数理解析研究所講究録 第2126巻 2019年 128-137

スタンバイ客を見込んだ多期間 Littlewood の法則
Multi-Period Littlewood's Rule for Static Model with Standby Customers in Revenue Management

筑波大学名誉教授・高木英明
Hideaki Takagi
Professor Emeritus, University of Tsukuba

概 要

Classical Littlewood's rule (1972) for the two-period static revenue management of a single perishable resource is extended to a generic T-period model with monotonically increasing fixed fares, ending with standby customers with a special fare. The expected revenue in the entire period is expressed explicitly in terms of multiple integrals involving the distribution function of the demand in each period. The exact optimal protection level in each period is calculated successively, resulting in the maximized expected revenue. We show some numerical examples with comments on the effects of accepting standby customers on the optimal booking limits and the increase in the expected revenue.

1 はじめに

航空会社やホテル等のサービス企業では，サービス施設の維持に係る固定費が事業経費の大部分を占める一方で，収益は毎日の施設利用率に依存するので，関係式

利益 (profit) ＝ **収益** (revenue) − **費用** (cost)

で与えられる利益の増加を収益の増加により図る．また，航空機の座席やホテルの客室という商品は，決められた利用日が過ぎれば価値が無くなる．従って，**支払い意思** (willingness to pay) が異なる顧客セグメントからの時間的に変動する需要に対応して，どのように予約を受け付けていけば最終的に収益を最大化することができるかという**消滅資源の容量管理** (capacity control of perishable resource) の方法が研究されてきた．このような最適化問題は一般に**レベニューマネジメント** (revenue management) と呼ばれる [6].

その数理的モデルの嚆矢は，1972 年に Littlewood [2] が発表した，前期に安く座席を予約するレジャー客と後期に高額でも予約するビジネス客から構成される 2 期間モデルについて，期待収益が最大になるように，レジャー客に与える予約数の最適上限値，すなわち**最適ブッキングリミット** (optimal booking limit) をビジネス客の需要の確率分布関数から決める **Littlewood の法則** (Littlewood's rule) と呼ばれる簡単な公式である．但し，後期には前期に売れ残った座席も併せてビジネス客に売ることができるという**ネスト式ブッキング** (nested booking) を仮定する．

Littlewood の 2 期間モデルは，その後，各期の料金が時間とともに単調増加する多期間の場合について，Belobaba (1987) が近似法を提案し，Curry (1990), Wollmer (1992) らが Bellman の最適性原理に基づく厳密解法を発表し，1993 年に Brumelle and McGill [1] が Markov 決定過程を示して，後続の理論研究や現在の航空会社で使われている予約管理ソフトウェアでの実装の基礎となった（これらの文献は [4] を参照）．さらに，1995 年に Robinson[3] が，各期の料金が時間とともに必ずしも単調増加しない多期間の場合に対する解法を提案した．これらのモデルは，各期の需要に対応する料金クラスを固定しているので，**静的モデル** (static model) と呼ばれる．

本稿では，Robinson [3] が一例として採り上げた「最後に座席が残っていれば格安料金でスタンバイ客に売る」モデルに特化した厳密な最適化問題の解法を数値計算例とともに示す．各期における最適ブッキングリミットを翌期以降の需要の確率分布関数の多重積分で明示的に与える数式を導き，その結果が上記の一連の研究の拡張になっていることを示す．

2　スタンバイ客のある 2 期間モデル

航空機の座席予約の文脈でモデルと記号を説明する．まず，2 期間の後にスタンバイ客を受け付けるモデル（図 1）の解析を示す．総座席数を C とする．期の番号は，時間が進む方向に，2 期，1 期と進む．スタンバイ客を 0 期の客と見なす．各期の需要は互いに独立であり，t 期の需要を表す確率変数 D_t の分布関数と密度関数をそれぞれ $F_t(x) := P\{D_t \le x\}$ 及び $f_t(x) := dF_t(x)/dx,\ t = 0,1,2$ とする．t 期に予約するときの料金を r_t 円と書き，$r_2 < r_1$ を仮定し，r_0 は任意とする．t 期のブッキングリミットを b_t ($b_2 \le b_1 \le b_0 \equiv C$）とする．

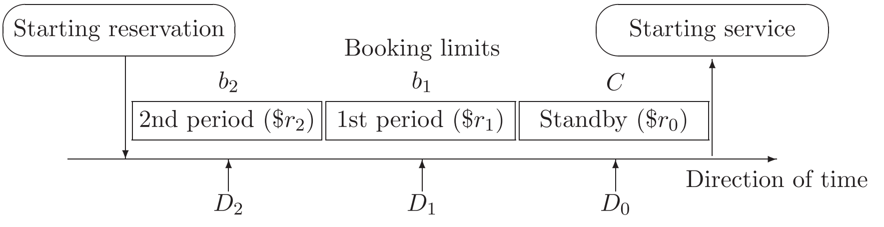

図 1: スタンバイ客のある 2 期間モデル.

このとき，2 期の予約数，1 期の予約数，スタンバイ客への販売数は

$$
\begin{aligned}
S_2(b_2) &= \min\{b_2, D_2\},\\
S_1(b_1,b_2) &= \min\{b_1 - b_2 + \underbrace{\max\{0, b_2 - D_2\}}_{\text{2 期に売れ残った座席数}}, D_1\},\\
S_0(b_1,b_2) &= \min\{C - b_1 + \underbrace{\max\{0, b_1 - b_2 + \max\{0, b_2 - D_2\} - D_1\}}_{\text{1 期に売れ残った座席数}}, D_0\}
\end{aligned}
$$

である．これらの期待値は，それぞれ次のように与えられる．

$$
\begin{aligned}
E[S_2(b_2)] &= \int_0^{b_2} [1 - F_2(x)]dx,\\
E[S_1(b_1,b_2)] &= \int_0^{b_1-b_2} [1 - F_1(x)]dx + \int_0^{b_2} F_2(x)[1 - F_1(b_1 - x)]dx,\\
E[S_0(b_1,b_2)] &= \int_0^{C-b_1} [1 - F_0(x)]dx + \int_0^{b_1-b_2} F_1(x)[1 - F_0(C - x - b_2)]dx\\
&\quad + \int_0^{b_2} F_2(y)dy \int_0^{b_1-y} f_1(x)[1 - F_0(C - x - y)]dx.
\end{aligned}
$$

2 期間とスタンバイ客からの期待収益は

$$R(b_1, b_2) = r_2 E[S_2(b_2)] + r_1 E[S_1(b_1, b_2)] + r_0 E[S_0(b_1, b_2)]$$

で与えられる．これを最大にする $\{b_1, b_2\}$ の値（最適ブッキングリミット）$\{b_1^*, b_2^*\}$ は，2 変数の関数 $R(b_1, b_2)$ の 1 階偏微分係数を 0 とおく必要条件

$$\left.\frac{\partial R(b_1, b_2)]}{\partial b_t}\right|_{b_1=b_1^*, b_2=b_2^*} = 0 \qquad t = 1, 2 \tag{1}$$

から求められる．式 (1) から導かれる方程式を $r_1 < r_0$ と $r_0 \le r_1$ の場合に分けて示す．

(i) $r_1 < r_0$ の場合には，ブッキングリミット b_1^*, b_2^* に代えて，

$$y_0^* := C - b_1^* \quad ; \quad y_1^* := C - b_2^* \qquad (b_1^* - b_2^* = y_1^* - y_0^*)$$

で定義される**プロテクションレベル** (protection level) y_0^*, y_1^* を導入すれば，式 (1) から

$$\begin{aligned} r_1 &= r_0[1 - F_0(C - b_1^*)] = r_0 P\{D_0 > y_0^*\}, \\ r_2 &= r_1[1 - F_1(b_1^* - b_2^*)] + r_0 \int_0^{b_1^* - b_2^*} f_1(x)[1 - F_0(C - x - b_2^*)]dx \\ &= r_1 P\{D_1 > b_1^* - b_2^*\} + r_0 P\{D_0 + D_1 > C - b_2^*, D_1 \le b_1^* - b_2^*\} \\ &= r_0 \left(P\{D_0 > y_0^*, D_1 > y_1^* - y_0^*\} + P\{D_0 + D_1 > y_1^*, D_1 \le y_1^* - y_0^*\}\right) \\ &= r_0 P\{D_0 > y_0^*, D_0 + D_1 > y_1^*\} \end{aligned} \tag{2}$$

が得られる（図 2 参照）．方程式 (2) により，所与の $\{r_2, r_1, r_0\}$ から $\{b_1^*, b_2^*\}$ が決まり，最大期待収益は次のように与えられる．

$$R(b_1^*, b_2^*) = r_2 E[S_2(b_2^*)] + r_1 E[S_1(b_1^*, b_2^*)] + r_0 E[S_0(b_1^*, b_2^*)].$$

(ii) $r_0 \le r_1$ の場合には，1 期においてスタンバイ客のために座席を留保する理由はないので，$b_1 = C$ とすればよい．このとき，2 期間の予約とスタンバイ客への販売からの期待収益は

$$R(C, b_2) = r_2 E[S_2(b_2)] + r_1 E[S_1(C, b_2)] + r_0 E[S_0(C, b_2)]$$

で与えられる．これは 1 変数 b_2 だけの関数であり，必要条件 $dR(C, b_2)/db_2|_{b_2=b_2^*} = 0$ より，b_2^* に対する方程式

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1[1 - F_1(C - b_2^*)] + r_0 \int_0^{C - b_2^*} f_1(x)[1 - F_0(C - x - b_2^*)]dx \\ &= r_1 P\{D_1 > C - b_2^*\} + r_0 P\{D_0 + D_1 > C - b_2^*, D_1 \le C - b_2^*\} \\ &= r_1 P\{D_1 > y_1^*\} + r_0 P\{D_0 + D_1 > y_1^*, D_1 \le y_1^*\} \\ &= r_1 P\{D_1 > y_1^*\} + r_0 \left(P\{D_0 + D_1 > y_1^*\} - P\{D_1 > y_1^*\}\right) \\ &= (r_1 - r_0) P\{D_1 > y_1^*\} + r_0 P\{D_0 + D_1 > y_1^*\} \end{aligned} \tag{3}$$

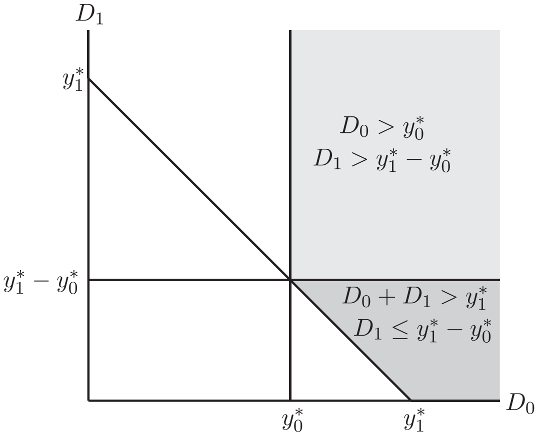

図 2: 領域 $\{D_0 > y_0^*, D_0 + D_1 > y_1^*\}$.

が得られる．方程式 (3) により，所与の $\{r_2, r_1, r_0\}$ から b_2^* が決まり，このときの最大期待収益は次のように与えられる．

$$R(C, b_2^*) = r_2 E[S_2(b_2^*)] + r_1 E[S_1(C, b_2^*)] + r_0 E[S_0(C, b_2^*)].$$

もし $r_0 = 0$ なら，スタンバイ客による収益は発生しないので，方程式 (3) は Littlewood の法則 [2] $r_2 = r_1 P\{D_1 > y_1^*\}$ に帰着する．

3　スタンバイ客のある T 期間モデル

以上の解析を一般の T 期間モデルに敷衍する．総座席数を C とする．各期に，時間が進む方向に $T, T-1, \ldots, 2, 1$ 期と番号を付ける．スタンバイ客を 0 期の客と見なす．各期の需要は互いに独立であり，t 期の需要を表す確率変数 D_t の分布関数と密度関数をそれぞれ $F_t(x) := P\{D_t \leq x\}$ 及び $f_t(x) := dF_t(x)/dx$, $1 \leq t \leq T$ とする．t 期に予約するときの料金を r_t 円とし，t 期のブッキングリミットを b_t とし（$0 \leq t \leq T$），以下の単調性を仮定する．r_0 は任意とする．

$$r_T < r_{T-1} < \cdots < r_2 < r_1 \quad ; \quad b_T \leq b_{T-1} \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0 \equiv C.$$

T 期間とスタンバイ客のあるモデルにおいて，最初の T 期の予約数とその期待値は

$$S_T(b_T) = \min\{b_T, D_T\} \quad ; \quad E[S_T(b_T)] = \int_0^{b_T} [1 - F_T(x)] dx$$

である．$1 \leq t \leq T-1$ について，t 期の予約数は

$$\begin{aligned}
&S_t(b_t, b_{t+1}, \ldots, b_{T-1}, b_T) \\
&:= \min\{b_t - b_{t+1} + \max\{0, b_{t+1} - b_{t+2} + \max\{0, b_{t+2} - b_{t+3} + \cdots \\
&+ \max\{0, b_{T-1} - b_T + \max\{0, b_T - D_T\} - D_{T-1}\} - \cdots - D_{t+2}\} - D_{t+1}\}, D_t\}
\end{aligned}$$

であり，この期待値は次の多重定積分で与えられる．

$$
\begin{aligned}
&E[S_t(b_t, b_{t+1}, \ldots, b_{T-1}, b_T)] \\
&= \int_0^{b_t - b_{t+1}} [1 - F_t(x_t)]dx_t + \int_0^{b_{t+1}-b_{t+2}} F_{t+1}(x_{t+1})[1 - F_t(b_t - x_{t+1} - b_{t+2})]dx_{t+1} \\
&+ \int_0^{b_{t+2}-b_{t+3}} F_{t+2}(x_{t+2})dx_{t+2} \int_0^{b_{t+1}-x_{t+2}-b_{t+3}} f_{t+1}(x_{t+1})[1 - F_t(b_t - x_{t+1} - x_{t+2} - b_{t+3})]dx_{t+1} \\
&+ \int_0^{b_{t+3}-b_{t+4}} F_{t+3}(x_{t+3})dx_{t+3} \int_0^{b_{t+2}-x_{t+3}-b_{t+4}} f_{t+2}(x_{t+2})dx_{t+2} \\
&\quad \int_0^{b_{t+1}-x_{t+2}-x_{t+3}-b_{t+4}} f_{t+1}(x_{t+1})[1 - F_t(b_t - x_{t+1} - x_{t+2} - x_{t+3} - b_{t+4})]dx_{t+1} \\
&+ \int_0^{b_{t+4}-b_{t+5}} F_{t+4}(x_{t+4})dx_{t+4} \int_0^{b_{t+3}-x_{t+4}-b_{t+5}} f_{t+3}(x_{t+3})dx_{t+3} \\
&\quad \int_0^{b_{t+2}-x_{t+3}-x_{t+4}-b_{t+5}} f_{t+2}(x_{t+2})dx_{t+2} \\
&\quad \int_0^{b_{t+1}-x_{t+2}-x_{t+3}-x_{t+4}-b_{t+5}} f_{t+1}(x_{t+1})[1 - F_t(b_t - x_{t+1} - x_{t+2} - x_{t+3} - x_{t+4} - b_{t+5})]dx_{t+1} \\
&+ \cdots \\
&+ \int_0^{b_{T-1}-b_T} F_{T-1}(x_{T-1})dx_{T-1} \int_0^{b_{T-2}-x_{T-1}-b_T} f_{T-2}(x_{T-2})dx_{T-2} \\
&\quad \int_0^{b_{T-3}-x_{T-2}-x_{T-1}-b_T} f_{T-3}(x_{T-3})dx_{T-3} \cdots \\
&\quad \int_0^{b_{t+1}-x_{t+2}-x_{t+3}-\cdots-x_{T-1}-b_T} f_{t+1}(x_{t+1})[1 - F_t(b_t - x_{t+1} - x_{t+2} - \cdots - x_{T-1} - b_T)]dx_{t+1} \\
&+ \int_0^{b_T} F_T(x_T)dx_T \int_0^{b_{T-1}-x_T} f_{T-1}(x_{T-1})dx_{T-1} \int_0^{b_{T-2}-x_{T-1}-x_T} f_{T-2}(x_{T-2})dx_{T-2} \\
&\quad \int_0^{b_{T-3}-x_{T-2}-x_{T-1}-x_T} f_{T-3}(x_{T-3})dx_{T-3} \cdots \\
&\quad \int_0^{b_{t+1}-x_{t+2}-x_{t+3}-\cdots-x_{T-1}-x_T} f_{t+1}(x_{t+1})[1 - F_t(b_t - x_{t+1} - x_{t+2} - \cdots - x_{T-1} - x_T)]dx_{t+1}.
\end{aligned}
$$

また，スタンバイ客に売られる座席数は

$$
\begin{aligned}
&S_0(b_1, b_2, \ldots, b_{T-1}, b_T) \\
&= \min\{\max\{0, C - b_1 + \max\{0, b_1 - b_2 + \max\{0, b_2 - b_3 + \cdots \\
&+ \max\{0, b_{T-1} - b_T + \max\{0, b_T - D_T\} - D_{T-1}\} - \cdots - D_2\} - D_1\}, D_0\}
\end{aligned}
$$

であり，この期待値は次のように与えられる．

$$
\begin{aligned}
&E[S_0(b_1, b_2, \ldots, b_{T-1}, b_T)] \\
&= \int_0^{C-b_1} [1 - F_0(x_0)] dx_0 + \int_0^{b_1-b_2} F_1(x_1)[1 - F_0(C - x_1 - b_2)] dx_1 \\
&+ \int_0^{b_2-b_3} F_2(x_2) dx_2 \int_0^{b_1-x_2-b_3} f_1(x_1)[1 - F_0(C - x_1 - x_2 - b_3)] dx_1 \\
&+ \int_0^{b_3-b_4} F_3(x_3) dx_3 \int_0^{b_2-x_3-b_4} f_2(x_2) dx_2 \\
&\quad \int_0^{b_1-x_2-x_3-b_4} f_1(x_1)[1 - F_0(C - x_1 - x_2 - x_3 - b_4)] dx_1 \\
&+ \int_0^{b_4-b_5} F_4(x_4) dx_4 \int_0^{b_3-x_4-b_5} f_3(x_3) dx_3 \int_0^{b_2-x_3-x_4-b_5} f_2(x_2) dx_2 \\
&\quad \int_0^{b_1-x_2-x_3-x_4-b_5} f_1(x_1)[1 - F_0(C - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - b_5)] dx_1 \\
&+ \cdots \\
&+ \int_0^{b_{T-1}-b_T} F_{T-1}(x_{T-1}) dx_{T-1} \int_0^{b_{T-2}-x_{T-1}-b_T} f_{T-2}(x_{T-2}) dx_{T-2} \\
&\quad \int_0^{b_{T-3}-x_{T-2}-x_{T-1}-b_T} f_{T-3}(x_{T-3}) dx_{T-3} \cdots \\
&\quad \int_0^{b_1-x_2-x_3-\cdots-x_{T-1}-b_T} f_1(x_1)[1 - F_0(C - x_1 - x_2 - \cdots - x_{T-1} - b_T)] dx_1 \\
&+ \int_0^{b_T} F_T(x_T) dx_T \int_0^{b_{T-1}-x_T} f_{T-1}(x_{T-1}) dx_{T-1} \\
&\quad \int_0^{b_{T-2}-x_{T-1}-x_T} f_{T-2}(x_{T-2}) dx_{T-2} \int_0^{b_{T-3}-x_{T-2}-x_{T-1}-x_T} f_{T-3}(x_{T-3}) dx_{T-3} \cdots \\
&\quad \int_0^{b_1-x_2-x_3-\cdots-x_{T-1}-x_T} f_1(x_1)[1 - F_0(C - x_1 - x_2 - \cdots - x_{T-1} - x_T)] dx_1.
\end{aligned}
$$

従って，T 期間の予約数とスタンバイ客に販売される期待座席数は

$$
S(b_1^*, b_2^*, \ldots, b_{T-1}^*, b_T^*) = \sum_{t=1}^{T} E[S_t(b_t^*, \ldots, b_{T-1}^*, b_T^*)] + E[S_0(b_1^*, b_2^*, \ldots, b_{T-1}^*, b_T^*)]
$$

である．

これに対して，T 期間の予約とスタンバイ客への販売による期待収益は

$$
R(b_1, b_2, \ldots, b_{T-1}, b_T) = \sum_{t=1}^{T} r_t \, E[S_t(b_t, \ldots, b_{T-1}, b_T)] + r_0 \, E[S_0(b_1, b_2, \ldots, b_{T-1}, b_T)]
$$

である．これを最大にする $\{b_1, b_2, \ldots, b_{T-1}, b_T\}$ の値 $\{b_1^*, b_2^*, \ldots, b_{T-1}^*, b_T^*\}$ は，T 変数の関数 $R(b_1, b_2, \ldots, b_{T-1}, b_T)$ の 1 階偏微分係数を 0 とおく必要条件

$$
\left. \frac{\partial R(b_1, b_2, \ldots, b_{T-1}, b_T)]}{\partial b_t} \right|_{b_1=b_1^*, b_2=b_2^*, \ldots, b_{T-1}=b_{T-1}^*, b_T=b_T^*} = 0 \qquad 1 \le t \le T \tag{4}
$$

から求められる．式 (4) から導かれる方程式を $r_1 < r_0$ と $r_0 \le r_1$ の場合に分けて示す．

(i) スタンバイ客の料金が 1 期の客の料金より高い $(r_1 < r_0)$ 場合は，

$$y_t^* := C - b_{t+1}^* \qquad 0 \le t \le T-1$$

とすれば，1 期の客にもブッキングリミット $b_1 < C$ を設け，式 (4) から得られる方程式

$$\begin{aligned}
r_{t+1} = {} & r_t\,[1 - F_t(b_t^* - b_{t+1}^*)] + r_{t-1} \int_0^{b_t^* - b_{t+1}^*} f_t(x_t)[1 - F_{t-1}(b_{t-1}^* - x_t - b_{t+1}^*)]dx_t \\
& + r_{t-2} \int_0^{b_t^* - b_{t+1}^*} f_t(x_t)dx_t \int_0^{b_{t-1}^* - x_t - b_{t+1}^*} f_{t-1}(x_{t-1})[1 - F_{t-2}(b_{t-2}^* - x_{t-1} - x_t - b_{t+1}^*)]dx_{t-1} \\
& \quad + r_{t-3} \int_0^{b_t^* - b_{t+1}^*} f_t(x_t)dx_t \int_0^{b_{t-1}^* - x_t - b_{t+1}^*} f_{t-1}(x_{t-1})dx_{t-1} \\
& \quad \int_0^{b_{t-2}^* - x_{t-1} - x_t - b_{t+1}^*} f_{t-2}(x_{t-2})[1 - F_{t-3}(b_{t-3}^* - x_{t-2} - x_{t-1} - x_t - b_{t+1}^*)]dx_{t-2} \\
& \quad + \cdots \\
& \quad + r_1 \int_0^{b_t^* - b_{t+1}^*} f_t(x_t)dx_t \int_0^{b_{t-1}^* - x_t - b_{t+1}^*} f_{t-1}(x_{t-1})dx_{t-1} \\
& \quad \int_0^{b_{t-2}^* - x_{t-1} - x_t - b_{t+1}^*} f_{t-2}(x_{t-2})dx_{t-2} \int_0^{b_{t-3}^* - x_{t-2} - x_{t-1} - x_t - b_{t+1}^*} f_{t-3}(x_{t-3})dx_{t-3} \cdots \\
& \quad \int_0^{b_2^* - x_3 - x_4 - \cdots - x_t - b_{t+1}^*} f_2(x_2)[1 - F_1(b_1^* - x_2 - x_3 - x_4 - \cdots - x_t - b_{t+1}^*)]dx_2 \\
& \quad + r_0 \int_0^{b_t^* - b_{t+1}^*} f_t(x_t)dx_t \int_0^{b_{t-1}^* - x_t - b_{t+1}^*} f_{t-1}(x_{t-1})dx_{t-1} \\
& \quad \int_0^{b_{t-2}^* - x_{t-1} - x_t - b_{t+1}^*} f_{t-2}(x_{t-2})dx_{t-2} \int_0^{b_{t-3}^* - x_{t-2} - x_{t-1} - x_t - b_{t+1}^*} f_{t-3}(x_{t-3})dx_{t-3} \cdots \\
& \quad \int_0^{b_1^* - x_2 - x_3 - \cdots - x_t - b_{t+1}^*} f_1(x_1)[1 - F_0(C - x_1 - x_2 - x_3 - \cdots - x_t - b_{t+1}^*)]dx_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= {} & r_0\, P\{D_0 > y_0^*, D_0 + D_1 > y_1^*, D_0 + D_1 + D_2 > y_2^*, \ldots, D_0 + D_1 + D_2 + \cdots + D_t > y_t^*\} \\
& 0 \le t \le T-1 \qquad (5)
\end{aligned}$$

を $t = 0$ から逐次的に解いて，$\{b_1^*, b_2^*, \ldots, b_T^*\}$ を求める．このとき，最大期待収益は

$$R(b_1^*, b_2^*, \ldots, b_{T-1}^*, b_T^*) = \sum_{t=1}^{T} r_t\ E[S_t(b_t^*, \ldots, b_{T-1}^*, b_T^*)] + r_0\ E[S_0(b_1^*, b_2^*, \ldots, b_{T-1}^*, b_T^*)]$$

となる．式 (5) は，料金が単調増加する $T+1$ 期間（T 期間とスタンバイ客に相当）モデルに対する Brumelle-McGill の定理 [1] になっている．

(ii) スタンバイ客の料金が 1 期の客の料金以下である $(r_0 \le r_1)$ 場合は，1 期においてスタンバイ客のために座席を留保する理由はないので，$b_1 = C$ とすればよい．よって，式 (5) にお

いて $b_1^* = C$ $(y_0^* = 0)$ として得られる方程式

$$
\begin{aligned}
&r_{t+1} = r_t\,[1 - F_t(b_t^* - b_{t+1}^*)] + r_{t-1}\int_0^{b_t^*-b_{t+1}^*} f_t(x_t)[1-F_{t-1}(b_{t-1}^*-x_t-b_{t+1}^*)]dx_t \\
&+ r_{t-2}\int_0^{b_t^*-b_{t+1}^*} f_t(x_t)dx_t \int_0^{b_{t-1}^*-x_t-b_{t+1}^*} f_{t-1}(x_{t-1})[1-F_{t-2}(b_{t-2}^*-x_{t-1}-x_t-b_{t+1}^*)]dx_{t-1} \\
&\quad + r_{t-3}\int_0^{b_t^*-b_{t+1}^*} f_t(x_t)dx_t \int_0^{b_{t-1}^*-x_t-b_{t+1}^*} f_{t-1}(x_{t-1})dx_{t-1} \\
&\quad \int_0^{b_{t-2}^*-x_{t-1}-x_t-b_{t+1}^*} f_{t-2}(x_{t-2})[1-F_{t-3}(b_{t-3}^*-x_{t-2}-x_{t-1}-x_t-b_{t+1}^*)]dx_{t-2} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + r_1\int_0^{b_t^*-b_{t+1}^*} f_t(x_t)dx_t \int_0^{b_{t-1}^*-x_t-b_{t+1}^*} f_{t-1}(x_{t-1})dx_{t-1} \\
&\quad \int_0^{b_{t-2}^*-x_{t-1}-x_t-b_{t+1}^*} f_{t-2}(x_{t-2})dx_{t-2} \int_0^{b_{t-3}^*-x_{t-2}-x_{t-1}-x_t-b_{t+1}^*} f_{t-3}(x_{t-3})dx_{t-3}\cdots \\
&\quad \int_0^{b_2^*-x_3-x_4-\cdots-x_t-b_{t+1}^*} f_2(x_2)[1-F_1(C-x_2-x_3-x_4-\cdots-x_t-b_{t+1}^*)]dx_2 \\
&\quad + r_0\int_0^{b_t^*-b_{t+1}^*} f_t(x_t)dx_t \int_0^{b_{t-1}^*-x_t-b_{t+1}^*} f_{t-1}(x_{t-1})dx_{t-1} \\
&\quad \int_0^{b_{t-2}^*-x_{t-1}-x_t-b_{t+1}^*} f_{t-2}(x_{t-2})dx_{t-2} \int_0^{b_{t-3}^*-x_{t-2}-x_{t-1}-x_t-b_{t+1}^*} f_{t-3}(x_{t-3})dx_{t-3}\cdots \\
&\quad \int_0^{C-x_2-x_3-\cdots-x_t-b_{t+1}^*} f_1(x_1)[1-F_0(C-x_1-x_2-x_3-\cdots-x_t-b_{t+1}^*)]dx_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \;& (r_1 - r_0)P\{D_1 > y_1^*, D_1 + D_2 > y_2^*, \ldots, D_1 + D_2 + \cdots + D_t > y_t^*\} \\
&+ r_0\,P\{D_0 + D_1 > y_1^*, D_0 + D_1 + D_2 > y_2^*, \ldots, D_0 + D_1 + D_2 + \cdots + D_t > y_t^*\} \\
&\qquad 1 \le t \le T-1 \qquad (6)
\end{aligned}
$$

を $t = 1$ から逐次的に解いて，$\{b_2^*, b_3^*, \ldots, b_T^*\}$ を求める．このとき，最大期待収益は

$$
\begin{aligned}
R(C, b_2^*, \ldots, b_{T-1}^*, b_T^*) \;&=\; \sum_{t=2}^{T} r_t\,E[S_t(b_t^*, \ldots, b_{T-1}^*, b_T^*)] \\
&+\; r_1\,E[S_1(C, b_2^*, \ldots, b_{T-1}^*, b_T^*)] + r_0\,E[S_0(C, b_2^*, \ldots, b_{T-1}^*, b_T^*)]
\end{aligned}
$$

となる．特に，無限に多くのスタンバイ客が殺到する（$D_0 \to \infty$）ときには，式 (6) は

$$
r_{t+1} - r_0 = (r_1 - r_0)P\{D_1 > y_1^*, D_1 + D_2 > y_2^*, \ldots, D_1 + D_2 + \cdots + D_t > y_t^*\} \qquad 1 \le t \le T-1 \qquad (7)
$$

となる．この式は，各期の料金からスタンバイ客の料金を一律に差し引いて，スタンバイ客がなく料金が単調増加する T 期間モデルに対して Brumelle-McGill の定理 [1] を適用した形になっている．

式 (6) 及び (7) は，スタンバイ客の料金が 1 期の客の料金以下である場合について，著者が導いた結果 [4, 5] である．

4　数値例

本稿の数値例では，t 期における需要 D_t に対する分布関数 $F_t(x)$ 及び密度関数 $f_t(x)$ として，$F_t(0)=0$ 及び $F_t(\infty)=1$ となるように正規分布を変形した次の関数を用いる．

$$
\begin{aligned}
F_t(x) &:= \left[\Phi\left(\frac{x-\mu_t}{\sigma_t}\right)-\Phi\left(\frac{-\mu_t}{\sigma_t}\right)\right]\Big/\left[1-\Phi\left(\frac{-\mu_t}{\sigma_t}\right)\right], \\
f_t(x) &:= \frac{1}{\sigma_t}\phi\left(\frac{x-\mu_t}{\sigma_t}\right)\Big/\left[1-\Phi\left(\frac{-\mu_t}{\sigma_t}\right)\right] \qquad x \geq 0.
\end{aligned}
$$

ここで，標準正規分布の密度関数と分布関数を

$$
\phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad ; \quad \Phi(x) := \int_{-\infty}^{x}\phi(y)dy = \frac{1}{2}\left[1+\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]
$$

とする．このときの D_t の分布の平均及び標準偏差は μ_t 及び σ_t からずれるが，そのずれは $\sigma_t/\mu_t \ll 1$ なら無視できる．

4 期間に亘る料金と需要の数値例を Robinson [3] から借用して表 1 に示す．総座席数を $C=107$ とし，算出された最適ブッキングリミットと最大化された期待収益の値，及びそのときに販売される期待座席数を，2 期間と 4 期間のモデルについてそれぞれ表 2 と表 3 に示す（微小な差異が分かるように，必要以上の桁数を示している）．これらの結果から次のことが観察される．

- T 期間モデルにおける 1〜t $(< T)$ 期間の部分的最適ブッキングリミットは，t 期間モデルにおける全最適ブッキングリミットと同じである（Bellman の最適性原理による）．
- 少しでもスタンバイ客が予想されるなら，スタンバイ客に高い料金を課して，期間全体に亘って最適な座席数を留保することにより，期待収益が増える．

参考文献

[1] Brumelle SL and McGill JI, Airline seat allocation with multiple nested fare classes, *Operations Research*, 41(1), pp.127–137, 1993.

[2] Littlewood K, Forecasting and control of passenger bookings, *Proceedings of the 12th Annual AGIFORS Symposium*, pp.95–117, Nathanya, Israel, 1972. Reprinted in: *Journal of Revenue and Pricing Management*, 4(2), pp.111–123, 2005.

[3] Robinson LW, Optimal and approximate control policies for airline booking with sequential nonmonotonic fare classes, *Operations Research*, 43(2), pp.252–263, 1995.

[4] 高木英明，レベニューマネジメントにおける Littlewood のモデルの拡張へのコメント，京都大学数理解析研究所講究録 2078, 論文 33, pp.215–221, 2018 年 7 月．RIMS 共同研究（公開型）不確定性の下での意思決定理論とその応用：計画数学の展開，京都大学数理解析研究所（京都市），2017 年 11 月 15〜17 日．

[5] Takagi H, Explicit calculation of optimal booking limits for the static revenue management with standby customers, *Proceedings of the Joint International Conference of Service Science and Innovation (ICSSI2018) and Serviceology (ICServe2018)*, Taichung, Taiwan, November 13–15, 2018.

[6] Talluri KT and van Ryzin GJ, *The Theory and Practice of Revenue Management*, Springer Science + Business Media, 2004.

表 1: 数値計算例に用いた各期の料金と需要の分布.

t 期	r_t	μ_t	平均	σ_t	標準偏差	σ_t/μ_t
0	変数	10.0	10.0000	2.0	2.0000	0.2000
1	105	20.3	20.5135	8.6	8.3414	0.4236
2	83	33.4	33.9289	15.1	14.4936	0.4521
3	57	19.3	19.7139	9.2	8.7453	0.4767
4	39	29.7	30.1047	13.1	12.6264	0.4411

表 2: スタンバイ客のある 2 期間モデルにおける最適ブッキングリミット，最大期待収益，及び販売される期待座席数（総需要の期待値は 64.442 席）.

r_0	b_1^*	b_2^*	$R(b_1^*, b_2^*)$	$S(b_1^*, b_2^*)$
150	98.04880	82.53349	6465.337	64.40167
120	99.30070	83.08922	6165.701	64.40301
106	101.69624	83.55498	6025.950	64.40352
105	107 $(=C)$	83.61577	6015.975	64.40354
90	107	85.47684	5866.468	64.40366
83	107	86.34620	5796.699	64.40369
50	107	89.94355	5467.795	64.40374
30	107	91.58374	5268.461	64.40375
0	107	93.43602	4969.460	64.40375

表 3: スタンバイ客のある 4 期間モデルにおける最適ブッキングリミット，最大期待収益，及び販売される期待座席数（総需要の期待値は 114.261 席）.

r_0	b_1^*	b_2^*	b_3^*	b_4^*	$R(b_1^*, b_2^*, b_3^*, b_4^*)$	$S(b_1^*, b_2^*, b_3^*, b_4^*)$
150	98.04880	82.53349	46.72013	18.50316	7864.765	96.616
120	99.30070	83.08922	47.23458	19.00966	7461.471	96.880
106	101.69624	83.55498	47.63984	19.40404	7386.439	96.940
105	107 $(=C)$	83.61577	47.68707	19.44909	7301.531	96.243
90	107	85.47684	48.90773	20.57752	7188.743	96.818
83	107	86.34620	49.52548	21.15184	7137.590	97.084
50	107	89.94355	52.73081	24.21901	6908.775	98.264
30	107	91.58374	54.77039	26.29302	6779.276	98.870
0	107	93.43602	57.73468	29.54009	6596.398	99.558