数理解析研究所講究録 第2126巻 2019年 99-105

ファジィ集合の比較と最適化に対する可能性理論的アプローチ

Possibility-theoretical approach to comparison and optimization of fuzzy sets

池 浩一郎　　田中 環
Koichiro Ike　　Tamaki Tanaka

新潟大学大学院自然科学研究科
Graduate School of Science and Technology, Niigata University

1 はじめに

ファジィ集合は Zadeh [7] によって提唱された集合の拡張概念であり，曖昧さを含む現実の事象を数学的に扱うための道具として広く認知されている．最適化や意思決定の場面においては複数の選択肢を「比べる」という行為が本質的な役割を果たすことを踏まえ，本研究では「線型空間上のファジィ集合をどのように比較すべきか」という問題に焦点を当てる．

実数直線 $\mathbb{R}$ 上のファジィ集合（特にファジィ数やファジィ区間）の比較に関しては，その扱いやすさゆえにこれまでに数多くの提案・分析が行われてきた（例えば [1]）．対照的に，多次元および一般の線型空間を対象にした同様の研究は乏しいが，定式化できる問題の幅を広げるという意味で一定の重要性をもつ．これを受けて筆者の論文 [3] では，集合最適化の分野で用いられる集合間の優劣関係（set relations）[5] を利用して，一般の線型空間におけるファジィ集合間の優劣関係を定義した．一方で，比較基準を通常の二項関係ではなくファジィ関係 [8] として表す手法も考えられる．そこで本稿では，ファジィ数に対する既存の結果 [2] を一般化することにより，ファジィ集合に対する比較基準として可能性理論に基づく六種類のファジィ関係を導き出す（類似研究 [4, 6]）．そのようにして得られたファジィ関係に対しては，前述の集合間の優劣関係による簡潔な特徴付けが可能であることが示される．加えて，最適化問題へ応用する際に用いるべき解概念についても，いくつかの候補を挙げて軽く論じる．

2 基本概念

本稿を通しては，Z を実線型位相空間とする．

初めに，ファジィ集合に関する諸定義について確認する．Z 上のファジィ集合 $\tilde{A}$ は，関数 $\mu_{\tilde{A}}\colon Z \to [0,1]$ によって一意的に定められる．各 $z \in Z$ に対して $\mu_{\tilde{A}}(z)$ は「z が $\tilde{A}$ に

属する度合い」を表すものであり，それゆえに $\mu_{\tilde{A}}$ を $\tilde{A}$ の所属度関数と呼ぶ．通常の集合（クリスプ集合）$A \subset Z$ は，その特性関数 $\chi_A\colon Z \to \{0,1\}$ を所属度関数とみることにより，ファジィ集合の特別な場合として考えることができる．Z 上のファジィ集合の全体を $\mathcal{F}(Z)$ と書くことにし，$\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(Z)$，$\alpha \in [0,1]$ に対して

- $\tilde{A} \subset \tilde{B} \ :\Longleftrightarrow\ \forall z \in Z\colon \mu_{\tilde{A}}(z) \leq \mu_{\tilde{B}}(z)$
- $\tilde{A}$ の補集合 $\tilde{A}^{\mathrm{c}}$，$\mu_{\tilde{A}^{\mathrm{c}}}(z) := 1 - \mu_{\tilde{A}}(z)\ (z \in Z)$
- $\tilde{A}$ の α-レベル集合 $[\tilde{A}]_\alpha := \begin{cases} \{z \in Z \mid \mu_{\tilde{A}}(z) \geq \alpha\} & (\alpha \in (0,1]) \\ \mathrm{cl}\,\{z \in Z \mid \mu_{\tilde{A}}(z) > 0\} & (\alpha = 0) \end{cases}$
- $\tilde{A}$ が正規 $:\Longleftrightarrow\ \exists z \in Z\colon \mu_{\tilde{A}}(z) = 1$

と定める．直積 $Z \times Z$ 上のファジィ集合 $\tilde{R}$ を Z 上のファジィ関係といい，所属度関数 $\mu_{\tilde{R}}\colon Z \times Z \to [0,1]$ が「関係の成り立つ度合い」を表すものと解釈する．

次に，ベクトル間の順序を基にした集合間の六種類の優劣関係，およびファジィ集合の場合へのそれらの自然な拡張を紹介する．$C \subset Z$ を凸錐とし，Z 上の前順序（反射性と推移性を満たす二項関係）$\leq_C$ を次のように与える：$z_1, z_2 \in Z$ に対して

$$z_1 \leq_C z_2 \ :\Longleftrightarrow\ z_2 - z_1 \in C.$$

定義 1. $A, B \subset Z$ に対して

$$\begin{aligned}
A \leq_C^{(1)} B \ &:\Longleftrightarrow\ \forall a \in A\ \forall b \in B\colon a \leq_C b, \\
A \leq_C^{(2L)} B \ &:\Longleftrightarrow\ \exists a \in A\ \forall b \in B\colon a \leq_C b, \\
A \leq_C^{(2U)} B \ &:\Longleftrightarrow\ \exists b \in B\ \forall a \in A\colon a \leq_C b, \\
A \leq_C^{(3L)} B \ &:\Longleftrightarrow\ \forall b \in B\ \exists a \in A\colon a \leq_C b, \\
A \leq_C^{(3U)} B \ &:\Longleftrightarrow\ \forall a \in A\ \exists b \in B\colon a \leq_C b, \\
A \leq_C^{(4)} B \ &:\Longleftrightarrow\ \exists a \in A\ \exists b \in B\colon a \leq_C b
\end{aligned}$$

と定める．

これは，[5] における元の定義をより本質的な形に記述し直したものである．$A, B \neq \emptyset$ であれば，強弱に関して

$$\begin{aligned}
&A \leq_C^{(1)} B \implies A \leq_C^{(2L)} B \implies A \leq_C^{(3L)} B \implies A \leq_C^{(4)} B, \\
&A \leq_C^{(1)} B \implies A \leq_C^{(2U)} B \implies A \leq_C^{(3U)} B \implies A \leq_C^{(4)} B
\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．

定義 2. $i \in \{1, 2L, 2U, 3L, 3U, 4\}$，$\Omega \subset [0,1]$，$\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(Z)$ に対して

$$\tilde{A} \leq_C^{\Omega(i)} \tilde{B} \ :\Longleftrightarrow\ \forall \alpha \in \Omega\colon [\tilde{A}]_\alpha \leq_C^{(i)} [\tilde{B}]_\alpha$$

と定める．

$\tilde{A}, \tilde{B}$ が正規であれば，集合間の優劣関係と同様に

$$\begin{aligned}
&\tilde{A} \leq_C^{\Omega(1)} \tilde{B} \implies \tilde{A} \leq_C^{\Omega(2L)} \tilde{B} \implies \tilde{A} \leq_C^{\Omega(3L)} \tilde{B} \implies \tilde{A} \leq_C^{\Omega(4)} \tilde{B}, \\
&\tilde{A} \leq_C^{\Omega(1)} \tilde{B} \implies \tilde{A} \leq_C^{\Omega(2U)} \tilde{B} \implies \tilde{A} \leq_C^{\Omega(3U)} \tilde{B} \implies \tilde{A} \leq_C^{\Omega(4)} \tilde{B}
\end{aligned}$$

が得られる．[3] ではファジィ集合の差を評価する関数を導入して，優劣関係 $\leq_C^{\Omega(i)}$ の特徴付けを行っている．ここでは割愛するが，詳しくはそちらを参照されたい．

3　可能性理論に基づく比較基準

$A, B \subset Z$ に対して

$$\Pi_A(B) := \begin{cases} 1 & (A \cap B \neq \emptyset) \\ 0 & (A \cap B = \emptyset), \end{cases} \qquad N_A(B) := \begin{cases} 1 & (A \subset B) \\ 0 & (A \not\subset B) \end{cases}$$

とおく．$\Pi_A(B)$ は「$z \in A$ のときに $z \in B$ が可能かどうか」，$N_A(B)$ は「$z \in A$ のときに $z \in B$ が必然かどうか」を表す指標であり，それゆえに $\Pi_A(\cdot)$ を可能性測度，$N_A(\cdot)$ を必然性測度と呼ぶ．特性関数による表現

$$\begin{aligned}
\Pi_A(B) &= \sup_{z \in Z} \min \{\chi_A(z), \chi_B(z)\}, \\
N_A(B) &= \inf_{z \in Z} \max \{1 - \chi_A(z), \chi_B(z)\}
\end{aligned}$$

を利用することで，これらをファジィ集合の場合へと次のように拡張できる．

定義 3. $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(Z)$ に対して

$$\begin{aligned}
\Pi_{\tilde{A}}(\tilde{B}) &:= \sup_{z \in Z} \min \{\mu_{\tilde{A}}(z), \mu_{\tilde{B}}(z)\}, \\
N_{\tilde{A}}(\tilde{B}) &:= \inf_{z \in Z} \max \{1 - \mu_{\tilde{A}}(z), \mu_{\tilde{B}}(z)\}
\end{aligned}$$

と定める．

明らかに，$\Pi_{\tilde{A}}(\tilde{B}), N_{\tilde{A}}(\tilde{B}) \in [0,1]$ である．また，性質として

- $\Pi_{\tilde{A}}(\tilde{B}) = 1 - N_{\tilde{A}}(\tilde{B}^{\mathrm{c}})$，$N_{\tilde{A}}(\tilde{B}) = 1 - \Pi_{\tilde{A}}(\tilde{B}^{\mathrm{c}})$（双対性）
- $\tilde{B}_1 \subset \tilde{B}_2 \implies \Pi_{\tilde{A}}(\tilde{B}_1) \leq \Pi_{\tilde{A}}(\tilde{B}_2)$，$N_{\tilde{A}}(\tilde{B}_1) \leq N_{\tilde{A}}(\tilde{B}_2)$（単調性）
- $\tilde{A}$ が正規であるとき $N_{\tilde{A}}(\tilde{B}) \leq \Pi_{\tilde{A}}(\tilde{B})$（必然ならば可能）

が成り立つ．

以下では，[2] におけるファジィ数を対象とした議論を一般化することにより，可能性理論に基づく $\mathcal{F}(Z)$ 上のファジィ関係を構成する過程を見ていく．$z \in Z$ に対して，ベクトル間の順序 $\leq_C$ の意味で z 以上，z 以下の要素の集合として

$$[z, +\infty)_C := \{z' \in Z \mid z \leq_C z'\} = z + C,$$
$$(-\infty, z]_C := \{z' \in Z \mid z' \leq_C z\} = z - C$$

とおく．その上で，$\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(Z)$ に対して

(i) 可能的に $\tilde{A}$ 以上の要素から成るファジィ集合 $[\tilde{A}, +\infty)_C^\Pi$,

$$\mu_{[\tilde{A},+\infty)_C^\Pi}(z) := \Pi_{\tilde{A}}((-\infty, z]_C) = \sup_{\substack{z' \in Z \\ z' \leq_C z}} \mu_{\tilde{A}}(z')$$

(ii) 必然的に $\tilde{A}$ 以上の要素から成るファジィ集合 $[\tilde{A}, +\infty)_C^N$,

$$\mu_{[\tilde{A},+\infty)_C^N}(z) := N_{\tilde{A}}((-\infty, z]_C) = \inf_{\substack{z' \in Z \\ z' \not\leq_C z}} (1 - \mu_{\tilde{A}}(z'))$$

(iii) 可能的に $\tilde{B}$ 以下の要素から成るファジィ集合 $(-\infty, \tilde{B}]_C^\Pi$,

$$\mu_{(-\infty,\tilde{B}]_C^\Pi}(z) := \Pi_{\tilde{B}}([z, +\infty)_C) = \sup_{\substack{z' \in Z \\ z \leq_C z'}} \mu_{\tilde{B}}(z')$$

(iv) 必然的に $\tilde{B}$ 以下の要素から成るファジィ集合 $(-\infty, \tilde{B}]_C^N$,

$$\mu_{(-\infty,\tilde{B}]_C^N}(z) := N_{\tilde{B}}([z, +\infty)_C) = \inf_{\substack{z' \in Z \\ z \not\leq_C z'}} (1 - \mu_{\tilde{B}}(z'))$$

を定義する．これらの半区間に相当するファジィ集合と可能性測度，必然性測度を組み合わせれば，以下の八つの指標を考えることができる：

(i) $\tilde{B}$ が可能的に $\tilde{A}$ 以上である可能性

$$\Pi_{\tilde{B}}([\tilde{A}, +\infty)_C^\Pi) = \sup_{\substack{z_1, z_2 \in Z \\ z_1 \leq_C z_2}} \min\{\mu_{\tilde{A}}(z_1), \mu_{\tilde{B}}(z_2)\}$$

(ii) $\tilde{B}$ が可能的に $\tilde{A}$ 以上である必然性

$$N_{\tilde{B}}([\tilde{A}, +\infty)_C^\Pi) = \inf_{z_2 \in Z} \sup_{\substack{z_1 \in Z \\ z_1 \leq_C z_2}} \max\{\mu_{\tilde{A}}(z_1), 1 - \mu_{\tilde{B}}(z_2)\}$$

(iii) $\tilde{B}$ が必然的に $\tilde{A}$ 以上である可能性

$$\Pi_{\tilde{B}}([\tilde{A}, +\infty)_C^N) = \sup_{z_2 \in Z} \inf_{\substack{z_1 \in Z \\ z_1 \not\leq_C z_2}} \min\{1 - \mu_{\tilde{A}}(z_1), \mu_{\tilde{B}}(z_2)\}$$

(iv) $\tilde{B}$ が必然的に $\tilde{A}$ 以上である必然性

$$N_{\tilde{B}}([\tilde{A},+\infty)_C^N) = \inf_{\substack{z_1,z_2\in Z \\ z_1 \not\leq_C z_2}} \max\{1-\mu_{\tilde{A}}(z_1), 1-\mu_{\tilde{B}}(z_2)\}$$

(v) $\tilde{A}$ が可能的に $\tilde{B}$ 以下である可能性

$$\Pi_{\tilde{A}}((-\infty,\tilde{B}]_C^{\Pi}) = \sup_{\substack{z_1,z_2\in Z \\ z_1 \leq_C z_2}} \min\{\mu_{\tilde{A}}(z_1), \mu_{\tilde{B}}(z_2)\}$$

(vi) $\tilde{A}$ が可能的に $\tilde{B}$ 以下である必然性

$$N_{\tilde{A}}((-\infty,\tilde{B}]_C^{\Pi}) = \inf_{z_1\in Z} \sup_{\substack{z_2\in Z \\ z_1 \leq_C z_2}} \max\{1-\mu_{\tilde{A}}(z_1), \mu_{\tilde{B}}(z_2)\}$$

(vii) $\tilde{A}$ が必然的に $\tilde{B}$ 以下である可能性

$$\Pi_{\tilde{A}}((-\infty,\tilde{B}]_C^N) = \sup_{z_1\in Z} \inf_{\substack{z_2\in Z \\ z_1 \not\leq_C z_2}} \min\{\mu_{\tilde{A}}(z_1), 1-\mu_{\tilde{B}}(z_2)\}$$

(viii) $\tilde{A}$ が必然的に $\tilde{B}$ 以下である必然性

$$N_{\tilde{A}}((-\infty,\tilde{B}]_C^N) = \inf_{\substack{z_1,z_2\in Z \\ z_1 \not\leq_C z_2}} \max\{1-\mu_{\tilde{A}}(z_1), 1-\mu_{\tilde{B}}(z_2)\}.$$

これらの指標は全て，不等式 “$\tilde{A} \leq \tilde{B}$” の成立度合いを別個の観点で表したものである．したがって，(i) と (v)，(iv) と (viii) の式がそれぞれ一致することに注意すれば，次のような六種類のファジィ関係へとまとめられる．

定義 4. $\mathcal{F}(Z)$ 上のファジィ関係 $\precsim_C^{(i)}$ $(i \in \{1, 2L, 2U, 3L, 3U, 4\})$ を

$$\begin{aligned}
\mu_{\precsim_C^{(1)}}(\tilde{A},\tilde{B}) &:= N_{\tilde{B}}([\tilde{A},+\infty)_C^N) = N_{\tilde{A}}((-\infty,\tilde{B}]_C^N), \\
\mu_{\precsim_C^{(2L)}}(\tilde{A},\tilde{B}) &:= \Pi_{\tilde{A}}((-\infty,\tilde{B}]_C^N), \\
\mu_{\precsim_C^{(2U)}}(\tilde{A},\tilde{B}) &:= \Pi_{\tilde{B}}([\tilde{A},+\infty)_C^N), \\
\mu_{\precsim_C^{(3L)}}(\tilde{A},\tilde{B}) &:= N_{\tilde{B}}([\tilde{A},+\infty)_C^{\Pi}), \\
\mu_{\precsim_C^{(3U)}}(\tilde{A},\tilde{B}) &:= N_{\tilde{A}}((-\infty,\tilde{B}]_C^{\Pi}), \\
\mu_{\precsim_C^{(4)}}(\tilde{A},\tilde{B}) &:= \Pi_{\tilde{B}}([\tilde{A},+\infty)_C^{\Pi}) = \Pi_{\tilde{A}}((-\infty,\tilde{B}]_C^{\Pi})
\end{aligned}$$

により定める．

ここで得られたファジィ関係と等価なものが，[6] では部分的に，[4] ではより一般の設定で既に与えられている．しかしながら，次の定理で示される特徴付けは新規の結果である．集合間の優劣関係（定義 1）と同じ番号付けを用いる理由も，次から分かる．

定理 1. $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(Z)$ に対して

$$\begin{aligned}
\mu_{\precsim_C^{(1)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \sup\left\{\alpha \in [0,1] \,\middle|\, [\tilde{A}]_{1-\alpha} \leq_C^{(1)} [\tilde{B}]_{1-\alpha}\right\},\\
\mu_{\precsim_C^{(2L)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \sup\left\{\alpha \in [0,1] \,\middle|\, [\tilde{A}]_{\alpha} \leq_C^{(2L)} [\tilde{B}]_{1-\alpha}\right\},\\
\mu_{\precsim_C^{(2U)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \sup\left\{\alpha \in [0,1] \,\middle|\, [\tilde{A}]_{1-\alpha} \leq_C^{(2U)} [\tilde{B}]_{\alpha}\right\},\\
\mu_{\precsim_C^{(3L)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \sup\left\{\alpha \in [0,1] \,\middle|\, [\tilde{A}]_{\alpha} \leq_C^{(3L)} [\tilde{B}]_{1-\alpha}\right\},\\
\mu_{\precsim_C^{(3U)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \sup\left\{\alpha \in [0,1] \,\middle|\, [\tilde{A}]_{1-\alpha} \leq_C^{(3U)} [\tilde{B}]_{\alpha}\right\},\\
\mu_{\precsim_C^{(4)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \sup\left\{\alpha \in [0,1] \,\middle|\, [\tilde{A}]_{\alpha} \leq_C^{(4)} [\tilde{B}]_{\alpha}\right\}
\end{aligned}$$

が成り立つ．

$\tilde{A}, \tilde{B}$ が正規であれば，この定理と集合間の優劣関係の性質から

$$\begin{aligned}
&\mu_{\precsim_C^{(1)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\precsim_C^{(2L)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\precsim_C^{(3L)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\precsim_C^{(4)}}(\tilde{A}, \tilde{B}),\\
&\mu_{\precsim_C^{(1)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\precsim_C^{(2U)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\precsim_C^{(3U)}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\precsim_C^{(4)}}(\tilde{A}, \tilde{B})
\end{aligned}$$

が導かれる．

最後に，定義 4 のファジィ関係 $\precsim_C^{(i)}$ を最適化問題へと応用する際に用いるべき解概念について論じる．空でない集合 X，ファジィ集合値写像 $\tilde{F}\colon X \to \mathcal{F}(Z)$，$\mathcal{F}(Z)$ 上のファジィ関係 $\precsim$ に対して，次の最適化問題を考える：

$$\boxed{\text{(P) Minimize } \tilde{F}(x) \text{ subject to } x \in X \text{ with respect to } \precsim.}$$

$\bar{x} \in X$ が問題 (P) の最適解であることの定義は，$\precsim$ がファジィ関係であることも相まって様々に考えられる．例えば，以下の六つが挙げられる（(iv)–(vi) では $\alpha \in (0,1]$ とする）：

(i) $\varphi(\bar{x}) = \sup_{x \in X} \varphi(x) > 0$，ただし $\varphi(x) := \inf_{x' \in X \setminus \{x\}} \mu_{\precsim}(\tilde{F}(x), \tilde{F}(x'))$

(ii) $\psi(\bar{x}) = \inf_{x \in X} \psi(x) < 1$，ただし $\psi(x) := \sup_{x' \in X \setminus \{x\}} \mu_{\precsim}(\tilde{F}(x'), \tilde{F}(x))$

(iii) $\forall x \in X\colon \mu_{\precsim}(\tilde{F}(x), \tilde{F}(\bar{x})) \leq \mu_{\precsim}(\tilde{F}(\bar{x}), \tilde{F}(x))$

(iv) $\forall x \in X \setminus \{\bar{x}\}\colon \mu_{\precsim}(\tilde{F}(\bar{x}), \tilde{F}(x)) \geq \alpha$

(v) $\nexists x \in X \setminus \{\bar{x}\}\colon \mu_{\precsim}(\tilde{F}(x), \tilde{F}(\bar{x})) \geq \alpha$

(vi) $\forall x \in X\colon \left(\mu_{\precsim}(\tilde{F}(x), \tilde{F}(\bar{x})) \geq \alpha \implies \mu_{\precsim}(\tilde{F}(\bar{x}), \tilde{F}(x)) \geq \alpha\right)$.

$\precsim$ において左の要素が右の要素を「支配する」と解釈すれば，大まかに言って (i) は「$\tilde{F}(\bar{x})$ の他を支配する度合いが最も高い」，(ii) は「$\tilde{F}(\bar{x})$ の他に支配される度合いが最も低い」，(iii) は「$\tilde{F}(\bar{x})$ が相対的に他を支配する」ということを表している．(iv)–(vi) は，考慮に入れる度合いの下限をパラメータ α によって決めた上で (i)–(iii) と類似の内容を表している．

関係 $\precsim$ がクリスプである（すなわち，通常の二項関係とみなせる）場合には

$$\begin{aligned}
\text{(i)} &\iff \text{(iv)} \iff \forall x \in X \setminus \{\bar{x}\} \colon \tilde{F}(\bar{x}) \precsim \tilde{F}(x), \\
\text{(ii)} &\iff \text{(v)} \iff \nexists x \in X \setminus \{\bar{x}\} \colon \tilde{F}(x) \precsim \tilde{F}(\bar{x}), \\
\text{(iii)} &\iff \text{(vi)} \iff \forall x \in X \colon \left(\tilde{F}(x) \precsim \tilde{F}(\bar{x}) \implies \tilde{F}(\bar{x}) \precsim \tilde{F}(x)\right)
\end{aligned}$$

となる．これら三つはベクトル最適化および集合最適化で扱われる自然な解概念に対応しており，その意味で上に挙げた (i)–(vi) は一定の妥当性を有していると言える．

4　おわりに

ファジィ理論の視座で概念どうしの相性を考慮すれば，定義 2 の二項関係 $\leq_C^{\Omega(i)}$ よりも定義 4 のファジィ関係 $\precsim_C^{(i)}$ の方が，ファジィ集合に対する比較基準としてふさわしいと考えられる．最適化において個々の関係に適した解概念の検討も含めて，$\precsim_C^{(i)}$ に関わる性質・結果をさらに突き詰めていく必要性を感じており，それを今後の研究課題の一つとしたい．

参考文献

[1] M. Brunelli and J. Mezei, *How different are ranking methods for fuzzy numbers? A numerical study*, Internat. J. Approx. Reason. **54** (2013), 627–639.

[2] D. Dubois and H. Prade, *Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory*, Inform. Sci. **30** (1983), 183–224.

[3] K. Ike and T. Tanaka, *Convex-cone-based comparisons of and difference evaluations for fuzzy sets*, Optimization **67** (2018), 1051–1066.

[4] 乾口雅弘, 市橋秀友, 田中英夫, 様相概念に基づくファジィ選好関係の拡張とその性質, 計測自動制御学会論文集 **24** (1988), 738–745.

[5] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T. X. D. Ha, *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Anal. **30** (1997), 1487–1496.

[6] 桑野裕昭, 可能性理論に基づくファジィ集合間の順序指標に関する一考察, 数理解析研究所講究録 **1194** (2001), 67–72.

[7] L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Inform. Control **8** (1965), 338–353.

[8] L. A. Zadeh, *Similarity relations and fuzzy orderings*, Inform. Sci. **3** (1971), 177–200.