数理解析研究所講究録 第2127巻 2019年 39-49

一列型 C_n 型 Macdonald 多項式と変形 Catalan 数

広島工業大学工学部　星野歩 *
Ayumu Hoshino
Hiroshima Institute of Technology,
東京大学大学院数理科学研究科　白石潤一 †
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

概要

一列型 C_n 型 Macdonald 多項式と単項対称多項式の間の遷移行列 $\mathcal{C}$ を具体的に求め，$\mathcal{C}$ の各成分が，ある三項間漸化式を満たすことを示す．この三項間漸化式を用いて，遷移行列 $\mathcal{C}$ の成分が Catalan 数または ballot 数の変形を与えることを示す．また，一列型 C_n 型 Schur 多項式の一列型 C_n 型 Hall-Littlewood 多項式による展開係数（Kostka 多項式）を，変形 ballot 数を用いて具体的に記述する．

1　はじめに

本稿では論文 [HS1] について得られた結果を紹介する．詳しい証明は論文を参照していただきたい．本稿で用いる主な記号を以下に記載する ([GR]).

$$
\begin{aligned}
&(z;q)_\infty=\prod_{k=0}^{\infty}(1-q^kz),\quad (z;q)_k=\frac{(z;q)_\infty}{(q^kz;q)_\infty}\quad (k\in\mathbb{Z}),\\
&(a_1,a_2,\ldots,a_r;q)_k=(a_1;q)_k(a_2;q)_k\cdots(a_r;q)_k\quad (k\in\mathbb{Z}),\\
&{}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\ldots,a_{r+1}\\ b_1,\ldots,b_r\end{matrix};q,z\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1,a_2,\ldots,a_{r+1};q)_n}{(q,b_1,b_2,\ldots,b_r;q)_n}z^n.
\end{aligned}
$$

* 本研究は JSPS 科研費 16K05186 の助成を受けています.
† 本研究は JSPS 科研費 15K04808, 16K05186 の助成を受けています.

2　一列型 Koornwinder 多項式の四重和公式

この節では, Koornwinder 多項式の定義と, 一列型 Koornwinder 多項式の明示公式を与える. n を正の整数とし，$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ を変数とする．BC_n 型のワイル群を $W_n(\simeq \mathbb{Z}_2^n \rtimes \mathfrak{S}_n)$ とし，$\mathbb{C}[x_1^{\pm},x_2^{\pm},\dots,x_n^{\pm}]^{W_n}$ を W_n 不変な x の Laurent 多項式環とする．長さ n の分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$ ($\lambda_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n$) に対し, 単項対称多項式 $m_\lambda=m_\lambda(x)$ を

$$m_\lambda=\frac{1}{|\mathrm{Stab}(\lambda)|}\sum_{\mu\in W_n\cdot\lambda}\prod_i x_i^{\mu_i}$$

で定める．ただし，$\mathrm{Stab}(\lambda)=\{s\in W_n\,|\,s\lambda=\lambda\}$，$\mu=(\mu_1,\mu_2,\dots)$ とする.

複素パラメタ a,b,c,d,q,t に対し，Koornwinder の q-差分作用素 $\mathcal{D}_x=\mathcal{D}_x(a,b,c,d|q,t)$ は次で与えられる [K].

$$\mathcal{D}_x=\sum_{i=1}^n\frac{(1-ax_i)(1-bx_i)(1-cx_i)(1-dx_i)}{\alpha t^{n-1}(1-x_i^2)(1-qx_i^2)}\prod_{j\neq i}\frac{(1-tx_ix_j)(1-tx_i/x_j)}{(1-x_ix_j)(1-x_i/x_j)}\left(T_{q,x_i}^{+1}-1\right)$$
$$+\sum_{i=1}^n\frac{(1-a/x_i)(1-b/x_i)(1-c/x_i)(1-d/x_i)}{\alpha t^{n-1}(1-1/x_i^2)(1-q/x_i^2)}\prod_{j\neq i}\frac{(1-tx_j/x_i)(1-t/x_ix_j)}{(1-x_j/x_i)(1-1/x_ix_j)}\left(T_{q,x_i}^{-1}-1\right),$$

ただし，$\alpha=(abcdq^{-1})^{1/2}$, $T_{q,x}^{\pm1}f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)=f(x_1,\dots,q^{\pm1}x_i,\dots,x_n)$ とする.

Definition 2.1 ([K]). Koornwinder 多項式 $P_\lambda(x)=P_\lambda(x|a,b,c,d|q,t)\in\mathbb{C}[x_1^{\pm},x_2^{\pm},\dots,x_n^{\pm}]^{W_n}$ は, 次の 2 つの条件により, 一意に特徴づけられる.

$$(a)\quad P_\lambda(x)=\sum_{\mu\leq\lambda}c_{\lambda,\mu}m_\mu(x)\quad(c_{\lambda,\lambda}=1),$$
$$(b)\quad \mathcal{D}_xP_\lambda(x)=d_\lambda P_\lambda(x),$$

ここに，分割 λ, μ の支配的順序は

$$\lambda\geq\mu\Leftrightarrow\lambda_1+\cdots+\lambda_k\geq\mu_1+\cdots+\mu_k\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

で定め，固有値 d_λ は

$$d_\lambda=\sum_{j=1}^n(\alpha t^{n-j}(q^{\lambda_j}-1)+\alpha^{-1}t^{-n+j}(q^{-\lambda_j}-1))\tag{2.1}$$

とする.

Koornwinder 多項式は, パラメタを特殊化することによって，(B_n,B_n), (C_n,C_n), (D_n,D_n) 型の Macdonald 多項式に退化することが知られている ([K, Mac]).

本稿では，一列型分割 (1^r) $(0\leq r\leq n)$ に対する Koornwinder 多項式 $P_{(1^r)}(x|a,b,c,d|q,t)$ (以下，一列型 Koornwinder 多項式と呼ぶ) や，その退化多項式を扱う.

Definition 2.2. 対称な Laurent 多項式 $E_r(x)$ を次で定める.

$$\prod_{i=1}^{n}(1-yx_i)(1-y/x_i)=\sum_{r\geq 0}(-1)^r E_r(x)y^r.$$

分割 λ の共役を λ' とする. [Mim] で与えられた BC 型の核関数関係式を用いれば, m 個の変数 $y=(y_1,\cdots,y_m)$ に関する Koornwinder の q-差分作用素の固有関数を用いることで, 長さが m 以下の分割 λ の共役 λ' に対する n 変数 $(n\geq m)$ の Koornwinder 多項式 $P_{\lambda'}(x|a,b,c,d|q,t)$ を構成することができる ([HS1]). これを $m=1$ の場合に適用する. Askey-Wilson 多項式の四重級数表示 ([HNS]) を用いることで次の定理を得る.

Theorem 2.3 ([HS1]).

$$P_{(1^r)}(x|a,b,c,d|q,t)=\sum_{k,l,i,j\geq 0}(-1)^{i+j}E_{r-2k-2l-i-j}(x)c_e(k,l;t^{n-r+1+i+j})c_o(i,j;t^{n-r+1}),$$

ここに

$$\begin{aligned}c_e(k,l;s)=&\frac{(tc^2/a^2;t^2)_k(sc^2t;t^2)_k(s^2c^4/t^2;t^2)_k}{(t^2;t^2)_k(sc^2/t;t^2)_k(s^2a^2c^2/t;t^2)_k}\frac{(1/c^2;t)_l(s/t;t)_{2k+l}}{(t;t)_l(sc^2;t)_{2k+l}}\frac{1-st^{2k+2l-1}}{1-st^{-1}}a^{2k}c^{2l},\\ c_o(i,j;s)=&\frac{(-a/b;t)_i(scd/t;t)_i}{(t;t)_i(-sac/t;t)_i}\frac{(s;t)_{i+j}(-sac/t;t)_{i+j}(s^2a^2c^2/t^3;t)_{i+j}}{(s^2abcd/t^2;t)_{i+j}(sac/t^{3/2};t)_{i+j}(-sac/t^{3/2};t)_{i+j}}\\ &\times\frac{(-c/d;t)_j(sab/t;t)_j}{(t;t)_j(-sac/t;t)_j}b^id^j.\end{aligned}$$

3 一列型 C_n 型 Macdonald 多項式の明示公式と matrix inversion

この節では, Koornwinder 多項式のパラメタを特殊化した多項式 $P_{(1^r)}(x|a,-a,c,-c|q,t)$ についての性質を調べる. Theorem 2.3 より, 次を得る.

Corollary 3.1. パラメータを $(a,b,c,d)\to(a,-a,c,-c)$ と特殊化する.

$$\begin{aligned}P_{(1^r)}(x|a,-a,c,-c|q,t)=&\sum_{\substack{k,l\geq 0\\ 2k+2l\leq r}}E_{r-2k-2l}(x)\frac{(1/c^2;t)_l(s/t;t)_{2k+l}}{(t;t)_l(sc^2;t)_{2k+l}}\frac{1-st^{2k+2l-1}}{1-st^{-1}}c^{2l}\\ &\times\frac{(tc^2/a^2;t^2)_k(sc^2t;t^2)_k(s^2c^4/t^2;t^2)_k}{(t^2;t^2)_k(sc^2/t;t^2)_k(s^2a^2c^2/t;t^2)_k}a^{2k}\quad(s=t^{n-r+1}).\end{aligned}$$

特に (C_n,C_n) 型, (D_n,D_n) 型 Macdonald 多項式はそれぞれ

$$\begin{aligned}P_{(1^r)}^{(C_n,C_n)}(x|b;q,t)&=P_{(1^r)}(x|b^{1/2},-b^{1/2},q^{1/2}b^{1/2},-q^{1/2}b^{1/2}|q,t),\\ P_{(1^r)}^{(D_n,D_n)}(x|q,t)&=P_{(1^r)}(x|1,-1,q^{1/2},-q^{1/2}|q,t)\ (=P_{(1^r)}^{(C_n,C_n)}(x|1;q,t))\end{aligned}\tag{3.1}$$

と表せる.

ここで

$$\mathsf{M}(s,l)=(-1)^l s^{-l}\frac{(s^2/t^2;t^2)_l}{(t^2;t^2)_l}\frac{1-s^2t^{4l-2}}{1-s^2t^{-2}}{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}-sa^2,-sc^2,s^2t^{2l-2},t^{-2l}\\-s,-st,s^2a^2c^2/t\end{matrix};t^2,t^2\right]$$

と定めると，次の定理が得られる．

Theorem 3.2.

$$P_{(1^r)}(x|a,-a,c,-c|q,t)=\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}\mathsf{M}(t^{n-r+1},l)E_{r-2l}(x).$$

Theorem 3.2 によって，$P_{(1^r)}(x|a,-a,c,-c|q,t)$ の $E_r(x)$ による展開係数が $\mathsf{M}(s,l)$ で与えられることが示されたが，$E_r(x)$ の $P_{(1^r)}(x|a,-a,c,-c|q,t)$ による展開係数を求めることを考える．次の定理が知られている．

Theorem 3.3 ([B],p.1,Theorem, [L],p.5,Corollary)**.** 下三角行列 $\mathcal{M}(u,v;x,y;q)$ の各成分を次で定める．

$$\begin{aligned}(r,r-2i)\text{ 成分:}\quad &\mathcal{M}_{r,r-2i}(u,v;x,y;q)=\ y^iv^i\,\frac{(x/y;q)_i}{(q;q)_i}\frac{(uq^{r-2i};q)_{2i}}{(uxq^{r-i};q)_i(uyq^{r-2i+1};q)_i},\\ \text{その他の成分:}\quad &0.\end{aligned}$$

このとき $\mathcal{M}(u,v;x,y;q)\mathcal{M}(u,v;y,z;q)=\mathcal{M}(u,v;x,z;q)$ となり，特に $\mathcal{M}(u,v;x,y;q)$ と $\mathcal{M}(u,v;y,x;q)$ は互いに逆行列となる．

Lemma 3.4. 次のように $d(u,v)_r$ を定める．

$$d(u,v)_r:=\frac{(t^2v^{1/2};t)_r}{(u^{1/2};t)_r}(u^{1/4}/v^{3/4})^r.$$

下三角行列 $\widetilde{\mathcal{M}}(u,v;x,y;t)$ の各成分を次で定める．

$$\begin{aligned}(r,r-2i)\text{ 成分:}\ &\widetilde{\mathcal{M}}_{r,r-2i}(u,v;x,y;t)\\ &=\mathcal{M}_{r,r-2i}(u,v;x,y;t^2)\times d(u,v)_r/d(u,v)_{r-2i}\\ &=\frac{(x/y;t^2)_i}{(t^2;t^2)_i}\frac{(v^{1/2}t^{r-2i+2};t)_{2i}}{(u^{1/2}t^{r-2i};t)_{2i}}\frac{(ut^{2r-4i};t^2)_{2i}}{(uxt^{2r-2i};t^2)_i(uyt^{2r-4i+2};t^2)_i}(yu^{1/2}/v^{1/2})^i,\\ \text{その他の成分:}\ &0.\end{aligned}$$

このとき $\widetilde{\mathcal{M}}(u,v;x,y;t)$ と $\widetilde{\mathcal{M}}(u,v;y,x;t)$ は互いに逆行列となる．

ここで，次の命題を得る．

Proposition 3.5. $s=t^{n-r+1}$ として

$$\mathsf{M}(s,l)=\sum_{j=0}^{l}\widetilde{\mathcal{M}}_{r,r-2j}(t^{-2n+2}/c^4,t^{-2n-4},c^2/ta^2,1/t^2;t)\mathcal{M}_{r-2j,r-2l}(t^{-n},t,1/c^2,1;t).$$

Proposition 3.5 は, $\mathsf{M}(s,l)$ が因子化した成分を持つ 2 つの行列の積で記述され，かつ，それらの逆行列も因子化した成分を持つことを示している．よって $s=t^{n-r+1}$ に対し $\widetilde{\mathsf{M}}(s,l)$ を

$$\widetilde{\mathsf{M}}(s,l)=\sum_{j=0}^{l}\mathcal{M}_{r,r-2j}(t^{-n},t,1,1/c^2;t)\widetilde{\mathcal{M}}_{r-2j,r-2l}(t^{-2n+2}/c^4,t^{-2n-4},1/t^2,c^2/ta^2;t)$$

と定めれば，次の定理を得る．

Theorem 3.6.

$$E_r(x)=\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}\widetilde{\mathsf{M}}(t^{n-r+1},l)P_{(1^{r-2l})}(x|a,-a,c,-c|q,t).$$

また，$\mathsf{M}(s,l)$ は q-超幾何級数 ${}_4\phi_3$ で表されていたが，$\widetilde{\mathsf{M}}(s,l)$ も同様の記述を持つことが示される．

Theorem 3.7.

$$\widetilde{\mathsf{M}}(s,l)=(st^{l-1})^{-l}\frac{(t^{2l}s^2;t^2)_l}{(t^2;t^2)_l}{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}-t^{-2l+2}/sa^2,-t^{-2l+2}/sc^2,t^{-2l+2}/s^2,t^{-2l}\\-t^{-2l+1}/s,-t^{-2l+2}/s,t^{-4l+5}/s^2a^2c^2\end{matrix};t^2,t^2\right].$$

4　遷移行列の三項間漸化式

この節では，$P_{(1^r)}(x|a,-a,c,-c|q,t)$ と $m_{(1^r)}(x)$ の間の遷移行列 $\mathcal{C}$ の各成分が，ある三項間漸化式を満たすことを示す．その準備として，$\mathsf{M}(s,l)$ が満たす四項間関係式を与える．

Theorem 4.1 (Contiguity relation)**.** 任意のパラメタ s について

$$\mathsf{M}(s,l)+F(s,-1)\mathsf{M}(st^2,l-1)=\mathsf{M}(st,l)+\mathsf{M}(st,l-1),\tag{4.1a}$$

$$\widetilde{\mathsf{M}}(s,l)+F(s,2-2l)\widetilde{\mathsf{M}}(s,l-1)=\widetilde{\mathsf{M}}(st^{-1},l)+\widetilde{\mathsf{M}}(st,l-1),\tag{4.1b}$$

ここに

$$F(s,l)=\frac{(1-t^l/s)(1-t^{l+2}/sa^2c^2)(1+t^{l+1}/sa^2)(1+t^{l+1}/sc^2)}{(1-t^{2l+1}/s^2a^2c^2)(1-t^{2l+3}/s^2a^2c^2)}.$$

Definition 4.2. $s=t^{m+1}$ に対し $C(s,j)$ を次で定める．

$$C(s,j):=\sum_{l=0}^{j}\mathsf{M}(s,l)\binom{m+2j}{j-l},$$

ここに $\binom{m}{j}$ は二項係数.

一方，Definition 2.2 で与えられた対称な Laurent 多項式 $E_r(x)$ は次を満たす．

Lemma 4.3.

$$E_r(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \binom{n-r+2j}{j} m_{(1^{r-2j})}(x).$$

よって，Theorem 3.2 は次のように書き換えられる．

$$P_{(1^r)}(x|a,-a,c,-c|q,t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} C(t^{n-r+1}, j) m_{(1^{r-2j})}(x). \tag{4.2}$$

このとき，次の定理を得る．

Theorem 4.4. 上三角行列 $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ を $\mathcal{C}_{r,r+2i} = C(t^{r+1}, i)$ $(r, i \geq 0)$ と定めると $\mathcal{C}_{ij}$ は次の漸化式を満たす ((a,q,t)-deformed Catalan triangle (ballot number)):

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}_{0,0} = 1, \\
&\mathcal{C}_{i-1,i-1} = \mathcal{C}_{i,i} && (i = 1,2,3,\ldots), \\
&F(1,-1)\mathcal{C}_{1,j-1} = \mathcal{C}_{0,j} && (j = 2,4,6,\ldots), \\
&\mathcal{C}_{i-1,j-1} + F(t^i,-1)\mathcal{C}_{i+1,j-1} = \mathcal{C}_{i,j} && (i+j : \text{even},\ 0 < i < j).
\end{aligned}$$

特に，$P_{(1^r)} = P_{(1^r)}(x|a,-a,c,-c|q,t)$ と書くことにし，

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{(n)} &= {}^t(P^{(C_n)}_{(1^n)}, \ldots, P^{(C_n)}_{(1)}, P^{(C_n)}_{\emptyset}, 0,0,0,\ldots), \\
\mathbf{m}^{(n)} &= {}^t(m_{(1^n)}, \ldots, m_{(1)}, m_{\emptyset}, 0,0,0,\ldots)
\end{aligned}$$

と定めると $\mathbf{P}^{(n)} = \mathcal{C}\,\mathbf{m}^{(n)}$ であり，遷移行列 $\mathcal{C}$ は階数 n に依存しない (stability).

証明は，上記の漸化式を Theorem 4.1 で与えられた $\mathsf{M}(s,l)$ の contiguity relation に帰着させることで得られる．

5 一列型 C_n 型 Macdonald 多項式の組合せ的明示公式

この節では，遷移行列 $\mathcal{C}$ の各成分が満たす三項間漸化式の組合せ的な解を与える．

Theorem 5.1.

$$\mathcal{C}_{r,r+2i} = \sum_{(d_1,\ldots,d_i)\in\mathcal{P}(r,i)} F(t^{r+1}, d_1)F(t^{r+1}, d_2)\cdots F(t^{r+1}, d_i),$$

ここに

$$\mathcal{P}(r,i) = \left\{(d_1, d_2, \ldots, d_i) \in \mathbb{Z}^i \,|\, 0 \leq d_1 \leq r,\, d_k - 1 \leq d_{k+1} \leq r \text{ for } 1 \leq k < i \right\}.$$

証明は帰納法による．

6　応用 - Kostka 多項式，変形 Catalan 数

この節では，これまでの節で得られた $P_{(1^r)}(x|a,-a,c,-c|q,t)$ と $E_r(x)$ または $m_{(1^r)}(x)$ との間の遷移行列のパラメタを特殊化する．はじめに，$P^{(C_n,C_n)}_{(1^r)}(x|t;q,t)$ や $P^{(D_n,D_n)}_{(1^r)}(x|q,t)=P^{(C_n,C_n)}_{(1^r)}(x|1;q,t)$ について調べる．(3.1) より，次の定理を得る．

Theorem 6.1.

$$P^{(C_n,C_n)}_{(1^r)}(x|t;q,t)=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}\frac{(1/qt;t^2)_j(t^{2n-2r},t^2)_j}{(t^2;t^2)_j(qt^{2n-2r+3};t^2)_j}\frac{1-t^{2n-2r+4j}}{1-t^{2n-2r}}(qt)^jE_{r-2j}(x), \tag{6.1a}$$

$$E_r(x)=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}\frac{(qt;t^2)_j(t^{2n-2r+2j+2},t^2)_j}{(t^2;t^2)_j(qt^{2n-2r+2j+1};t^2)_j}P^{(C_n,C_n)}_{(1^{r-2j})}(x|t;q,t), \tag{6.1b}$$

$$P^{(D_n,D_n)}_{(1^r)}(x|q,t)=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}\frac{(t/q;t^2)_j(t^{2n-2r},t^2)_j}{(t^2;t^2)_j(qt^{2n-2r+1};t^2)_j}\frac{1-t^{n-r+2j}}{1-t^{n-r}}q^jE_{r-2j}(x), \tag{6.1c}$$

$$E_r(x)=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}\frac{(q/t;t^2)_j(t^{2n-2r+2j+2},t^2)_j}{(t^2;t^2)_j(qt^{2n-2r+2j-1};t^2)_j}\frac{1+t^{n-r}}{1+t^{n-r+2j}}t^jP^{(D_n,D_n)}_{(1^{r-2j})}(x|q,t). \tag{6.1d}$$

この Theorem 6.1 において $t=q$ と特殊化すると，次の系が得られる．

Corollary 6.2. C_n，D_n 型の Schur 多項式 $s^{(C_n)}_{(1^r)}(x)=P^{(C_n,C_n)}_{(1^r)}(x|q;q,q)$，$s^{(D_n)}_{(1^r)}(x)=P^{(D_n,D_n)}_{(1^r)}(x|q,q)$ は，それぞれ次のように記述される．

$$s^{(C_n)}_{(1^r)}(x)=E_r(x)-E_{r-2}(x), \tag{6.2a}$$

$$E_r(x)=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}s^{(C_n)}_{(1^{r-2k})}(x), \tag{6.2b}$$

$$s^{(D_n)}_{(1^r)}(x)=E_r(x). \tag{6.2c}$$

よって， Lemma 4.3 より，Schur 多項式の単項対称多項式による展開は次で記述される．

$$\begin{aligned} s^{(C_n)}_{(1^r)}(x)&=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}\left(\binom{n-r+2j}{j}-\binom{n-r+2j}{j-1}\right)m_{(1^{r-2j})}(x) &\text{(6.3a)}\\ &=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}\frac{n-r+1}{n-r+j+1}\binom{n-r+2j}{j}m_{(1^{r-2j})}(x), \end{aligned}$$

$$s^{(D_n)}_{(1^r)}(x)=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}\binom{n-r+2j}{j}m_{(1^{r-2j})}(x). \tag{6.3b}$$

ここに，$\binom{n-r+2k}{k} - \binom{n-r+2k}{k-1}$ は ballot 数 ($n=r$ のとき Catalan 数) である．

Example 6.3.

$$\begin{pmatrix} s^{(C_n)}_{(1^n)} \\ s^{(C_n)}_{(1^{n-1})} \\ s^{(C_n)}_{(1^{n-2})} \\ s^{(C_n)}_{(1^{n-3})} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 1 & & 2 & & 5 & & \cdots \\ & 1 & & 2 & & 5 & & 14 & \\ & & 1 & & 3 & & 9 & & \cdots \\ & & & 1 & & 4 & & 14 & \\ & & & & \ddots & & \ddots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{(1^n)} \\ m_{(1^{n-1})} \\ m_{(1^{n-2})} \\ m_{(1^{n-3})} \\ \vdots \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} s^{(D_n)}_{(1^n)} \\ s^{(D_n)}_{(1^{n-1})} \\ s^{(D_n)}_{(1^{n-2})} \\ s^{(D_n)}_{(1^{n-3})} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 2 & & 6 & & 20 & & 70 & & \cdots \\ & 1 & & 3 & & 10 & & 35 & & 126 & \\ & & 1 & & 4 & & 15 & & 56 & & \cdots \\ & & & 1 & & 5 & & 21 & & 84 & \\ & & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{(1^n)} \\ m_{(1^{n-1})} \\ m_{(1^{n-2})} \\ m_{(1^{n-3})} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

次に，一列型 C_n，D_n 型 Schur 多項式の一列型 Hall-Littlewood 多項式による展開係数 (Kostka 多項式) を具体的に記述する．Theorem 6.1 において $q=0$ とすると，一列型の C_n，D_n 型 Hall–Littlewood 多項式 $P^{(C_n,C_n)}_{(1^r)}(x|t;0,t)$, $P^{(D_n,D_n)}_{(1^r)}(x|0,t)$ が得られる．

Theorem 6.4.

$$P^{(C_n,C_n)}_{(1^r)}(x|t;0,t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} (-1)^j t^{j(j-1)} \frac{[n-r+2j]_{t^2}}{[n-r]_{t^2}} \begin{bmatrix} n-r+j-1 \\ j \end{bmatrix}_{t^2} E_{r-2j}(x), \tag{6.4a}$$

$$E_r(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \begin{bmatrix} n-r+2j \\ j \end{bmatrix}_{t^2} P^{(C_n,C_n)}_{(1^{r-2j})}(x|t;0,t), \tag{6.4b}$$

$$P^{(D_n,D_n)}_{(1^r)}(x|0,t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} (-1)^j t^{j^2} \frac{[n-r+2j]_t}{[n-r]_t} \begin{bmatrix} n-r+j-1 \\ j \end{bmatrix}_{t^2} E_{r-2j}(x), \tag{6.4c}$$

$$E_r(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} t^j \frac{1+t^{n-r}}{1+t^{n-r+2j}} \begin{bmatrix} n-r+2j \\ j \end{bmatrix}_{t^2} P^{(D_n,D_n)}_{(1^{r-2j})}(x|0,t), \tag{6.4d}$$

ここに，

$$[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q}, \quad [n]_q! = [1]_q[2]_q \cdots [n]_q, \quad \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_q = \prod_{k=1}^{j} \frac{[m-k+1]_q}{[k]_q} = \frac{[m]_q!}{[j]_q![m-j]_q!}.$$

Corollary 6.2 を用い，次の定理を得る．

Theorem 6.5.

$$s^{(C_n)}_{(1^r)}(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} t^{2j} \frac{[n-r+1]_{t^2}}{[n-r+j+1]_{t^2}} \begin{bmatrix} n-r+2j \\ j \end{bmatrix}_{t^2} P^{(C_n,C_n)}_{(1^{r-2j})}(x|t;0,t) \tag{6.5a}$$

$$= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \left(\begin{bmatrix} n-r+2j \\ j \end{bmatrix}_{t^2} - \begin{bmatrix} n-r+2j \\ j-1 \end{bmatrix}_{t^2} \right) P^{(C_n,C_n)}_{(1^{r-2j})}(x|t;0,t),$$

$$s^{(D_n)}_{(1^r)}(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} t^{j} \frac{1+t^{n-r}}{1+t^{n-r+2j}} \begin{bmatrix} n-r+2j \\ j \end{bmatrix}_{t^2} P^{(D_n,D_n)}_{(1^{r-2j})}(x|0,t) \tag{6.5b}$$

$$= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \left(t^{n-r+j} \begin{bmatrix} n-r+2j-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{t^2} + t^j \begin{bmatrix} n-r+2j-1 \\ j \end{bmatrix}_{t^2} \right) P^{(D_n,D_n)}_{(1^{r-2j})}(x|0,t).$$

Theorem 6.6 (Kostka 多項式)**.** C_n, D_n 型の Kostka 多項式 $K^{(C_n)}_{(1^r)(1^{r-2j})}(t)$，$K^{(D_n)}_{(1^r)(1^{r-2j})}(t)$ を次で定める.

$$s^{(C_n)}_{(1^r)}(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} K^{(C_n)}_{(1^r)(1^{r-2j})}(t) P^{(C_n,C_n)}_{(1^{r-2j})}(x|t;0,t), \tag{6.6a}$$

$$s^{(D_n)}_{(1^r)}(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} K^{(D_n)}_{(1^r)(1^{r-2j})}(t) P^{(D_n,D_n)}_{(1^{r-2j})}(x|0,t). \tag{6.6b}$$

このとき，$K^{(C_n)}_{(1^r)(1^{r-2j})}(t)$，$K^{(D_n)}_{(1^r)(1^{r-2j})}(t)$ は t の正整数係数多項式となり (Remark 6.7 参照), 次で表される.

$$K^{(C_n)}_{(1^r)(1^{r-2j})}(t) = t^{2j} \frac{[n-r+1]_{t^2}}{[n-r+j+1]_{t^2}} \begin{bmatrix} n-r+2j \\ j \end{bmatrix}_{t^2}$$

$$= \begin{bmatrix} n-r+2j \\ j \end{bmatrix}_{t^2} - \begin{bmatrix} n-r+2j \\ j-1 \end{bmatrix}_{t^2}, \tag{6.7a}$$

$$K^{(D_n)}_{(1^r)(1^{r-2j})}(t) = t^{j} \frac{1+t^{n-r}}{1+t^{n-r+2j}} \begin{bmatrix} n-r+2j \\ j \end{bmatrix}_{t^2}$$

$$= t^{n-r+j} \begin{bmatrix} n-r+2j-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{t^2} + t^j \begin{bmatrix} n-r+2j-1 \\ j \end{bmatrix}_{t^2}. \tag{6.7b}$$

Remark 6.7. (6.7a) を t^{-2j} 倍した式は [A, FH] で与えられた q-ballot 数 ($m=0$ のとき q-Catalan 数)

$$q^{-j} \left(\begin{bmatrix} m+2j \\ j \end{bmatrix}_q - \begin{bmatrix} m+2j \\ j-1 \end{bmatrix}_q \right) = \frac{[m+1]_q}{[m+j+1]_q} \begin{bmatrix} m+2j \\ j \end{bmatrix}_q$$

を $m \to n-r, q \to t^2$ と置き変えたものに等しい．特に q-ballot 数や q-Catalan 数は q の正整数係数の多項式になることが知られている ([A, FH]).

(6.7b) は，q-二項係数の等式

$$q^j \frac{1+q^{m-2j}}{1+q^m} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q^2} = q^{m-j} \begin{bmatrix} m-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{q^2} + q^j \begin{bmatrix} m-1 \\ j \end{bmatrix}_{q^2} \tag{6.8}$$

において $m \to n-r+2j, q \to t$ と置き換えたものと等しく，特に (6.8) は q の正整数係数の多項式である．

Example 6.8. Definition 6.6 より，遷移行列 $K^{(C_n)}_{(1^r)(1^{r-2j})}(t)$ を具体的に書くと

$$\begin{pmatrix}
1 & t^2 & t^4+t^8 & t^6+t^{10}+t^{12}+t^{14}+t^{18} & & \\
 & 1 & t^2+t^4 & t^4+t^6+t^8+t^{10}+t^{12} & & \cdots \\
 & & 1 & t^2+t^4+t^6 & t^4+t^6+2t^8+t^{10}+2t^{12}+t^{14}+t^{16} & \\
 & & & 1 & t^2+t^4+t^6+t^8 & \cdots \\
 & & & & \ddots & \ddots
\end{pmatrix}$$

となり，遷移行列 $K^{(D_n)}_{(1^r)(1^{r-2j})}(t)$ を具体的に書くと

$$\begin{pmatrix}
1 & 2t & 2t^2+2t^4+2t^6 & & \cdots \\
 & 1 & t+t^2+t^3 & t^2+t^3+t^4+t^5+2t^6+t^7+t^8+t^9+t^{10} & \\
 & & 1 & t+2t^3+t^5 & \cdots \\
 & & & 1 & t+t^3+t^4+t^5+t^7 \\
 & & & \ddots & \ddots
\end{pmatrix}$$

となる．

7　追記

この論説では，$P_{(1^r)}(x|a,-a,c,-c|q,t)$ と $E_r(x)$ の間の遷移行列が matrix inversion を用いて記述されることを用い，応用として一列型 C_n, D_n 型の Kostka 多項式の具体的な記述を得た．ここでは B_n 型について補足をする．(B_n,B_n) 型の Macdonald 多項式 $P_\lambda^{(B_n,B_n)}(x|a;q,t)$ は, Koornwinder 多項式のパラメタを $(a,b,c,d) \to (q^{1/2},-q^{1/2},-1,a)$ と置き換えた多項式である ([K, Mac])．$P_\lambda^{(B_n,B_n)}(x|a;q,t)$ と $E_r(x)$ の間の遷移行列が matrix inversion を用いて記述されれば，一列型 B_n 型 Kostka 多項式が得られるが，Theorem 2.3 で与えられた一列型 Koornwinder 多項式の四重和公式を (B_n,B_n) 型に退化させても，$E_r(x)$ の間の遷移行列が matrix inversion を用いて記述できない．これは，Theorem 2.3 の $c_o(i,j;s)$ の部分が matrix inversion と相性が悪いためであるが，我々の最近の結果 [HS2] では，この部分を修正した新たな一列型 Koornwinder 多項式の四重和公式を構成し，一列型 B_n 型の Kostka 多項式の具体的な記述を得た．この辺りの詳細の解説は，他の機会に行いたいと思います．

8 最後に

講演の機会を与えたくださった佐垣大輔先生に，この場を借りて御礼申し上げます．

参考文献

[A] E. Allen, Combinatorial Interpretations of Generalizations of Catalan Numbers and Ballot Numbers, *Dissertations, Paper 366, Carnegie Mellon University* (2014).

[B] D. M. Bressoud, A matrix inverse, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), 446–448.

[FH] J. Fürlinger and J. Hofbauer, q-Catalan numbers, J. Combin. Theory (A), **40** (1985), 248–264.

[Mac] I. G. Macdonald, Orthogonal polynomials associated with root systems, *Sém. Lothar. Combin.* **45** (2000), Art. B45a.

[GR] G. Gasper and M. Rahman, Basic hypergeometric series, 2nd ed., Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 96, Cambridge University Press, Cambridge, (2004).

[L] M. Lassalle, Some conjectures for Macdonald polynomials of type B, C, D. Sem. Lothar. Combin. **52** (2004), Art. B52h, 24 pp. (electronic).

[HNS] A. Hoshino, M. Noumi and J. Shiraishi, Some transformation formulas associated with Askey–Wilson polynomials and Lassalle's formulas for Macdonald-Koornwinder polynomials, Mosc. Math. J. **15** (2015), no. 2, 293–318, 404–405.

[HS1] A. Hoshino and J. Shiraishi, Macdonald polynomials of type C_n and deformed Catalan numbers, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **14** (2018), Paper No. 101, 33 pp.

[HS2] A. Hoshino and J. Shiraishi, Matrix inversion for Koornwinder polynomials with one column diagrams, preprint.

[K] Koornwinder T. H., Askey–Wilson polynomials for root systems of type BC, in Hypergeometric Functions on Domains of Positivity, Jack Polynomials, and Applications (Tampa, FL, 1991), *Contemp. Math.*, Vol. 138, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 189–204.

[Mim] K. Mimachi, A duality of Macdonald–Koornwinder polynomials and its application to integral representations, Duke Math. J. **107** (2001), no. 2, 265–281.