数理解析研究所講究録 第2126巻 2019年 191-199

多目的計画問題の過小評価アプローチ

(New sufficiency for global optimality and duality of multi-objective programming problems via underestimators)

秋田県立大学　システム科学技術学部　経営システム工学科
Faculty of Systems Science and Technology, Akita Prefectural University
荒谷　洋輔 (Araya, Yousuke) *　　鈴木　楓 (Suzuki, Kaede)
斎藤　裕 (Saito, Yutaka) †　木村　寛 (Kimura, Yutaka) ‡

1　はじめに

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ と $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ をベクトル値関数とする。多目的最適化問題 (MOP) は、以下で定式化される。([3, 9] を参照)

$$\text{(MOP)}\begin{cases}\text{Minimize} \quad f(x) \\ \text{subject to} \quad g(x) \leq_{\mathbb{R}^l_+} 0 \quad (g(x) \in -\mathbb{R}^l_+)\end{cases}$$

尚、$\mathbb{R}^l_+ := \{x \in \mathbb{R}^l \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_l \geq 0\}$ は正象限とする。

Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件とは、ある制約想定の元で数理最適化問題の実行可能解で局所最適解となる必要条件を与えるものである。KKT 条件は、大域的最適解を確認するための規準を明らかにするためによく使われる。しかし、KKT の十分条件には、数理最適化問題の Lagrangian にある種の凸性 (pseudo-convex・invex 性など) が必要となる。

Jeyakumar-Srisatkunarajah[4] は、**過小評価関数**という概念を導入することにより、数理最適化問題の大域的最適解の新しい KKT の十分条件を与えた。過小評価関数とは、それぞれの停留点が大域的最小解という性質をもつというもので、そのアイディアの源は Lagrangian の関数の双共役関数が凸過小評価関数になっているいう事実に由来している。Jeyakumar-Srisatkunarajah[4] は、過小評価関数を用いて弱・強双対定理も発表した。

私たちは本稿で上記の結果を多目的最適化問題に拡張することを目的とする。

2　準備

2.1　ベクトル最適化からの準備

2.1 と 2.2 節では Y をノルム空間、$\mathbf{0}_Y$ を Y の原点とする。集合 $A \subset Y$ に対し、A の代数的内部、位相的内部、位相的閉包をそれぞれ $\mathrm{cor}A$、$\mathrm{int}A$、$\mathrm{cl}A$ と表す。また、この論文で、$C \subset Y$ は閉凸錐を表すものとする。つまり、以下の条件を満たす。

*(*E-mail:* **y-araya@akita-pu.ac.jp**)
†(*E-mail:* **yutakasai@akita-pu.ac.jp**)
‡(*E-mail:* **yutaka@akita-pu.ac.jp**)

(a) $\mathrm{cl}C = C$、
(b) $C + C \subseteq C$、
(c) $\lambda C \subseteq C\ \forall\lambda \in [0,\infty)$。

尚、錐 $C \subset Y$ が solid とは $\mathrm{int}C \neq \emptyset$ を満たすことであり、pointed であるとは $C \cap (-C) = \{\mathbf{0}_Y\}$ が成立する場合である。凸錐 $C \subset Y$ によって以下のようなベクトル順序 $\leq_C$ が導入され、$(Y, \leq_C)$ は順序ベクトル空間となる。

$$\forall y_1, y_2 \in Y, \qquad y_1 \leq_C y_2 \overset{def}{\iff} y_2 - y_1 \in C$$

もし、C が pointed ならベクトル順序 $\leq_C$ は反対称的となる。逆に一般の（実）順序ベクトル空間に対して、その順序と一意に対応する凸錐を構成することができ、その凸錐から生成される半順序が元のベクトル順序と一致することが確かめられる。

2.2　集合最適化からの準備

$\mathcal{V}$ を Y の空でない部分集合全体とする。$V_1, V_2 \in \mathcal{V}$、$\alpha \in \mathbb{R}$、$V \in \mathcal{V}$ に対して、２つの集合の和・スカラー積は以下のように定義される。

$$V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\} \qquad \alpha V := \{\alpha v \mid v \in V\}$$

そのとき $\mathcal{V}$ は、$\{\mathbf{0}_Y\}$ を零ベクトルとするベクトル空間であることが確かめられる。

定義 2.1 (集合関係：黒岩-田中-Ha[8])**.** Y を線形位相空間、$\mathcal{V}$ を Y の空でない部分集合の族とする。$A, B \in \mathcal{V}$ と、solid($\iff$ $\mathrm{int}C \neq \emptyset$) な閉凸錐 $C \subset Y$ に対して、以下の集合関係を定義する。

$$[\textbf{weak}] \quad A \leq_C^w B \quad \text{by} \quad B - A \subset C \qquad (\textbf{type 1})$$

$$[\textbf{lower}] \quad A \leq_C^l B \quad \text{by} \quad B \subset A + C \qquad (\textbf{type 3})$$

$$[\textbf{upper}] \quad A \leq_C^u B \quad \text{by} \quad A \subset B - C \qquad (\textbf{type 5})$$

$$[\textbf{strong}] \quad A \leq_C^s B \quad \text{by} \quad 0_Y \in B - A - C \quad (\textbf{type 6})$$

$$\iff A \cap (B - C) \neq \emptyset \iff (A + C) \cap B \neq \emptyset$$

命題 2.2 ([1])**.** $A,\ B \in \mathcal{V}$ に対して、次が成り立つ。

(i) $A \leq_C^w B \implies A \leq_C^l B \implies A \leq_C^s B$、

(ii) $A \leq_C^w B \implies A \leq_C^u B \implies A \leq_C^s B$、

(iii) $A \leq_C^l B$ と $A \leq_C^u B$ は比較できない。

命題 2.3 ([1])**.** $A, B, D \in \mathcal{V}$ に対して、次が成り立つ。

(i) $A \leq_C^{l[u]} B \implies (A + D) \leq_C^{l[u]} (B + D)$、

(ii) $A \leq_C^{l[u]} B \implies \alpha A \leq_C^{l[u]} \alpha B$（$\alpha \geq 0$）、

(iii) $\leq_C^l$ と $\leq_C^u$ は、反射律と推移律が成り立つ。

注意 1. ベクトル順序と集合順序はさまざまな違いがある。ベクトル順序の場合、$x, y \in Y$ と $C \subset Y$ に対して

$$y - x \in C\ (x \leq_C y) \iff y \in x + C \iff x \in y - C$$

である。一方、集合順序の場合、$A, B \in \mathcal{V}$ と $C \subset Y$ に対して、上記の真ん中と右の順序に対応する $B \subset A + C$ $(A \leq_C^l B)$ と $A \subset B - C$ $(A \leq_C^u B)$ は一般に異なる（[1] を参照のこと）。

次の定義は、集合順序特有のものである。

定義 2.4. $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ とする。$\mathcal{V}$ に次のような同値関係を導入する。

$$V_1 \sim_l V_2 \Longleftrightarrow V_1 \leq_C^l V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \leq_C^l V_1$$

$$V_1 \sim_u V_2 \Longleftrightarrow V_1 \leq_C^u V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \leq_C^u V_1$$

$$V_1 \sim_w V_2 \Longleftrightarrow V_1 \leq_C^w V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \leq_C^w V_1$$

同値類の集合をそれぞれ $[\cdot]^l$、$[\cdot]^u$、$[\cdot]^w$ と書く。同値関係の定義より次が分かる。

$$A \in [B]^l \Leftrightarrow A + C = B + C$$

$$A \in [B]^u \Leftrightarrow A - C = B - C$$

$$A \in [B]^w \Leftrightarrow B - A \subset C \quad \text{and} \quad A - B \subset C$$

さらに、もし C が pointed ならば、$A \in [B] \Rightarrow A = B$ も分かる（[1] を参照のこと）。

定義 2.5 ([1])**.** $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ とする。$A \in \mathcal{S}$ が $l[u]$-minimal element であるとは、任意の $B \in \mathcal{S}$ について

$$B \leq_C^{l[u]} A \quad \Longrightarrow \quad A \leq_C^{l[u]} B$$

が成り立つことである。$\mathcal{S}$ の $l[u]$-minimal element の族を $l[u]$-Min$(\mathcal{S}, C)$ と書く。同様にして、$A \in \mathcal{S}$ が maximal element であるとは、任意の $B \in \mathcal{S}$ について

$$A \leq_C^{l[u]} B \quad \Longrightarrow \quad B \leq_C^{l[u]} A$$

が成り立つことである。$\mathcal{S}$ の maximal element の族を $l[u]$-Max$(\mathcal{S}, C)$ と書く。

2.3 多目的計画問題からの準備

$\mathbb{R}^n$ を n 次元 Euclid 空間とする。正象限は以下で定義される。

$$\mathbb{R}_+^m := \{x \in R^m \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_m \geq 0\}$$

$\mathbb{R}_+^m$ は pointed な閉凸錐であることが確かめられる。$m \times l$ 行列の集合を $\mathbb{R}^{m \times l}$ と書く。つまり、

$$\mathbb{R}^{m \times l} := \left\{ A \;\middle|\; A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R}, i \in \{1, ..., m\}, j \in \{1, ..., l\} \right\},$$

$$\mathbb{R}_+^{m\times l} := \left\{ A \in \mathbb{R}^{m\times l} \;\middle|\; A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix}, a_{ij} \geq 0, i \in \{1, ..., m\}, j \in \{1, ..., l\} \right\}$$

である。行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times l}$ に対して、A の転置行列を A^T と書く。2つのベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n)^T$ $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots y_n)^T$ の内積は以下で定義する。

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n)^T$ のノルムは $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$ で定義する。

$$\mathcal{N}(\bar{x}, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \bar{x}\| < \varepsilon\}$$

を $\bar{x}$ の ε-近傍とする。

定義 2.6 (大域的最小解•大域的最大解)**.** $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ が (MOP) の大域的最小解であるとは、$f(x) \leq_{\mathbb{R}_+^m \setminus \{\theta\}} f(\bar{x})$ を満たすような $x \in \mathbb{R}^n$ が存在しないときに言う。同様にして、$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ が (MOP) の大域的最大解であるとは、$f(\bar{x}) \leq_{\mathbb{R}_+^m \setminus \{\theta\}} f(x)$ を満たすような $x \in \mathbb{R}^n$ が存在しないときに言う。

定義 2.7 (局所的最小解•局所的最大解)**.** $\bar{x}$ が (MOP) の局所的最小解であるとは、ある近傍 $\mathcal{N}(\bar{x}, \varepsilon)$ に対して $f(x) \leq_{\mathbb{R}_+^m \setminus \{\theta\}} f(\bar{x})$ を満たすような $x \in \mathcal{N}(\bar{x}, \varepsilon)$ が存在しないときに言う。同様にして、$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ が (MOP) の局所的最大解であるとは、ある近傍 $\mathcal{N}(\bar{x}, \varepsilon)$ に対して $f(\bar{x}) \leq_{\mathbb{R}_+^m \setminus \{\theta\}} f(x)$ を満たすような $x \in \mathcal{N}(\bar{x}, \varepsilon)$ が存在しないときに言う。

定義 2.8 (ベクトル値関数の微分可能性)**.** ベクトル値関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が微分可能であるとは、それぞれの i $(1 \leq i \leq m)$ に対して $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が微分可能であると定義する。そのとき、$f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)^T$ の微分は次のように表される。

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x)^T \\ \vdots \\ \nabla f_m(x)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

つまり、$\nabla f_i(x)^T = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}(x), \cdots, \dfrac{\partial f_i}{\partial x_n}(x) \right)$ $(1 \leq i \leq m)$ である。

定義 2.9 ($\mathbb{R}_+^m$-凸関数)**.** ベクトル値関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が $\mathbb{R}_+^m$-凸関数であるとは、それぞれの i $(1 \leq i \leq m)$ に対して $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が凸関数であると定義する。つまり、任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ と $\lambda \in [0, 1]$ に対して

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq_{\mathbb{R}_+^m} \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

を満たすことである。

大域的最小解と $\mathbb{R}_+^m$-凸関数の定義から、次のことが容易に分かる。

命題 2.10. $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ をベクトル値関数とする。もし ϕ が $\mathbb{R}_+^m$-凸関数であるならば、ϕ の全ての停留点 (つまり、f は $\bar{x}$ において微分可能で、かつ $\nabla f(\bar{x}) = 0_Y$ であること。) は、ϕ の大域的最小解である。

3 ベクトル値関数の過小評価関数と Karush-Kuhn-Tucke 十分性

3.1 ベクトル値関数の過小評価関数

本稿を通じて、$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ と $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^l$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合上で C^1 級（微分可能関数でかつその関数が連続）であるとする。(MOP) の Lagrange 関数 $L(x,A)$ は、A を $m\times l$ 行列のとき以下で与えられる。

$$L(x,A)=f(x)+Ag(x)$$

もし $\bar{x}=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)^T$ が (MOP) の局所的最小解である制約想定 ([2, 3, 7] 参照) を満たすならば、次の Karush-Kuhn-Tucker 条件を満たす。

(KKT) $Ag(\bar{x})=0$ と $\nabla L(\bar{x},A)=0$ を満たすような $A\in\mathbb{R}_+^{m\times l}$ が存在する。

定義 3.1 (ベクトル値関数の過小評価関数)**.** ベクトル値関数 $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ がベクトル値関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ の $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ における過小評価関数であるとは、h が次の 2 つの条件を満たすときであると定義する。

(a) それぞれの $x\in\mathbb{R}^n$ について、$h(x)\leq_{\mathbb{R}_+^m} f(x)$ である。

(b) $f(\bar{x})=h(\bar{x})$ と $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ は $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ の停留点である。

Jeyakumar-Srisatkunarajah[4] によって導入された過小評価関数の概念は、数理計画問題において強力な道具である。なぜならば、擬凸関数・invex 関数などの一般化した凸関数は、「それぞれの停留点は大域的最小解である」という性質を満たすからである。私たちは、[4] の定理 2.1 の手法を参考しながら、定理 2.1 をベクトル値関数へ拡張することができた。

定理 3.2. $\bar{x}$ を (MOP) の実行可能点で、かつ $\bar{x}$ が条件 **(KKT)** を $A\in\mathbb{R}_+^{m\times l}$ で満たすとする。*Lagrange* 関数 $L(\cdot,A)$ が $\bar{x}$ において過小評価の条件を満たし、かつ $\bar{x}$ で微分可能とする。もし、全ての過小評価関数の停留点が大域的最小解ならば、$\bar{x}$ は (MOP) の大域的最小解である。

過小評価関数はある種の凸性を持つ関数の拡張であることから、次の系を得る。

系 3.3. $\bar{x}$ を (MOP) の実行可能点で、かつ $\bar{x}$ が条件 **(KKT)** を $A\in\mathbb{R}_+^{m\times l}$ で満たすとする。*Lagrange* 関数 $L(\cdot,A)$ が $\bar{x}$ において $\mathbb{R}_+^m$-凸の過小評価関数であるならば $\bar{x}$ は (MOP) の大域的最小解である。

3.2 ベクトル値の共役関数

この小節では、ベクトル値関数 f の共役関数について考える。

定義 3.4 (谷野-樵木 [10, 11, 12])**.** $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ をベクトル値関数とする。そのとき、f の共役関数 $f^*:\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathcal{V}$ を以下で定義する。

$$f^*(A):=\mathrm{Max}\left(\bigcup_{x\in\mathbb{R}^n}\{Ax-f(x)\};\mathbb{R}_+^m\right).$$

定義 3.5 (谷野-樵木 [10, 11, 12])**.** $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ をベクトル値関数、$f^*:\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathcal{V}$ を f の共役関数とする。演算 $f\to f^*$ を f^* に対して繰り返すことにより、f の双共役関数 $f^{**}:\mathbb{R}^n\to\mathcal{V}$ を以下で定義する。

$$f^{**}(x):=\mathrm{Max}\left(\bigcup_{A\in\mathbb{R}^{m\times n}}\{Ax-f^*(A)\};\mathbb{R}_+^m\right).$$

しかしながら、一般的には $f^*(A)$ は集合値写像になる。このままでは実数値関数の共役関数にある性質「$f^{**} \leq f$」を拡張するためには、どうしても集合同士の比較が必要となる。この問題の解決のため、川崎 [5, 6] は $\mathcal{V}$ に集合関係を導入した。川崎はさらに共役関係と Γ^n-regularization という概念を導入することにより、多目的最適化問題における双対定理を得た。

私たちは、f に対して新しい双共役関数を定義する。

定義 3.6. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ をベクトル値関数、$f^* : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathcal{V}$ を f の共役関数とする。$f^*(A) \neq \emptyset$ に対して、 f の双共役関数 $f_l^{**}, f_u^{**} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{V}$ を以下で定義する。

$$f_l^{**}(x) := l\text{-Max}\left(\bigcup_{A\in\mathbb{R}^{m\times n}} [Ax - f^*(A)], \mathbb{R}^m_+\right)$$
$$f_u^{**}(x) := u\text{-Max}\left(\bigcup_{A\in\mathbb{R}^{m\times n}} [Ax - f^*(A)], \mathbb{R}^m_+\right)$$

（双共役関数の定義についての背景）

本稿の著者の一人である荒谷が、多目的最適化の分野を研究し始めたのは 2000 年代初頭である。その頃は、既に多目的最適化の大家である椹木先生・谷野先生・中山先生らによって、ベクトル値の双対性の理論 [10, 11, 12] は完成していた。よって、荒谷はその時は双対性理論の分野に足を踏み入れることはなかった。

集合最適化問題の草分け論文とも言える、黒岩-田中-Ha[8] を契機として、荒谷は 2010 年頃から集合最適化の研究を始めた。集合最適化の研究は集合関係の性質や集合のスカラー化関数の性質の解明などいろいろな進展があり、荒谷・齋藤も一部において貢献した。

今回本稿のテーマで研究を進めていく際に、前述のベクトル値共役関数の理論を再考することとなった。その中で筆者が考えた上記の双共役関数の定義は、従来の理論に集合最適化の概念を取り入れるというものである。

筆者の知る限りでは、[5, 6] がベクトル最適化問題に集合関係を導入した最初の論文である。川崎先生は独自に集合関係を提唱していて、反対称律を仮定に入れているのが特徴である。しかし、ベクトル順序を自然な形で拡張した [8] において、反対称律を満たすものは少ない。そこで、集合関係で最もスタンダードなものと現在では多くの研究者に認識されている l 型・u 型ではどうなるのかという疑問から上記の定義に至った。

命題 3.7. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ をベクトル値関数とする。そのとき、f の双共役関数は次の性質を持つ。

(a) もし任意の $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ に対して $f^*(A)$ が単元集合ならば、 $f^{**}(x) \leq^w_{\mathbb{R}^m_+} f(x)$ である。

(b) もし任意の $x \in \mathbb{R}^n$、$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ に対して $f^*(A)$ が $f^*(A) \subset Ax - f(x) + \mathbb{R}^m_+$ を満たすならば、$f_l^{**}(x) \leq^l_{\mathbb{R}^m_+} f(x)$ である。

(c) もし任意の $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ に対して $f^*(A)$ が $f^*(A) - f^*(A) \subset -\mathbb{R}^m_+$ を満たすならば、$f_u^{**}(x) \leq^u_{\mathbb{R}^m_+} f(x)$ である。

Proof. (a) f^* の定義から、任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して次が分かる。

$$Ax - f(x) \leq_{\mathbb{R}^m_+} f^*(A)$$

$$Ax - f^*(A) \leq_{\mathbb{R}^m_+} f(x)$$

f^{**} の定義から、結論を得る。

(b) f^* の定義と (b) の仮定から、任意の $x \in \mathbb{R}^n$、$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ に対して次が分かる。

$$\{Ax - f(x)\} \leq^l_{\mathbb{R}^m_+} f^*(A)$$

さらに

$$\{Ax\} \leq^l_{\mathbb{R}^m_+} f(x) + f^*(A) \qquad (f(x) + f^*(A) \subset Ax + \mathbb{R}^m_+)$$

より、次が言える。

$$f(x) \in f(x) + f^*(A) - f^*(A) \subset Ax - f^*(A) + \mathbb{R}^m_+$$

つまりそれは $Ax - f^*(A) \leq^l_{\mathbb{R}^m_+} f(x)$ である。f^{**}_l の定義から、結論を得る。

(c) f^* の定義から、任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して次が分かる。

$$\{Ax - f(x)\} \leq^u_{\mathbb{R}^m_+} f^*(A)$$

さらに

$$\{Ax\} \leq^u_{\mathbb{R}^m_+} f(x) + f^*(A) \qquad (Ax \in f(x) + f^*(A) - \mathbb{R}^m_+)$$

である。すると、(c) の仮定から次が言える。

$$Ax - f^*(A) \subset f(x) + f^*(A) - f^*(A) - \mathbb{R}^m_+ \subset f(x) - \mathbb{R}^m_+ - \mathbb{R}^m_+ = f(x) - \mathbb{R}^m_+$$

つまりそれは $Ax - f^*(A) \leq^u_{\mathbb{R}^m_+} f(x)$ である。f^{**}_u の定義から、結論を得る。 □

（3.2 節のまとめ）

集合関係を用いて、f^{**} と f を比較することができたが、何らかの条件が必要なところが実数値と異なる点である。f^* や f^{**} について何らかの凸性も得られそうであるが、それは今後の課題である。

4 Wolfe 型の双対性

この節では、凸計画問題とは限らない枠組みの中で、弱・強双対定理を導出する。問題 (MOP) に対して、次の Wolfe 型双対問題を考える。

$$\text{(DMOP)} \begin{cases} \text{Maximize} \quad L(y, A) \quad (y, A) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m\times l} \\ \text{subject to} \quad \nabla L(y, A) = 0, \quad A \in \mathbb{R}^{m\times l}_+ \end{cases}$$

4.1 弱双対定理

私たちは [4] の定理 3.1 を参考にして、次の拡張定理を得た。

定理 4.1 (弱双対定理)**.** 問題 (MOP) と (DMOP) に対して、(DMOP) のそれぞれの実行可能解 (y, A) について *Lagrange* 関数が過小評価関数 $\tilde{L}(\cdot, A)$ を認めさらに次の条件を満たす。

(1) $\tilde{L}(\cdot, A)$ はその点で微分可能である。

(2) $\tilde{L}(\cdot, A)$ は、“それぞれの停留点は大域的最小解である” という性質を持つ。

そのとき、$\text{Max(DMOP)} \leq^w_{\mathbb{R}^m_+} \text{Min(MOP)}$ である。

系 4.2. 問題 (MOP) と (DMOP) に対して、(DMOP) のそれぞれの実行可能解 (y, A) について *Lagrange* 関数が $\mathbb{R}^m_+$-凸過小評価関数 $\tilde{L}(\cdot, A)$ を認めるとする。

そのとき、$\text{Max(DMOP)} \leq^w_{\mathbb{R}^m_+} \text{Min(MOP)}$ である。

4.2 強双対定理

定理 4.3 (強双対定理)**.** 問題 (MOP) と (DMOP) に対して、(DMOP) のそれぞれの実行可能解 (y, A) について *Lagrange* 関数が過小評価関数 $\tilde{L}(\cdot, A)$ を認めさらに次の条件を満たす。

(1) $\tilde{L}(\cdot, A)$ はその点で微分可能である。

(2) $\tilde{L}(\cdot, A)$ は、“それぞれの停留点は大域的最小解である” という性質を持つ。

もし、条件 **(KKT)** が (MOP) の最小解で成り立つならば、次が言える。

(a) 次の条件

$$L(\cdot, A) \leq^l_{\mathbb{R}^m_+} \mathrm{Max(DMOP)}$$

を仮定すると、Max(DMOP)$\in$ [Min(MOP)]^l である。

(b) 次の条件

$$\mathrm{Min(MOP)} \subset \mathrm{Max(DMOP)} - \mathbb{R}^m_+$$

を仮定すると、Max(DMOP)$\in$ [Min(MOP)]^u である。

(c) 次の条件

$$L(\cdot, A) \leq^w_{\mathbb{R}^m_+} \mathrm{Max(DMOP)}$$

を仮定すると、Max(DMOP) = Min(MOP) である。

注意 2. 単調性を満たすスカラー化関数（$A, B \in \mathcal{V}$ とスカラー化関数 $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ が、$A \leq^l_C B \Longrightarrow f(A) \leq f(B)$ を満たす。）について、次が成り立つ。

$$A \in [B]^l \quad \Longrightarrow \quad f(A) = f(B)$$

（4 節のまとめ）

通常の強双対定理は、(c) の結論「Max(DMOP) = Min(MOP)」のような形である。(a)・(b) のような同値類を用いた結論に違和感を持つ方もおられるかも知れない。しかし、上記の “注意” にもある通り、同値類は単調性を満たすスカラー化関数（自然な仮定である）を考えると、集合をその関数でスカラー化した時に等しい値となる。よって以上の理由から、本稿では (a)・(b) のような結果も強双対定理の仲間として加えたが、これについては諸先生方のご意見を頂ければと考えている。

5 まとめ

本稿では、[4] の過小評価の概念を導入することにより、多目的計画問題の大域的最小解となる実行可能解について Karush-Kuhn-Tucker の十分性の基準を与えた。私たちは、多目的計画問題における過小評価に関する双対性の結果を集合最適化の枠組みの中で発表した。さらに私たちは、ベクトル値関数の新しい双共役関数の定義を集合最適化の枠組みの中で与えた。

与えられたベクトル値関数に対して、その共役関数は集合値写像となることから ([5, 6] も参照)、集合最適化問題は多目的最適化問題の双対性理論 [2, 7] に一石を投じるものであり、今後一層重要な役割を果たすと筆者は考えている。

参考文献

[1] Y. Araya, *Some types of minimal element theorems and Ekeland's variational principles in set optimization*, submitted.

[2] R. I. Bot, S-M. Grad, G. Wanka, *Duality in vector optimization*, Vector Optimization. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[3] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, and C. Zălinescu *Variational methods in partially ordered spaces*, Springer-Verlag, New York 2003.

[4] V. Jeyakumar, S. Srisatkunarajah, *New sufficiency for global optimality and duality of mathematical programming problems via underestimators*, J. Optim. Theory Appl. 140 (2009), no. 2, 239–247.

[5] H. Kawasaki, *Conjugate relations and weak subdifferentials of relations*, Math. Oper. Res. 6 (1981), no. 4, 593–607.

[6] H. Kawasaki, *A duality theorem in multiobjective nonlinear programming*, Math. Oper. Res. 7 (1982), no. 1, 95–110.

[7] A. Khan, C. Tammer, C. Zălinescu, *Set-valued optimization. An introduction with applications*, Vector Optimization. Springer, Heidelberg, 2015.

[8] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T.X.D. Ha, *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Anal. 30, (1997) 1487–1496.

[9] D. T. Luc, *Theory of vector optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 319, Springer-Verlag, Berlin (1989).

[10] T. Tanino, Y. Sawaragi *Duality theory in multiobjective programming*, J. Optim. Theory Appl. 27 (1979), no. 4, 509–529.

[11] T. Tanino, Y. Sawaragi *Conjugate maps and duality in multiobjective optimization*, J. Optim. Theory Appl. 31 (1980), no. 4, 473–499.

[12] T. Tanino, *Conjugate duality in vector optimization*, J. Math. Anal. Appl. 167 (1992), no. 1, 84–97.