BCK-代数における $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件の性質をめぐって

箕面自由学園高等学校　熊澤　昌明

Masaaki Kumazawa

Minoh Jiyuu Gakuen High School

1　準備と問題

1966 年に井関清志先生は, 論文 [1] において, BCK-代数を定義した.
まず, BCK-代数の定義とその基本的な性質を確認することから始める.

定義 1.1　定数 0 と演算 * を持つ代数 $X =< X; *, 0 >$ が BCK-代数であるとは, X の任意の元 x, y, z に対して, 次の (I)〜(V) の条件を満たすものとする.

(I)　$\{(x * y) * (x * z)\} * (z * y) = 0$,
(II)　$\{x * (x * y)\} * y = 0$,
(III)　$x * x = 0$,
(IV)　$0 * x = 0$,
(V)　$x * y = 0$ かつ $y * x = 0$　ならば　$x = y$.

このとき, 次のように BCK-代数の中に順序関係を入れる.

$x * y = 0$ であるとき, そのときに限り $x \leqq y$ とする.

次に BCK-代数における基本的な性質をあげる.

命題 1.2　BCK-代数 X の中の任意の元 x, y, z に対して, 以下のことが成り立つ.

(1)　$X =< X; \leqq >$ は $\leqq$ に関して半順序集合となる,
(2)　$x \leqq y$　ならば　$x * z \leqq y * z$ かつ $z * y \leqq z * x$,
(3)　$(x * y) * z = (x * z) * y$,
(4)　$(x * y) * (z * y) \leqq x * z$,
(5)　$x * y \leqq z$　ならば　$x * z \leqq y$,
(6)　$x * y \leqq x$,
(7)　$x * 0 = x$.

また, 1975 年に田中昭太郎先生は, 論文 [4] において, BCK-代数に次の条件 (VI) を加えた代数と同値な代数を研究した.

(VI)　$x \wedge y = y \wedge x$　ただし　$x \wedge y = y * (y * x)$

BCK-代数 X の任意の 2 元 x, y に対して, 等式 $x \wedge y = y \wedge x$ が成り立つとき, X は可換 BCK-代数と呼ばれる.

この可換 BCK-代数に対して, 次のことが成り立つ.

定理 1.3　(Tanaka [4], Iséki, Tanaka [2])　可換 BCK-代数 $X =< X; *, 0 >$ は演算 $\wedge$ に対して下半束となる.

この定理 1.3 は, 更に丁寧にいえば可換 BCK-代数 X の任意の 2 元 x, y に対して下限が存在し, その下限は $x \wedge y$ で与えられることを示している.

ここでは, この定理に示唆を受けた, 次の問題を考える.

問題　可換性を持つとは限らない BCK-代数において, どのような条件を満たせば与えられた 2 元 x, y が下限を持つのか, 更にまたどのような条件を満たせばその下限が $x \wedge y$ と一致するのか？

2　BCK-代数における $(\mathbf{I})_{x,y}$-条件とその基本的な性質

ここで, BCK-代数に新しい 1 つの条件を定義する。

$(\mathrm{I})_{x,y}$-条件　BCK-代数 X の 2 元 x, y に対して, X の元 z が存在し, 以下の (i)〜(iii) の条件を満たすとき, z は $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たすという.

(i)　$z \leqq x,\ z \leqq y,$
(ii)　$x * z \leqq x * y,$
(iii)　$y * z \leqq y * x.$

以下, X は BCK-代数とし, x, y, z は X の元とする.

まず, $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件は次の 2 つの性質を持つ.

命題 2.1　2 元 x, y に対して, z が x と y の下限であるならば, z は $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たす.

命題 2.2　可換元 $x \wedge y = y \wedge x$ は $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たす.

これらの結果により $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たすことが下限の存在と可換元の存在を拡張した 1 つの条件となっていることがわかる.

次に $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たすことを示すためによく使う条件 ii) の別の表し方を与える.

命題 2.3　不等式 $z \leqq x,\ z \leqq y.$ を満たすとき, 以下の 3 つの条件 (1)〜(3) は同値である.

(1)　$x * z \leqq x * y,$
(2)　$x * z = x * y,$
(3)　$y \wedge x \leqq z.$

ここで, $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たす元の集合を $I(x, y)$ で表し, この集合の性質について述べる.

命題 2.4　$I(x, y) \neq \phi$ ならば この集合の中に x, y の下限が存在する.

次に $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件に関する最も重要な性質を述べる. この結果は第 3 節で重要な働きをする。

命題 2.5　もし z が $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たす唯一つの元であるならば, z は x, y の下限となっている.

証明　元 z が $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たす唯一つの元であると仮定する.
x と y の下限 u が存在し, もし $u \neq z$ とすると, 命題 2.1 と命題 2.3 より

$$y \wedge x \leqq u, x \wedge y \leqq u. \tag{2.1}$$

である. 一方, z が $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たす唯一つの元であり, 更に $u \neq z$ であるので, u は $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たさない. よって, $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件の条件 (ii) は満たさないので, 次がいえる.

$$y \wedge x > u \qquad \text{or} \qquad y \wedge x \ngeqq u \qquad \text{or} \qquad y \wedge x \nleqq u, \tag{2.2}$$

更に u は $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件の条件 (iii) も満たさないので, 次もいえる,

$$x \wedge y > u \qquad \text{or} \qquad x \wedge y \ngeqq u \qquad \text{or} \qquad x \wedge y \ngeqq u. \tag{2.3}$$

ここで, (2.1) と (2.2), (2.3) は矛盾している. 従って, $u \neq z$ と仮定したことが誤りであった. 故に $u = z$ なので, z は x と y の下限である.

次に順序関係を持つ 2 元に関する性質を述べる.

命題 2.6　もし $z \leqq x$, ならば　$z = x \wedge z$ である.

命題 2.7　x, y に対して $x \wedge y = y \wedge x$ が成り立つとき, もし u が $I(x, y)$ の元でありかつ $u \neq x \wedge y$, ならば $x \wedge y < u$ である.

ここで, 集合 X に対して, 集合 X の濃度を $|X|$ とすると, 命題 2.7 より

系 2.8　x, y に対して, $x \wedge y = y \wedge x$ かつ $|I(x, y)| \geqq 2$, ならば $x \wedge y$ は集合 $I(x, y)$ の中の下限である.

補題 2.9　$x \leqq y$ であるとき, z が $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たす, ならば次の不等式が成り立つ;

$$x \wedge y \leqq z = x = y \wedge x.$$

補題 2.9 よりただちに次の命題が得られる.

命題 2.10　$x \leqq y$ のとき, $I(x, y) = \{x\}$ が成り立つ

さらに補題 2.9 の仮定に不等式 $z \leqq x \wedge y$ を追加すれば, 次の命題が得られる.

命題 2.11　不等式 $x \leqq y$ が成り立つとき, z が $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たし, かつ不等式 $z \leqq x \wedge y$ が成立するならば次が成り立つ.

$$z = x \wedge y = y \wedge x.$$

次も第 3 節で使う重要な性質である.

命題 2.12　不等式 $z \leqq x, z \leqq y$ が成り立つとき, 等式 $z \wedge x = x \wedge z$ は不等式 $z \leqq y \wedge x$ と同値である.

証明　まず $z \leqq x$ と命題 2.6 より $z = x \wedge z$ が得られる.
ここで $z \wedge x = x \wedge z$ ならば

$$z \wedge x = x \wedge z = z. \tag{2.4}$$

である. また $z \leqq y$ と命題 1.2 の (2) より $x * y \leqq x * z$ であり, この不等式に再び命題 1.2 の (2) を使えば $x * (x * z) \leqq x * (x * y)$ をとなる. よって

$$z \wedge x \leqq y \wedge x \tag{2.5}$$

である. 従って (2.4) と (2.5) より $z \leqq y \wedge x$ を得る.

逆に, $z \leqq x$ と命題 2.6 より

$$z = x \wedge z. \tag{2.6}$$

ここで命題 1.2 の (3) より

$$\begin{aligned}(z \wedge x) * z &= \{x * (x * z)\} * z \\ &= (x * z) * (x * z) \\ &= 0\end{aligned}$$

従って, この等式と (2.6) より

$$z \wedge x \leqq z = x \wedge z. \tag{2.7}$$

である. $z \leqq y$ となる任意の y に対して, 仮定 $z \leqq y \wedge x$ より次を得る.

$$z * (y \wedge x) = 0.$$

ここで, もし $y = z$ とするならば $z * (z \wedge x) = 0$ なので, この等式と (2.6) から次が導かれる.

$$x \wedge z = z \leqq z \wedge x. \tag{2.8}$$

故に (2.7) と (2.8) から $x \wedge z = z \wedge x$ を得る. よって命題 2.12 は示された.

命題 2,3 と命題 2.12 から次の定理を得る. この定理は BCK-代数の 2 元が可換であるための一つの特徴づけを与える.

定理 2.13　2 元 x と y が可換であるとき, そのときに限り $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たす z が存在し, $x \wedge z = z \wedge x$ かつ $y \wedge z = z \wedge y$ を満たしている.

2 元の可換性を $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件のみで特徴づけたいが, 今は定理 2.13 が最良の結果である.

3　(I)-条件を持つ BCK 代数と下半束

命題 1.2 の (1) からわかるように, BCK-代数は順序関係 $\leqq$ に関して半順序集合である. 従って, BCK-代数において順序関係 $\leqq$ を BCK-順序と呼んでいる. そこで次のような定義が与えられる.

定義 3.1　BCK-代数 X が BCK-順序 $\leqq$ に関して下半束であるとき, X を BCK-下半束という.

ここでは更に $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を用いることによって, BCK-下半束のクラスをより詳しく分類する. 以下 BCK-代数を X とし, x, y, z を X の元とする.

定義 3.2　X の元 z が $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たす唯一つの元であるとき, z は単一 $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たすという.

定義 3.3　X の元 z が以下の 2 つの条件を i), ii) 満たすものとする.

i)　z が 2 元 x, y に対して単一 $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たす.

ii)　$z = x \wedge y = y \wedge x$

このとき, z は標準 $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たすという.

更に, 定義 3.2 と定義 3.3 より, BCK-代数の中の特別なクラスを, 次のように定義する.

まず X は BCK-代数とする.

定義 3.4　X の任意の 2 元 x, y に対して, 標準 $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たす元 z が存在するとき, BCK-代数 X を標準 (I)-条件を持つ BCK-代数という.

定義 3.5　X の任意の 2 元 x, y に対して, 単一 $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件満たす元 z が存在するとき, BCK-代数 X を (I)-条件を持つ BCK-代数という. このとき x, y に対して元 z は唯 1 つ定まるので z を $x \times y$ と表すことにする. すなわち $z = x \times y = y \times x$ と表すこととする.

まず, 標準 (I)-条件を持つ BCK-代数を特徴づけを与える.

定理 3.6　BCK-代数が可換となる条件は, BCK-代数が標準 (I)-条件を持つ条件と同値である.

証明　X を可換 BCK-代数とする.
X の任意の 2 元 x, y に対して, 積 z は明らかに次の条件 ii) を満たす.

$$z = x \wedge y = y \wedge x. \tag{3.1}$$

更に, もし X の元 u が $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たすと仮定すると, 命題 2.3 より次の不等式を得る.

$$y \wedge x \leqq u, \ x \wedge y \leqq u. \tag{3.2}$$

ここで, X は可換 BCK-代数であるので, $x \wedge u = u \wedge x, \ y \wedge u = u \wedge y$ であり, 命題 2.12 より次の不等式を得る.

$$u \leqq y \wedge x, \ u \leqq x \wedge y. \tag{3.3}$$

よって, (3.2), (3.3) より 次が得られる.

$$u = y \wedge x = x \wedge y. \tag{3.4}$$

従って, (3.1), (3.4) より $u = z$ を得る. すなわち $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たす元は z 唯一つであることがわかるので条件 i) を得る. 逆は明らかなので, よって定理 3.6 は証明された.

定理 3.7　BCK-代数が演算 $\wedge$ に関して下半束となる条件は, BCK-代数が標準 (I)-条件を持つことと同値である.

証明　$X =< X; \wedge, 0 >$ を演算 $\wedge$ に関する下半束とする.
条件 ii)　$x \wedge y = y \wedge x$　は演算 $\wedge$ に関して X が下半束なので明らかである. 次に X の任意の 2 元 x, y に対して, 命題 2.1 より下限 $x \wedge y$ は $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たす. 今, もし $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たす任意の元 u が存在したとすると, 命題 2.3 の (3) より次がわかる.

$$x \wedge y \leqq u. \tag{3.5}$$

X は演算 $\wedge$ に関して下半束であり, 更に $u \leqq x$ を満たすので次を得る.

$$u = u \wedge x = x \wedge u. \tag{3.6}$$

ここで, この (3.6) と命題 2.12 と X が下半束であることより次が得られる.

$$u \leqq y \wedge x = x \wedge y. \tag{3.7}$$

従って, (3.5) と (3.7) より $u = x \wedge y$ となり $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たす元は唯一つ u のみであり条件 i) は示された.
逆に, X が標準 (I)-条件を持つ BCK-代数とする.
X の任意の 2 元 x, y に対して, X の元 z が存在し, その元は定義 3.2 の条件 i), ii) を満たす. このとき, 命題 2.5 より $z = x \wedge y = y \wedge x$ は x と y の下限であることがわかる. よって定理 3.7 は証明された.

この定理 3.6 と定理 3.7 より田中の定理 (定理 1.3) とその逆が成立することがわかる.

次に, (I)-条件を持つ BCK-代数の特徴づけを与える.

定理 3.8　BCK-代数が演算 $\times$ に関して下半束となる条件は, BCK-代数が (I)-条件を持つことと同値である.

証明　$X =< X; \times, 0 >$ が演算 $\times$ に関して下半束とする.
X の任意の 2 元 x, y に対して, x と y の下限が存在する. その元は $x \times y$ と表せ, 仮定より $x \times y$ は $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たす唯 1 つの元である.
逆に, X を (I)-条件を持つす BCK-代数とする.
X の任意の 2 元 x, y に対して, X の元 z が存在し, その元 z は $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たす唯 1 つの元である. 命題 2.5 より, この元 z は x と y の下限であることがわかり, $z = x \times y$ と定めれば X は演算 $\times$ に関して下半束となる. これで, 定理 3.8 は証明された.

最後にいくつか注意を述べる.

(I)-条件を持つ BCK-代数と可換 BCK-代数はどちらも下半束であるが, (I)-条件を持つ BCK-代数の方は可換 BCK-代数より真に大きいクラスである. 具体的には, 同じハッセ図式を持つ 4 元からなる BCK-代数でもそのような例は存在する. なお, (I)-条件を持つ BCK-代数が BCK-代数全体の中で下半束となる最大のクラスであるかどうかはわかっていない.

更に, この報告だけでは BCK-代数の任意の 2 元 x, y に対して $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たす元が必ず存在するように思われるかもしれないが, それは正しくない. そうでない例が知られている (例えば, 論文 [5]).

なお、BCK-代数に関する基本的な知識を得るには論文 [2] を参照してください. 命題 1.2 の証明もあります.

この報告の第 2 節, 第 3 節に関する証明に興味がある方は論文 [3] を参照してください.

謝辞　鳴門教育大学, 成川公昭教授には, ご専門の分野でないにもかかわらず, 内容をお聞きいただき, 有意義なご助言をいただきました. これに感謝し, ここにお礼を申し上げます.

This work was supported by Research Institute For Mathematical Sciences, an International Join Usage/Research Center located in Kyoto University.

参考文献

[1] K. Is'eki, An Algebra Related with a Propositional Calculus, Proc. Japan Acad.,**42**(1966), 26-29.

[2] K. Is'eki, S. Tanaka, Introduction to the theory of BCK-algebras, Math. Japonica., **23** (1978), 1-26.

[3] M. Kumazawa, A New Class in BCK-Algebras, Preprint

[4] S. Tanaka, A New Class of Algebra, Math. Seminar Notes Kobe University, **3** (1975), 37-43.

[5] A. Wro'nski, BCK-Algebra do not from a Variety, Math. Japonica., **28**(1983), 211-213.