

高速加振による波動系の不安定化と キンクの生成

愛媛大学理学部 飯塚剛

Takeshi Iizuka

Faculty of Science, Ehime University

1 序文

高速加振によって、新たな安定状態が生じる現象はダイナミック安定化として知られている。例えば振り子の支点を高速に上下振動させると、倒立状態が安定になることがあり [1]、これはカピッツアの振り子として呼ばれている [2]。他にも Bose-Einstein condensate の安定化 [3]、およびレーザーによる粒子トラップの問題 [4] といった例がある。最近では連成カピッツア振り子の安定性解析 [5] などがある。一方、振り子の支点の振動の方向を水平にとると、底の安定状態が分岐して不安定化することがわかっている。本研究では連成振り子に対して水平加振を行ったとき、連続極限としての波動を調べる。

最初に、振り子の支点に任意の周期性を持たせた振動を与えたときの運動を取り上げて、ダイナミック安定化の理論が適用できることを示す。次に、連成振り子に拡張して特に水平加振の場合の有効波動方程式を導出し、厳密解としてキンクが導かれることを示す。さらに、ダイナミック安定化の正当性を示すため、元の運動方程式の直接数値シミュレーションを行うことによって、キンクは生成されることを示す。最終節では本論文のまとめを行う。

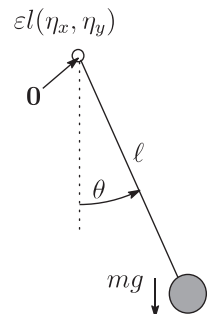
2 高速振動を受けた振り子の運動

図のような長さ l の軽い棒の先端に、質量 m の質点を有する振り子を考える。重力加速度を g とし、真下からの振れ角を θ とする。ここで白丸で示された支点を強制的に、原点周りに高速微小振動させる。無次元の小さいパラメターを ε とし、支点の運動の水平成分を $\varepsilon l \eta_x(\varepsilon^{-1}t)$ 、垂直成分を $\varepsilon l \eta_y(\varepsilon^{-1}t)$ とする。支点とともに運動する座標でみた運動方程式は

$$m l \ddot{\theta} = -m g \sin \theta - m \varepsilon l \left\{ \frac{d^2 \eta_x(\varepsilon^{-1}t)}{dt^2} \cos \theta + \frac{d^2 \eta_y(\varepsilon^{-1}t)}{dt^2} \sin \theta \right\},$$

となる。右辺第2項は慣性力である。ここで高速スケールの時間を示す τ を $\tau = \varepsilon^{-1}t$ で定義すると上式は

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \varepsilon^{-1} \{ \ddot{\eta}_x(\tau) \cos \theta + \ddot{\eta}_y(\tau) \sin \theta \}, \quad (1)$$



となる。次にダイナミック安定化の理論に従って振れ角 $\theta(t)$ を次のように展開する。

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \varepsilon\theta_1(t, \tau) + \varepsilon^2\theta_2(t, \tau) + \dots, \quad (2)$$

これより以下の式がわかる。

$$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_0 + \varepsilon^{-1} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^1 \theta_1}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \tau^2} + O(\varepsilon), \quad (3)$$

$$\sin \theta = \sin \theta_0 + \varepsilon \theta_1 \cos \theta + O(\varepsilon^2), \quad \cos \theta = \cos \theta_0 - \varepsilon \theta_1 \sin \theta + O(\varepsilon^2) \quad (4)$$

振り子の支点の振動は、原点周りの周期運動なので1周期分の平均値を $\langle \dots \rangle$ と書いて

$$\langle \eta_x \rangle = \langle \eta_y \rangle = 0, \quad (5)$$

とする。さらに(2)における θ_1, θ_2 は運動の高速振動成分を表していると仮定して

$$\langle \theta_1 \rangle = \langle \theta_2 \rangle = 0, \quad (6)$$

とする。以上を踏まえて(3)、(4)を(1)へ代入して ε のオーダー比較を行う。 $O(\varepsilon^{-1})$ からは $\partial^2 \theta_1 / \partial \tau^2 = -\ddot{\eta}_x \cos \theta_0 - \ddot{\eta}_y \sin \theta_0$ を得る。これを τ について2回積分して、(6)に注意すると

$$\theta_1 = -\eta_x \cos \theta_0 - \eta_y \sin \theta_0, \quad (7)$$

を得る。 $O(\varepsilon^0)$ からは

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_0 + 2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \tau^2} &= -\frac{g}{\ell} \sin \theta_0 + \theta_1 (\ddot{\eta}_x \sin \theta_0 - \ddot{\eta}_y \cos \theta_0) \\ &= -\frac{g}{\ell} \sin \theta_0 - (\eta_x \cos \theta_0 + \eta_y \sin \theta_0) (\ddot{\eta}_x \sin \theta_0 - \ddot{\eta}_y \cos \theta_0), \end{aligned} \quad (8)$$

が導かれる。2番目の等号では(7)を用いた。ここで $\eta_x(\tau), \eta_y(\tau)$ の周期を τ_0 として、先に述べた平均値を改めて

$$\langle F(\tau) \rangle \equiv \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau}^{\tau+\tau_0} F(\tau') d\tau', \quad (9)$$

で定義する。 $F(\tau)$ が周期 τ_0 の周期関数ならばこれは τ に依存しない。この平均操作を(8)に対して行う。左辺の第1項は τ に依存しない t の関数なので変化はない。第2, 3項は(6)より消える。右辺に関しては第1項は同様にそのまま。第2項に関しては

$$\langle \eta_x(\tau) \ddot{\eta}_x(\tau) \rangle = \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau}^{\tau+\tau_0} \eta_x(\tau') \ddot{\eta}_x(\tau') d\tau' = -\frac{1}{\tau_0} \int_{\tau}^{\tau+\tau_0} (\dot{\eta}_x(\tau'))^2 d\tau' = -\langle \dot{\eta}_x^2 \rangle, \quad (10)$$

のような計算が部分積分より出来るので、定数 A, B, C を

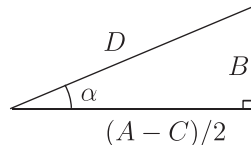
$$A \equiv \langle \dot{\eta}_x^2 \rangle, \quad B \equiv \langle \dot{\eta}_x \dot{\eta}_y \rangle, \quad C \equiv \langle \dot{\eta}_y^2 \rangle, \quad (11)$$

と導入すると平均操作後の(8)は

$$\ddot{\theta}_0 = -\frac{g}{\ell} \sin \theta_0 + (A - C) \sin \theta_0 \cos \theta_0 + B(\sin^2 \theta_0 - \cos^2 \theta_0), \quad (12)$$

となる。ここで図のように定義された角度 α と斜辺長 $D = \sqrt{B^2 + \frac{(A-C)^2}{4}}$ 導入すると

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_0 &= -\frac{g}{\ell} \sin \theta_0 - D \sin(2\theta_0 - \alpha) \\ &= -\frac{d}{d\theta_0} \left\{ -\frac{g}{\ell} \cos \theta_0 - \frac{D}{2} \cos(2\theta_0 - \alpha) \right\}, \quad (13)\end{aligned}$$



を得る。これがダイナミック理論から得られた自励有効モデルであり、右辺の微分内は有効ポテンシャル表している。

特に直線加振の場合を考えよう。この場合は

$$\eta_x = (\sin \beta) f(\tau), \quad \eta_y = (\cos \beta) f(\tau), \quad f(\tau + \tau_0) = f(\tau), \quad \boxed{\text{直線加振}} \quad (14)$$

とできる。 β は加振の方向を示していて、鉛直方向からの傾角となっている。このときは (11) は

$$A = \sin^2 \beta \langle \dot{f}^2 \rangle, \quad B = \sin \beta \cos \beta \langle \dot{f}^2 \rangle, \quad C = \cos^2 \beta \langle \dot{f}^2 \rangle, \quad (15)$$

となるので $A - C = -\langle \dot{f}^2 \rangle \cos 2\beta$, $B = \langle \dot{f}^2 \rangle \sin 2\beta / 2$ に注意して

$$D = \frac{\langle \dot{f}^2 \rangle}{2}, \quad \alpha = \arctan \frac{2B}{A-C} = -\tan 2\beta, \quad \therefore \alpha = -2\beta, \quad (16)$$

となる。従って有効運動方程式 (13) は

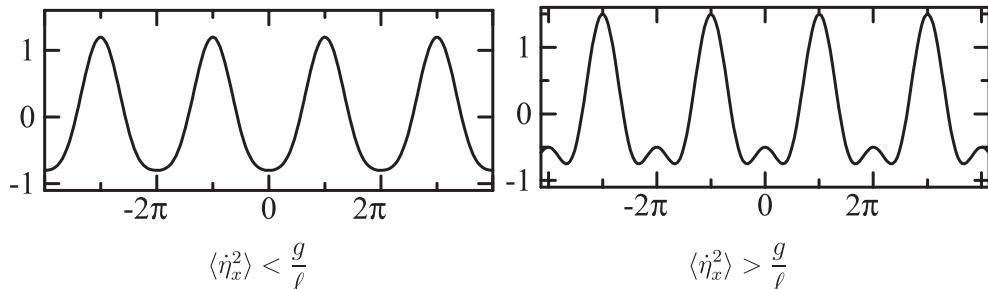
$$\ddot{\theta}_0 = -\frac{g}{\ell} \sin \theta_0 - \frac{\langle \dot{f}^2 \rangle}{2} \sin 2(\theta_0 + \beta) = -\frac{d}{d\theta_0} \left\{ -\frac{g}{\ell} \cos \theta_0 - \frac{\langle \dot{f}^2 \rangle}{4} \cos 2(\theta_0 + \beta) \right\}, \quad (17)$$

と若干変形することが出る。本研究で扱う水平加振の場合は $\beta = \pi/2$, $\eta_x = f$ となり、有効ポテンシャル U_{eff} は

$$U_{\text{eff}}(\theta_0) = -\frac{g}{\ell} \cos \theta_0 + \frac{\langle \dot{\eta}_x^2 \rangle}{4} \cos 2\theta_0, \quad \boxed{\text{水平加振}} \quad (18)$$

となる。これを下図に示した。 $\langle \dot{\eta}_x^2 \rangle > g/\ell$ のときは $\ddot{U}_{\text{eff}}(0) < 0$ となり、下の安定状態が不安定化して 2 つの安定点に分岐することがわかる。

水平加振時の有効ポテンシャル $U_{\text{eff}}(\theta_0)$



3 水平加振された連成振り子

次に連成振り子を考える。振り子の間には振れ角の差に比例する復元力が働くものとする。支点が1直線上にありこれを水平に高速微小振動させよう。全ての振り子が前節で扱ったものと同様として、 i 番目の振り子の振れ角を θ_i とにおいて運動方程式を書く。振動は水平方向に $\varepsilon \ell \eta_x(\varepsilon^{-1}t)$ と与えられているので、

$$m\ell\ddot{\theta}_i(t) = k(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) - mg \sin \theta_i - m\ell\varepsilon \cos \theta_i \frac{d^2\eta_x(\varepsilon^{-1}t)}{dt^2}, \quad (19)$$

となる。右辺第1項が振り子間の復元力であり、第3項は最初に示したた慣性力である。ここで振り子間の距離を h として、連成方向に x 軸を設定して次の様な連続極限をとる。

$$ih \rightarrow x, \quad \theta_i(t) \rightarrow \theta(t, x), \quad (\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) \rightarrow h^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

すると(19)は $u = \sqrt{\frac{kh^2}{m\ell}}$ とにおいて

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{g}{\ell} \sin \theta + \varepsilon \cos \theta_i \frac{d^2\eta_x(\varepsilon^{-1}t)}{dt^2} = 0, \quad (20)$$

となる。これが本研究で主に扱う非線形波動方程式である。これは言わば、サインゴールドン系に一樣な強制振動を行った力学系と言える。以下前節と同様のダイナミック安定化理論を適用する。高速スケールを示す時間 $\tau = \varepsilon^{-1}t$ を導入し $\theta(t, x)$ を

$$\theta(t, x) = \theta_0(t, x) + \varepsilon\theta_1(t, \tau, x) + \varepsilon^2\theta_2(t, \tau, x) + \dots \quad (21)$$

のように摂動展開する。これを(20)へ代入して $O(\varepsilon^{-1})$ の項を比べると、

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \tau^2} + \ddot{\eta}_x(\tau) \cos \theta_0 = 0, \quad \dot{\theta}_1 = -\eta_x(\tau) \cos \theta_0, \quad (22)$$

となる。 $O(\varepsilon^0)$ の項からは

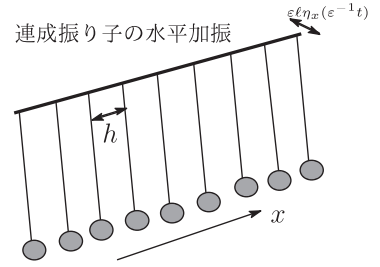
$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \tau \partial t} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \tau^2} + \frac{g}{\ell} \sin \theta_0 - \theta_1 \sin \theta_0 \ddot{\eta}_x(\tau) = 0, \quad (23)$$

を得る。(22)より $\theta_1 \ddot{\eta}_x(\tau) = -\cos \theta_0 \eta_x \ddot{\eta}_x$ なので、(9)で与えられる平均操作を上式に対して行くと、前節と同様の処理を経て

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} + \frac{g}{\ell} \sin \theta_0 - \sin \theta_0 \cos \theta_0 \langle \dot{\eta}_x^2 \rangle = 0, \quad (24)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} + \frac{d}{d\theta_0} \left\{ -\frac{g}{\ell} \cos \theta_0 + \frac{\langle \dot{\eta}_x^2 \rangle}{4} \cos 2\theta_0 \right\} = 0, \quad (25)$$

となる。これが高速水平加振された連成振り子に対する有効波動方程式となる。ちょうどダブルサインゴールドン方程式になっていることに注意しよう。上記の有効波動方程式



の進行波解を求めよう。速度を v 、 $x - vt = y$ として $\theta_0(t, x) = \Theta(x - vt) = \Theta(y)$ と置き $\cos 2\Theta = 2\cos^2 \Theta - 1$ を使うと (25) から

$$(v^2 - u^2) \frac{d^2\Theta}{dy^2} + \frac{d}{d\Theta} \left\{ -\frac{g}{\ell} \cos \Theta + \frac{\langle \dot{\eta}_x^2 \rangle}{2} \cos^2 \Theta \right\} = 0, \quad (26)$$

を得る。これは1回積分可能で、定数 E を用いて

$$\frac{v^2 - u^2}{2} \left(\frac{d\Theta}{dy} \right)^2 - \frac{g}{\ell} \cos \Theta + \frac{\langle \dot{\eta}_x^2 \rangle}{2} \cos^2 \Theta = E, \quad (27)$$

となる。ここで進行波の安定性条件 $u > v$ 、および前節で導入した分岐条件 $\langle \dot{\eta}_x^2 \rangle > \frac{g}{\ell}$ を要請して、特に

$$E = -\frac{1}{2\langle \dot{\eta}_x^2 \rangle} \left(\frac{g}{\ell} \right)^2, \quad (28)$$

とすると $\cos \Theta$ の平方完成が可能で、

$$\left(\frac{d\Theta}{dy} \right)^2 = \frac{\langle \dot{\eta}_x^2 \rangle}{u^2 - v^2} \left(\cos \Theta - \frac{g}{\langle \dot{\eta}_x^2 \rangle \ell} \right)^2, \quad (29)$$

となる。ここで $\alpha = \frac{g}{\langle \dot{\eta}_x^2 \rangle \ell}$ とすると分岐条件より $0 < \alpha < 1$ であり、上式から

$$\frac{d\Theta}{dy} = \pm \sqrt{\frac{\langle \dot{\eta}_x^2 \rangle}{u^2 - v^2}} (\cos \Theta - \alpha), \quad (30)$$

となる。±は振れ角 Θ の符号の対称性より一方だけ選んでも一般性は失わない。以後は+の方を選ぶ。これは変数分離可能であり

$$\frac{d\Theta}{\cos \Theta - \alpha} = \sqrt{\frac{\langle \dot{\eta}_x^2 \rangle}{u^2 - v^2}} dy, \quad (31)$$

となる。これを積分すると公式より

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \log \left| \frac{\sqrt{1 - \alpha^2} \sin \Theta - \alpha \cos \Theta + 1}{\cos \Theta - \alpha} \right| = \sqrt{\frac{\langle \dot{\eta}_x^2 \rangle}{u^2 - v^2}} y, \quad (32)$$

となる。ここで Y を $Y \equiv \sqrt{(1 - \alpha^2)\langle \dot{\eta}_x^2 \rangle / (u^2 - v^2)}$ y 定義すると

$$\frac{\sqrt{1 - \alpha^2} \sin \Theta - \alpha \cos \Theta + 1}{\cos \Theta - \alpha} = \pm e^Y, \quad (33)$$

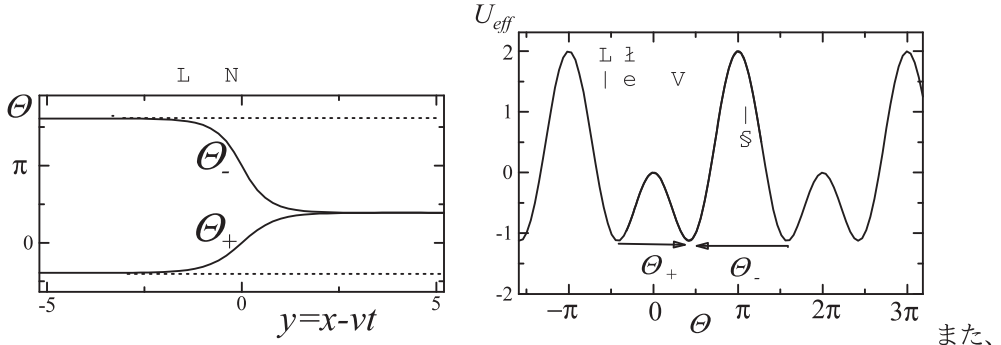
となる。これを $\tan(\Theta/2)$ についての2次方程式とみなして解くと

$$\tan \frac{\Theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}} \tanh^{\pm} \frac{Y}{2}, \text{ or } -\sqrt{\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}} \text{ (定数)}, \quad (34)$$

を得る。以上より $\Theta(y)$ は上記の定数を除き符号の応じて $\Theta_{\pm}(y)$ として

$$\Theta_{\pm}(y) = 2 \arctan \left\{ \sqrt{\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}} \tanh^{\pm} \left(\frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{2} \frac{\sqrt{\langle \dot{\eta}_x^2 \rangle}}{\sqrt{(u^2 - v^2)}} y \right) \right\}, \quad (35)$$

が導かれる。これを下図左に示した。これらはキंकを示している。 Θ_- は倒立状態を跨いで「ぐるっと回る」通常のサインゴールドン型のキंकの変形と考えられる。一方 Θ_+ は「ぐるっと回らず」に、振動によって生じた分岐した2つの安定状態をつなぐ新しいタイプのキंकと考えられる(下図右)。 Θ_+ は $y \rightarrow \pm\infty$ で $\pm \arctan \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$ に漸近している。一方 Θ_- は $y \rightarrow \pm\infty$ で $2\pi - \arctan \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$ から $-\arctan \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$ へ漸近している。



(34) の定数の解は上図左の点線に対応している。上図右において、2つのキंक Θ_{\pm} が有効ポテンシャルの安定点をつなぐ様子を示した。

4 キंक生成のシミュレーション

前節では(35)で示された新しいタイプのキंक解 $\Theta_+(y) = \Theta_+(x-vt)$ を得ることができた。これはダイナミック安定化理論に基づく有効非線形波動方程式(25)から得られたものである。本節では元の水平加振の入った方程式(20)を直接シミュレーションすることによって、このキंकの存在を確かめる。ここでは振動は以下のような調和的なものを仮定して、諸定数を

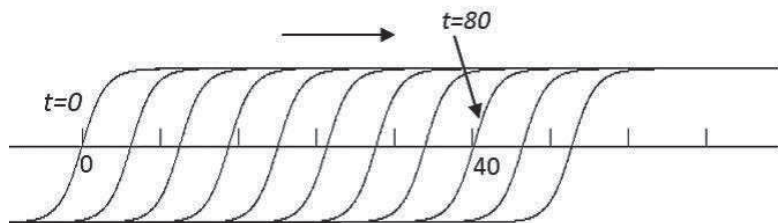
$$\eta_x(\varepsilon^{-1}t) = \cos(\varepsilon^{-1}t), \quad u = 1, \quad v = 0.5 (< u), \quad \frac{g}{\ell} = 0.2, \quad \varepsilon = 0.01, \quad (36)$$

とした。 $\langle \dot{\eta}_x^2 \rangle = 1/2$ に注意すると、 $\alpha = g/(\ell \langle \dot{\eta}_x^2 \rangle) = 0.4 < 1$ となる。これを踏まえて(35)を参考にして、かつ速度 v の進行波であることを考えて初期条件を

$$\theta(0, x) = 2 \arctan \left\{ \sqrt{\frac{1-0.2}{1+0.2}} \tanh \left(\frac{\sqrt{1-0.2^2}}{2} \frac{1}{\sqrt{2(1-0.5^2)}} x \right) \right\}, \quad (37)$$

$$\frac{\partial \theta(0, x)}{\partial t} = -v \frac{d\theta(0, x)}{dx}, \quad (38)$$

と設定した。2番目の式の微分はここでは数値的に行った。この初期条件に対して(20)のシミュレーションを行ったのが下図である $t = 0, 80$ でキंकに位置を比べるとキंकの進行変位はほぼ40なので、速度がほぼ設定どおりの0.5になっていることがわかる。誤差は初期条件に θ_1 などの高次の項を取り入れなかったことによると思われる。



5 まとめ

本稿では高速振動を加えた波動系をダイナミック安定化の立場から考えた。波動系としては連成振動子を連続化したサインゴルドン系を取り上げた。まず、1つの振動子に任意の周期的高速加振を与えた場合の有効運動方程式 (13) を導出した。特に水平加振 $\eta_x(\tau)$ の場合は、 $\langle \eta_x^2 \rangle$ が g/l を超えると、底の安定状態が不安定化して2つの安定状態に分岐することがわかった。次に連成振動子の連続極限としての非線形波動系 (サインゴルドン系) に水平方向の振動を加えた系 (20) を取り上げた。ダイナミック安定化のスキームを応用することによって、有効方程式としてダブルサインゴルドン方程式 (25) が導出された。次に (25) の進行波解として2つのタイプのキंक解 (35) を得ることが出来た。 Θ_- は「ぐるっと回る」サインゴルドン系のキंकの変形とみなせるが、 Θ_+ の方は、2つの分岐した安定状態をつなぐものとなっている。特に後者は底の状態の不安定化によって新たに生成されたキंकであると考えられる。次に、有効方程式 (25) でなく、元の波動方程式 (20) に戻って Θ_+ キंकの数値シミュレーションを行った。結果、波は一定の形を保持し、進行速度もほぼ設定通りとなった。

参考文献

- [1] A. Stephenson, 'On induced stability,' *Philosophical Magazine*, vol. 17, pp. 765-766, 1909.
- [2] P. L. Kapitza, 'Dynamic stability of a pendulum with an oscillating point of suspension,' *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, vol. 21, pp. 588-597, 1951.
- [3] H. Saito and M. Ueda, *Phys. Rev. Lett.* 90, 040403(2003).
- [4] I. Gilary, N. Moiseyev, S. Rahav, and S. Fishman, "Trapping of particles by lasers: the quantum Kapitza pendulum," *Journal of Physics A*, vol. 36, no. 25, pp. L409-L415, 2003.
- [7] Roberta Citro et al. 'Dynamical stability of a many-body Kapitza pendulum', *Annals of Physics* 360 (2015) 694-710.