分析，数理解析研究所講究録 2078 「不確実性の下での意思決定理論とその応用：計画数学の展開」(2018) pp.236–242

[13] R.J. Weber, Chapter 7: Probabilistic values for games, in: “The Shapley value – Essays in honor of Lloyd S. Shapley,” edited by A.E. Roth, Cambridge University Press, pp. 101–119, 1988.

Dept. of Computer Science, Fac. of Health Sciences, Tsukuba University of Technology
Address: Kasuga 4-12-7, Tsukuba, Ibaraki, 305-8521 JAPAN
E-mail address: tsurumi@cs.k.tsukuba-tech.ac.jp