数理解析研究所講究録 第2126巻 2019年 181-190

Semi-Sibonacci Programming

— from Sibonacci to Silver —

岩本誠一（九州大学·名誉教授）
Seiichi Iwamoto
Professor emeritus, Kyushu University

木村寛（秋田県立大学 システム科学技術学部）
Yutaka Kimura
Department of Management Science and Engineering
Faculty of Systems Science and Technology
Akita Prefectural University

概 要

本報告では、セミシボナッチ制約下で２次計画の最小化問題と最大化問題の対を２つ考え、それぞれの対が互いに双対であることを示す。さらに、一方の対では Sibonacci identical duality が成り立ち、他では reversed-Silver identical duality が成り立つことを示す。特に一方の対では、主問題と双対問題の最適点がともにシボナッチ数列を成している。双対性および最適解は相加相乗平均不等式を用いて導く。本報告では 8 変数を対象に述べるが、一般の $2n$ 変数問題についても成り立つ。

1　２つの数列

一般に、2 つの数列 **フィボナッチ** (Fibonacci) $\{F_n\}$ および **シボナッチ** (Sibonacci) $\{S_n\}$ は、共通の初期条件

$$x_1 = 1, \ x_0 = 0 \tag{1}$$

の下での 2 階線形差分方程式（3 項間漸化式）

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n \ = \ 0 \tag{2}$$

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} - x_n \ = \ 0 \tag{3}$$

の解としてそれぞれ定義される（表 1）。シボナッチ は**第２フィボナッチ** (the second Fibonacci) ともよばれる。

表 1　フィボナッチ数列 $\{F_n\}$, シボナッチ数列 $\{S_n\}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\cdots$
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	$\cdots$
S_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741	13860	$\cdots$

第 n フィボナッチ数は

$$F_n = \frac{\phi^n - \overline{\phi}^n}{\phi - \overline{\phi}} \quad \left(\overline{\phi} := 1 - \phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.6182\cdots\right)$$

になる。ここに $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180\cdots$ は**黄金数** (Golden number) である。黄金数 ϕ と**共役** (conjugate) $\overline{\phi}$ は 2 次方程式

$$x^2 - x - 1 = 0$$

の解である。フィボナッチ数の相隣る比は黄金数に近づく：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi.$$

シボナッチとはフィボナッチに次ぐという意味で、**白銀数** (Silver number) $\tau = 1+\sqrt{2} = 2.4142\cdots$ に由来する。第 n シボナッチ数は

$$S_n = \frac{\tau^n - \overline{\tau}^n}{\tau - \overline{\tau}} \quad \left(\overline{\tau} := 2 - \tau = 1 - \sqrt{2} = -0.4142\cdots\right)$$

である。白銀数 τ と**共役** $\overline{\tau}$ は 2 次方程式

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

の解である。シボナッチ数列は 2 倍速より少し速く無限大に増える。3 倍速まで行かないが、比は白銀数に近づく：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = \tau.$$

2　セミシボナッチ計画

まず、8 変数の条件付き最小化問題

$$(\mathrm{P}_1) \qquad \begin{array}{lll} \text{minimize} & y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 + y_7^2 + y_8^2 & \\ \text{subject to} & \text{(i)} \ \ y_1 + 2y_2 = y_3 & \\ & \text{(ii)} \ \ y_3 + 2y_4 = y_5 & \\ & \text{(iii)} \ \ y_5 + 2y_6 = y_7 & \\ & \text{(iv)} \ \ y_7 + 2y_8 = c & \\ & \text{(v)} \ \ y \in R^8 & \end{array}$$

を考える。ただし $c \in R^1$. ここで (P_1) は 4 線形制約下の 8 平方和最小化問題であり、制約はシボナッチ数列の定義式の跳び跳びになっている。この制約を**セミシボナッチ** (semi-Sibonacci) という。セミシボナッチ制約下の数理計画を**セミシボナッチ計画** (semi-Sibonacci programming) という。ここでは2次関数を目的式にしているので、このセミシボナッチ計画は2次計画である。(P_1) は

$$y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_8) = \frac{c}{S_9}(S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_8)$$
$$= \frac{c}{985}(1,\ 2,\ \ldots,\ 408)$$

のとき、最小値 $m = \frac{1}{2}\frac{S_8}{S_9}c^2 = \frac{1}{2}\frac{408}{985}c^2 = \frac{204}{985}c^2$ をもつ。

他方、8変数の条件付き最大化問題

$$(\mathrm{D}_1)\quad \begin{array}{lrl} \text{Maximize} & \multicolumn{2}{l}{-(\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2+\mu_4^2+\mu_5^2+\mu_6^2+\mu_7^2+\mu_8^2)+c\mu_8} \\ \text{subject to} & (\mathrm{i})' & 2\mu_1 = \mu_2 \\ & (\mathrm{ii})' & \mu_2+2\mu_3 = \mu_4 \\ & (\mathrm{iii})' & \mu_4+2\mu_5 = \mu_6 \\ & (\mathrm{iv})' & \mu_6+2\mu_7 = \mu_8 \\ & (\mathrm{v})' & \mu \in R^8 \end{array}$$

を考える。これもセミシボナッチ計画であり、

$$\mu = (\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_8) = \frac{c}{S_9}(S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_8)$$
$$= \frac{c}{985}(1,\ 2,\ \ldots,\ 408)$$

のとき、最大値 $M = \frac{1}{2}\frac{S_8}{S_9}c^2 = \frac{1}{2}\frac{408}{985}c^2 = \frac{204}{985}c^2$ をもつ。

(P_1) と (D_1) の間には以下の **Sibonacci identical duality** (SID) が成り立つ：

1. (duality)　(P_1) と (D_1) は互いに双対である。
2. (identical)　(P_1) と (D_1) のそれぞれの最適点と最適値は共に一致する。
3. (Sibonacci)　(P_1) は

$$y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_8) = \frac{c}{S_9}(S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_8) \tag{4}$$

のとき、最小値 $m = \frac{S_8}{2S_9}c^2$ をもつ。(D_1) も

$$\mu = (\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_8) = \frac{c}{S_9}(S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_8) \tag{5}$$

のとき、最大値 $M = \frac{S_8}{2S_9}c^2$ をもつ。

ここに $S_1, S_2, \ldots, S_9$ はシボナッチ数列の第 1 項から第 9 項である（表 1)。両問題の最適解（点と値）は共にシボナッチ数列で表されている。特に、$c = S_9$ のときは、最小点と最大点は共に

$$(S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_8)$$

になり、最小値と最大値は $m = M = \dfrac{1}{2}S_8S_9$ になる。

次に、8 変数の条件付き最小化問題

$$(\mathrm{P}_2)\qquad \begin{array}{lrl} \text{minimize} & \multicolumn{2}{l}{\dfrac{1}{2}\tau y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \cdots + y_8^2} \\ \text{subject to} & \text{(i)} & y_1 + 2y_2 = y_3 \\ & \text{(ii)} & y_3 + 2y_4 = y_5 \\ & \text{(iii)} & y_5 + 2y_6 = y_7 \\ & \text{(iv)} & y_7 + 2y_8 = c \\ & \text{(v)} & y \in R^8 \end{array}$$

と、8 変数の条件付き最大化問題

$$(\mathrm{D}_2)\qquad \begin{array}{lrl} \text{Maximize} & \multicolumn{2}{l}{-\,(\dfrac{1}{2}\tau\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \cdots + \mu_8^2) + c\mu_8} \\ \text{subject to} & \text{(i)}' & \tau\mu_1 = \mu_2 \\ & \text{(ii)}' & \mu_2 + 2\mu_3 = \mu_4 \\ & \text{(iii)}' & \mu_4 + 2\mu_5 = \mu_6 \\ & \text{(iv)}' & \mu_6 + 2\mu_7 = \mu_8 \\ & \text{(v)}' & \mu \in R^8 \end{array}$$

を考える。(P_2) と (D_2) も共にセミシボナッチ計画であり、(P_2) は

$$y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_8) = c\,(\tau^{-8},\ \tau^{-7},\ \ldots,\ \tau^{-1})$$

のとき、最小値 $m = \dfrac{1}{2}\tau^{-1}c^2$ をもつ。(D_2) は

$$\mu = (\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_8) = c\,(\tau^{-8},\ \tau^{-7},\ \ldots,\ \tau^{-1})$$

のとき、最大値 $M = \dfrac{1}{2}\tau^{-1}c^2$ をもつ。

(P_2) と (D_2) はそれぞれ最小値 $m = \dfrac{1}{2}\tau^{-1}c^2$ と最大値 $M = \dfrac{1}{2}\tau^{-1}c^2$ をもつ。すなわち最適値は一致している。また両問題は白銀数 τ で特徴づけられる同一最適点 (*identical optimal point*) をもつ。よって、次の **reversed-Silver identical duality** (r-SID) が成り立つ：

1. (duality)　(P_2) と (D_2) は互いに双対である。
2. (identical)　(P_2) と (D_2) の最適点と最適値は共に一致する。

3. (reversed-Silver)　(P_2) は

$$y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_8) = c\,(\tau^{-8},\ \tau^{-7},\ \ldots,\ \tau^{-1}) \tag{6}$$

のとき、最小値 $m = \dfrac{1}{2}\tau^{-1}c^2$ をもつ。(D_2) も

$$\mu = (\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_8) = c\,(\tau^{-8},\ \tau^{-7},\ \ldots,\ \tau^{-1}) \tag{7}$$

のとき、最大値 $M = \dfrac{1}{2}\tau^{-1}c^2$ をもつ。両問題の最適点は共に白銀数で表されている。

尚、最適点が共に $c\,(\tau^{-1},\ \tau^{-2},\ \ldots,\ \tau^{-8})$ のとき、Silver identical duality (SID) という。

3　不等式アプローチ

定理 1 任意の $x, y \in R^1$ に対して

$$2xy \le x^2 + y^2 \tag{8}$$

が成り立つ。等号は $x = y$ のときに限り成り立つ。

不等式 (8) は**相加相乗平均不等式**（arithmetic-geometric mean inequality, AG）ともよばれる。

補題 1 (Equality)　$y = (y_1, y_2, \ldots, y_8)$ と $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_8)$ が条件 (i) ∼ (iv) と (i)′ ∼ (iv)′

$$\begin{array}{llll}
\text{(i)} & y_1 + 2y_2 = y_3 & \text{(i)}' & 2\mu_1 = \mu_2 \\
\text{(ii)} & y_3 + 2y_4 = y_5 & \text{(ii)}' & \mu_2 + 2\mu_3 = \mu_4 \\
\text{(iii)} & y_5 + 2y_6 = y_7 & \text{(iii)}' & \mu_4 + 2\mu_5 = \mu_6 \\
\text{(iv)} & y_7 + 2y_8 = c & \text{(iv)}' & \mu_6 + 2\mu_7 = \mu_8
\end{array}$$

を満たすとき、次の関係式が成り立つ：

$$2\sum_{k=1}^{8} y_k\mu_k = c\mu_8. \tag{9}$$

Proof.　条件 (i)∼(iv) と (i)′∼(iv)′ をそれぞれ満たす任意の y と μ に対して

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{8} y_k\mu_k &= y_1\mu_2 + (y_3 - y_1)\mu_2 + y_3(\mu_4 - \mu_2) + (y_5 - y_3)\mu_4 \\
&\quad + y_5(\mu_6 - \mu_4) + (y_7 - y_5)\mu_6 + y_7(\mu_8 - \mu_6) + (c - y_7)\mu_8 \\
&= c\mu_8.
\end{aligned}$$

□

(P_1) と (D_1) が互いに双対であることを、不等式 (8) に基づいて示す。

まず $y = (y_1, \ldots, y_8) \in R^8$ を (P_1) の実行可能解、$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_8) \in R^8$ を (D_1) の実行可能解とする。すなわち、y と μ は次を満たしている。

$$\begin{array}{rrcl@{\qquad}rrcl}
\text{(i)} & y_1 + 2y_2 &=& y_3 & \text{(i)}' & 2\mu_1 &=& \mu_2 \\
\text{(ii)} & y_3 + 2y_4 &=& y_5 & \text{(ii)}' & \mu_2 + 2\mu_3 &=& \mu_4 \\
\text{(iii)} & y_5 + 2y_6 &=& y_7 & \text{(iii)}' & \mu_4 + 2\mu_5 &=& \mu_6 \\
\text{(iv)} & y_7 + 2y_8 &=& c & \text{(iv)}' & \mu_6 + 2\mu_7 &=& \mu_8.
\end{array}$$

ここで、AG 不等式 (8) を $y_k,\ \mu_k\ (k = 1, 2, \ldots, 8)$ として用いて、辺々加えると

$$2\sum_{k=1}^{8} y_k\mu_k \ \le\ \sum_{k=1}^{8} y_k^2 + \sum_{k=1}^{8} \mu_k^2\ ; \quad y_k = \mu_k \quad 1 \le k \le 8 \tag{10}$$

が得られる。補題 1 より不等式 (10) は

$$c\mu_8 \ \le\ \sum_{k=1}^{8} y_k^2 + \sum_{k=1}^{8} \mu_k^2$$

になる。等号は

$$\text{(e)} \quad y_k = \mu_k \quad 1 \le k \le 8$$

のときのみ成立する。すなわち、(i)〜(iv) を満たす y と (i)′〜(iv)′ を満たす μ に対して、不等式

$$-\sum_{k=1}^{8} \mu_k^2 + c\mu_8 \ \le\ \sum_{k=1}^{8} y_k^2 \tag{11}$$

が成り立つ。等号は条件 (i)〜(iv), (e), (i)′〜(iv)′ が成り立つときに限り成立する：

$$\begin{array}{rrcl@{\qquad}rrcl}
\text{(i)} & y_1 + 2y_2 &=& y_3 & \text{(i)}' & 2\mu_1 &=& \mu_2 \\
\text{(ii)} & y_3 + 2y_4 &=& y_5 & \text{(ii)}' & \mu_2 + 2\mu_3 &=& \mu_4 \\
\text{(iii)} & y_5 + 2y_6 &=& y_7 & \text{(iii)}' & \mu_4 + 2\mu_5 &=& \mu_6 \\
\text{(iv)} & y_7 + 2y_8 &=& c & \text{(iv)}' & \mu_6 + 2\mu_7 &=& \mu_8
\end{array}$$
$$\text{(e)} \quad y_k = \mu_k \qquad 1 \le k \le 8.$$

ここに、(11) の左辺は $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_8)$ のみの関数である。したがって、(D_1) と (P_1) は互いに双対である。

因みに、左辺は (P_1) の目的 (主) 関数 (primal function) に対する**双対関数** (dual function) を表わしている。

補題 2 (Sibonacci solution)　8元8連立線形方程式

$$
\begin{array}{llll}
\text{(i)}'' & 2y_1 = y_2 & \text{(i)} & y_1 + 2y_2 = y_3 \\
\text{(ii)}'' & y_2 + 2y_3 = y_4 & \text{(ii)} & y_3 + 2y_4 = y_5 \\
\text{(iii)}'' & y_4 + 2y_5 = y_6 & \text{(iii)} & y_5 + 2y_6 = y_7 \\
\text{(iv)}'' & y_6 + 2y_7 = y_8 & \text{(iv)} & y_7 + 2y_8 = c
\end{array}
$$

は、唯一の解をもつ：

$$
y_1 = \frac{S_1}{S_9}c,\ y_2 = \frac{S_2}{S_9}c,\ y_3 = \frac{S_3}{S_9}c,\ y_4 = \frac{S_4}{S_9}c,
$$
$$
y_5 = \frac{S_5}{S_9}c,\ y_6 = \frac{S_6}{S_9}c,\ y_7 = \frac{S_7}{S_9}c,\ y_8 = \frac{S_8}{S_9}c.
$$

Proof.　この1次方程式系は

$$
Ay = b
$$

で表される。ただし、

$$
A = \begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{pmatrix}, \quad
y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{pmatrix}, \quad
b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}.
$$

ここで、行列 A は以下の逆行列を持つ：

$$
A^{-1} = \frac{1}{985}\begin{pmatrix}
408 & 169 & 70 & 29 & 12 & 5 & 2 & 1 \\
-169 & 338 & 140 & 58 & 24 & 10 & 4 & 2 \\
70 & -140 & 350 & 145 & 60 & 25 & 10 & 5 \\
-29 & 58 & -145 & 348 & 144 & 60 & 24 & 12 \\
12 & -24 & 60 & -144 & 348 & 145 & 58 & 29 \\
-5 & 10 & -25 & 60 & -145 & 350 & 140 & 70 \\
2 & -4 & 10 & -24 & 58 & -140 & 338 & 169 \\
-1 & 2 & -5 & 12 & -29 & 70 & -169 & 408
\end{pmatrix}.
$$

よって、系は唯一の解

$$\begin{aligned} y = A^{-1}b &= \frac{c}{985}\begin{pmatrix} 1, & 2, & 5, & 12, & 29, & 70, & 169, & 408 \end{pmatrix} \\ &= \frac{c}{S_9}\begin{pmatrix} S_1, & S_2, & S_3, & S_4, & S_5, & S_6, & S_7, & S_8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

をもつ。 □

補題 3 (平方和)

$$\text{(Lucas)} \qquad \sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} S_k^2 = \frac{1}{2} S_n S_{n+1}.$$

補題 2, 3 より、次の定理が得られる。

定理 2 最小化問題 (P_1) は

$$y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_8) = \frac{c}{S_9}(S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_8) \tag{12}$$

のとき、最小値 $m = \dfrac{S_8}{2S_9}c^2$ をもつ。最大化問題 (D_1) も

$$\mu = (\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_8) = \frac{c}{S_9}(S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_8) \tag{13}$$

のとき、最大値 $M = \dfrac{S_8}{2S_9}c^2$ をもつ。 □

最小化問題 (P_2) と最大化問題 (D_2) に対しても同様にすると、以下の補題 4, 補題 5 が成り立つ。

補題 4 (Equality) $(y_1, \ldots, y_8)$ と $(\mu_1, \ldots, \mu_8)$ が条件 (i)〜(iv) と (i)′〜(iv)′

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} & y_1 + 2y_2 = y_3 & \text{(i)}' & \tau\mu_1 = \mu_2 \\ \text{(ii)} & y_3 + 2y_4 = y_5 & \text{(ii)}' & \mu_2 + 2\mu_3 = \mu_4 \\ \text{(iii)} & y_5 + 2y_6 = y_7 & \text{(iii)}' & \mu_4 + 2\mu_5 = \mu_6 \\ \text{(iv)} & y_7 + 2y_8 = c & \text{(iv)}' & \mu_6 + 2\mu_7 = \mu_8 \end{array}$$

を満たすとき、次の等式が成り立つ：

$$\tau y_1 \mu_1 + 2\sum_{k=2}^{8} y_k \mu_k = c\mu_8. \tag{14}$$

補題 5 (Silver solution)　8元8連立線形方程式

$$\begin{array}{rrcl@{\qquad}rrcl}
\text{(i)}'' & \tau y_1 & = & y_2 & \text{(i)} & y_1 + 2y_2 & = & y_3 \\
\text{(ii)}'' & y_2 + 2y_3 & = & y_4 & \text{(ii)} & y_3 + 2y_4 & = & y_5 \\
\text{(iii)}'' & y_4 + 2y_5 & = & y_6 & \text{(iii)} & y_5 + 2y_6 & = & y_7 \\
\text{(iv)}'' & y_6 + 2y_7 & = & y_8 & \text{(iv)} & y_7 + 2y_8 & = & c
\end{array}$$

は、唯一の解をもつ：

$$y_1 = \tau^{-8}c,\ y_2 = \tau^{-7}c,\ y_3 = \tau^{-6}c,\ y_4 = \tau^{-5}c,$$
$$y_5 = \tau^{-4}c,\ y_6 = \tau^{-3}c,\ y_7 = \tau^{-2}c,\ y_8 = \tau^{-1}c.$$

補題 5 より次の定理が得られる。

定理 3 最小化問題 (P_2) は

$$y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_8) = c\,(\tau^{-8},\ \tau^{-7},\ \ldots,\ \tau^{-1}) \tag{15}$$

のとき、最小値 $m = \dfrac{1}{2}\tau^{-1}c^2$ をもつ。最大化問題 (D_2) も

$$\mu = (\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_8) = c\,(\tau^{-8},\ \tau^{-7},\ \ldots,\ \tau^{-1}) \tag{16}$$

のとき、最大値 $M = \dfrac{1}{2}\tau^{-1}c^2$ をもつ。

参考文献

[1] R.E. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, NY, 1970 (Second Edition is a SIAM edition 1997).

[2] D. Brown, ダ・ヴィンチ・コード (上・下) (越前敏弥訳）, 角川書店, 2004; (Original) *The Da Vinci Code*, Doubleday(USA) & Bantam(UK), 2003.

[3] 岩本誠一, 動的計画論, 九大出版会, 1987.

[4] 岩本 誠一, 最適化「ダ・ヴィンチ・コード」 — 経済数学へのプレリュード（VI）—, 経済学研究・別冊 第 13 号 (九大経済学会). 平成 19(2007) 年 4 月, pp.45–52.

[5] 岩本 誠一, ダ・ヴィンチ・コードは最適か？, 数理経済学研究センター会報, 第 37 号, 2009 年 9 月, pp.1–9.

[6] 岩本誠一, 最適経路 — フィボナッチから黄金へ —, 「不確実性下における意思決定問題」, 京大数理研講究録 1734, 2011 年 3 月, pp.196—204.

[7] 岩本 誠一, 最適化の数理 II — ベルマン方程式 —　(Mathematics for Optimization I I – Bellman Equation –), 数理経済学研究センター「数理経済学叢書 5」, 知泉書館, 2013 年 10 月, pp.449.

[8] 岩本誠一・木村寛, セミフィボナッチ計画法 — 不等式によるアプローチ — , 「確率的環境下における数理モデルの理論と応用」, 京大数理研講究録,2044, 2017 年 9 月, pp.112–119.

[9] 岩本誠一・木村寛, Nonhomogeneous Semi-Fibonacci Programming — Identical Duality — , 「不確実性の下での意思決定理論とその応用：計画数学の展開」, 京大数理研講究録,2078, 2018 年 7 月, pp.114–120.

[10] 岩本 誠一・吉良 知文・植野 貴之, ダ・ヴィンチ・コード, 経済学研究 (九大経済学会), 第 76 巻 (2009 年 10 月) 23 号, pp.1–22.