ラプラス近似とその応用

広島大学理学研究科 若木 宏文
Hirofumi Wakaki
Graduate School of Science, Hiroshima University

1 はじめに

母集団分布が連続型であり, その分布関数が $F(x)$ であるとする. この母集団からの標本数 n の標本の第 k 順序統計量を $X_{(k)}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ とする. このとき U を自由度 $k, n-k+1$ のベータ分布に従う確率変数とすると

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_{(k)} \le x) = \mathrm{P}(U \le F(x)) &= \frac{1}{B(k,n-k+1)}\int_0^{F(x)} u^{k-1}(1-u)^{n-k}du \\ &= \frac{1}{\mathrm{B}(k,n-k+1)}\int_0^{F(x)} e^{Mb(u)}du \qquad (1.1)\end{aligned}$$

と表される. ここで, $\mathrm{B}(x,y)$ はベータ関数, $M=n-1$, $b(u)=r\log u+(1-r)\log(1-u)$, $r=(k-1)/M$ である.

$0<\alpha<1$ に対して, $k=[n\alpha]$, すなわち $k \le n\alpha < k+1$ となる整数とするとき, $X_{([n\alpha])}$ を標本分位点と呼ぶ. $X_{([n\alpha])}$ は母集団分布の $100\alpha\%$ 点, $F^{-1}(\alpha)$ の推定量として用いられるが, (1.1) の積分にラプラス近似を適用することにより, 標本分位点の一致性や漸近正規性を示すことができる. RIMS 研究集会では, 複数の順序統計量の同時分布の極限分布を導出し, それを用いた $F^{-1}(\alpha)$ の信頼区間などを紹介したが, 本稿ではその基となる, (1.1) のラプラス近似について詳しく説明する.

2 ラプラス近似

2.1 ラプラス近似とは

ラプラス近似は, 積分

$$I = \int_a^b e^{Mf(x)}g(x)dx$$

の M が大きいときの近似方法である. $f(x)$ が区間 $[a,b]$ の内点 c で最大になるならば c の近傍で

$$f(x) \approx f(c) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2$$

であるから

$$I \approx e^{Mf(c)}\int_a^b \exp\Bigl\{\frac{1}{2}Mf''(c)(x-c)^2\Bigr\}g(x)dx$$

と近似できる. $f''(c) \leq 0$ であるが, $f''(c) < 0$ ならば $y = \sqrt{-Mf''(c)}(x-c)$ と変数変換することにより

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \exp\Big\{\frac{1}{2}Mf''(c)(x-c)^2\Big\}g(x)dx \\
&\quad = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-Mf''(c)}}\int_{c-\sqrt{-Mf''(c)}(c-a)}^{c+\sqrt{-Mf''(c)}(b-c)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}g\Big(c+\frac{y}{\sqrt{-Mf''(c)}}\Big)dy \\
&\quad \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-Mf''(c)}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}g\Big(c+\frac{y}{\sqrt{-Mf''(c)}}\Big)dy
\end{aligned}$$

と近似できる. 従って, Y を標準正規分布に従う確率変数とすると

$$I \approx \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-Mf''(c)}}\mathrm{E}\Big[g\Big(c+\frac{Y}{\sqrt{-Mf''(c)}}\Big)\Big]$$

と近似できる. g が点 c の近傍で C^1-級なら, さらに

$$I \approx \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-Mf''(c)}}g(c)$$

が得られる.

2.2 近似誤差の評価

区間 $[a,b]$ の定義関数

$$1_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & (x \in [a,b]) \\ 0 & (x \notin [a,b]) \end{cases}$$

を用いると

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{Mf(x)}g(x)1_{[a,b]}(x)dx$$

であるから, 以下では, 一般性を失うことなく

$$I_M(g;f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{Mf(x)}g(x)dx$$

の近似を扱う.

関数 f, g について以下を仮定する.

A1. ${}^{\exists}m, M \geq m \Rightarrow I_M(|g|;f) < \infty$

A2. $f(x)$ は $x = c$ で最大値をとり, 任意の $d > 0$ に対して

$$f_d := \sup\{f(x);\ |c-x| \geq d\} < f(c)$$

A3. f は c のある近傍 U_c で C^s-級である. ただし, $s \geq 3$.

C^s-級関数 h の $\ell - 1$ $(1 \leq \ell \leq s)$ 次までのテーラー展開を

$$h(x+c) = \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{h^{(k)}(c)}{k!} x^k + x^\ell r_\ell(x; h, c)$$

と表し,

$$R_\ell(d, h, c) = \max\{r_\ell(x; h, c);\ -d \leq x \leq d\}$$

とすると

$$\lim_{x \to 0} r_\ell(x; h, c) = \frac{h^{(\ell)}(c)}{\ell!}, \quad \lim_{d \to 0} R_\ell(d, g, c) = \frac{|h^{(\ell)}(c)|}{\ell!}$$

である.

$(d-c, d+c) \subset U_c$ とすると

$$\begin{aligned}
&\int_{c-d}^{c+d} e^{Mf(x)} g(x) dx \\
&= \int_{c-d}^{c+d} \exp\Big[M\{f(c) + \frac{f''(c)}{2}(c-c)^2 + (x-c)^3 r_3(x-c; f, c)\}\Big] g(x) dx \\
&= \frac{e^{Mf(c)}}{M^{1/2}\sigma} \int_{-M^{1/2}\sigma d}^{M^{1/2}\sigma d} e^{-y^2/2} g\Big(c + \frac{y}{M^{1/2}\sigma}\Big) \Bigg[1 + \frac{1}{M^{1/2}}\Big(\frac{y}{\sigma}\Big)^3 r_3\Big(\frac{y}{M^{1/2}\sigma}; f, c\Big) \\
&\qquad\qquad \times r_1\Big[\frac{1}{M^{1/2}}\Big(\frac{y}{\sigma}\Big)^3 r_3\Big(\frac{y}{M^{1/2}\sigma}; f, c\Big); \exp, 0\Big]\Bigg] dy \qquad (2.1) \\
&= \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma} \Bigg\{\int_{-M^{1/2}\sigma d}^{M^{1/2}\sigma d} \phi(y) g\Big(c + \frac{y}{M^{1/2}\sigma}\Big) dy + \mathrm{Rem}_1\Bigg\} \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

と表される. ここで, $\sigma = \{-f''(c)\}^{1/2}$ (A2 より $f''(c) < 0$), $\phi(y)$ は標準正規分布の確率密度関数,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rem}_1 = \frac{1}{M^{1/2}} \int_{-M^{1/2}\sigma d}^{M^{1/2}\sigma d} \phi(y) g\Big(c + \frac{y}{M^{1/2}\sigma}\Big) \Big(\frac{y}{\sigma}\Big)^3 r_3\Big(\frac{y}{M^{1/2}\sigma}; f, c\Big) \\
\times r_1\Big[\frac{1}{M^{1/2}}\Big(\frac{y}{\sigma}\Big)^3 r_3\Big(\frac{y}{M^{1/2}\sigma}; f, c\Big); \exp, 0\Big] dy
\end{aligned}$$

である.

$$|r_1(x; \exp, 0)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{k-1}}{k!} \leq e^{|x|}$$

より, $-M^{1/2}\sigma d \leq y \leq M^{1/2}\sigma d$ ならば

$$r_1\Big[\frac{1}{M^{1/2}}\Big(\frac{y}{\sigma}\Big)^3 r_3\Big(\frac{y}{M^{1/2}\sigma}; f, c\Big); \exp, 0\Big] \leq \exp\Big\{y^2 \frac{d}{\sigma^2} R_3(d, f, c)\Big\}$$

であるから, 必要なら d を小さくして

$$\rho_{d,f,c} := \frac{1}{2} - \frac{d}{\sigma^2} R_3(d,f,c) > 0$$

となるようにとれば

$$\begin{aligned}|\mathrm{Rem}_1| &\le \frac{1}{M^{1/2}} \frac{R_0(d,g,c) R_3(d,f,c)}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\rho_{d,f,c} y^2} |y|^3 dy \\ &= \frac{1}{M^{1/2}} \frac{R_0(d,g,c) R_3(d,f,c)}{\sqrt{2\pi}\sigma^3 \rho_{d,f,c}^2} \end{aligned} \tag{2.3}$$

が成り立つ. ただし,

$$R_0(d,g,c) = \sup\{g(x);\ c-d \le x \le c+d\}$$

である.

一方, A1 より

$$\begin{aligned}\left|\int_{[c-d,c+d]^c} e^{Mf(x)} g(x) dx\right| &= \left|\int_{[c-d,c+d]^c} e^{(M-m)f(x)} e^{mf(x)} g(x) dx\right| \\ &\le e^{(M-m)f_d} \int_{-\infty}^{\infty} e^{mf(x)} |g(x)| dx \\ &= \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma} \frac{M^{1/2}\sigma}{e^{M\{f(c)-f_d\}} e^{mf_d} \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{mf(x)} |g(x)| dx \end{aligned} \tag{2.4}$$

であるから, $Y \sim N(0,1)$ とすると

$$I_M(g;f) = \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma} \left\{ \mathrm{E}\Big[g\Big(c + \frac{Y}{M^{1/2}\sigma}\Big) 1_{[-d,\ d]}\Big(\frac{Y}{M^{1/2}\sigma}\Big)\Big] + O(M^{-1/2}) \right\} \tag{2.5}$$

が成り立つ.

以下, g は $(c-d, c+d)$ で C^1-級と仮定する. $|y| \le dM^{1/2}\sigma$ のとき

$$g\Big(c + \frac{y}{M^{1/2}\sigma}\Big) = g(c) + \frac{y}{M^{1/2}\sigma} r_1\Big(\frac{y}{M^{1/2}\sigma}; g, c\Big)$$

より

$$\begin{aligned}&\left| g(c) - \mathrm{E}\Big[g\Big(c + \frac{Y}{M^{1/2}\sigma}\Big) 1_{[-d,\ d]}\Big(\frac{Y}{M^{1/2}\sigma}\Big)\Big] \right| \\ &\qquad \le \frac{R_1(d,g,c)}{M^{1/2}\sigma} \mathrm{E}[|Y|] + |g(c)| \mathrm{P}(|Y| > M^{1/2}\sigma d) \end{aligned} \tag{2.6}$$

であり, 従って (2.2), (2.3), (2.4), (2.6) より

$$I_M(g;f) = \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma} \Big\{ g(c) + O(M^{-1/2}) \Big\}$$

が成り立つ.

$(c-d, c+d) \subset [a,b]$ ならば, $g(x)1_{[a,b]}(x)$ も $(c-d,c+d)$ で C^1-級であるから

$$\int_a^b e^{Mf(x)} g(x)dx = I_M(g(x)1_{[a,b]}(x); f) = \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma}\Big\{g(c) + O(M^{-1/2})\Big\}$$

である.

$b = c + M^{-1/2}z$ のとき, $a < c - d$ ならば (2.6) より

$$\begin{aligned}\int_a^{c+M^{-1/2}z} e^{Mf(x)} g(x)dx &= I_M\big(g(x)1_{[a,c+M^{-1/2}z]}(x); f\big)\\ &= \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma}\left\{\mathrm{E}\Big[g\Big(c + \frac{Y}{M^{1/2}\sigma}\Big)1_{(-M^{1/2}\sigma d,\, \sigma z]}(Y)\Big] + O(M^{-1/2})\right\}\end{aligned}$$

であるから,

$$\int_a^{c+M^{-1/2}z} e^{Mf(x)} g(x)dx = \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma}\Big\{g(c)\Phi(\sigma z) + O(M^{-1/2})\Big\}$$

が成り立つ. ここで, Φ は標準正規分布の分布関数である. 特に $z = 0$ とすると,

$$\int_a^c e^{Mf(x)} gx = \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma}\Big\{\frac{1}{2}g(c) + O(M^{-1/2})\Big\}$$

となるが, $z < 0$, すなわち $f(x)$ の最大化点 c が積分区間の外側にある場合でも, ラプラス近似が利用できることがわかる. 同様に積分区間の下端が $M^{-1/2}$ のオーダーで c に近づくとき, $c < b$ ならば

$$\int_{c+M^{-1/2}z}^b e^{Mf(x)} g(x)dx = \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma}\Big\{g(c)\Phi(-\sigma z) + O(M^{-1/2})\Big\}$$

が成り立つ.

2.3 漸近展開

前述の仮定 A3 において, $s \geq 4$ とし, さらに次を仮定する.

A4. g は近傍 U_c で C^{s-1}-級である.

一般に,

$$r_k(x; h, c) = \frac{h^{(k)}(c)}{k!} + x\, r_{k+1}(x; h, c)$$

であるから, (2.1) を展開することにより

$$\int_{c-d}^{c+d} e^{Mf(x)} g(x)dx$$

$$= \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma}\Big\{\int_{-M^{1/2}\sigma d}^{M^{1/2}\sigma d}\phi(y)\Big[g(c)+\frac{1}{M^{1/2}}\Big\{g'(c)\frac{y}{\sigma}+\frac{g(c)f^{(3)}(c)}{3!}\Big(\frac{y}{\sigma}\Big)^3\Big\}\Big]dy+\mathrm{Rem}_2\Big\}, \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Rem}_2 = \frac{1}{M}\int_{-M^{1/2}\sigma d}^{M^{1/2}\sigma d}\phi(y)\Big[&\Big(\frac{y}{\sigma}\Big)^2 r_2\Big(\frac{y}{M^{1/2}\sigma};g,c\Big)+\frac{f^{(3)}(c)}{3!}\Big(\frac{y}{M^{1/2}\sigma}\Big)^4 r_1\Big(\frac{y}{M^{1/2}\sigma};g,c\Big)\\&+g\Big(c+\frac{y}{M^{1/2}\sigma}\Big)\Big\{\Big(\frac{y}{\sigma}\Big)^4 r_4\Big(\frac{y}{M^{1/2}\sigma};f,c\Big)\\&+\Big(\frac{y}{\sigma}\Big)^6\Big\{r_3\Big(\frac{y}{M^{1/2}\sigma};f,c\Big)\Big\}^2 r_2\Big(\Big(\frac{y}{M^{1/2}\sigma}\Big)^3 r_3\Big(\frac{y}{M^{1/2}\sigma};f,c\Big);\exp,0\Big)\Big\}\Big]dy\end{aligned}$$

と表される. $|r_2(x;\exp,0)|=|(e^x-1-x^2)/x^2|\le e^{|x|}/2$ であるから 2.2 節と同様に上から評価すると

$$\begin{aligned}|\mathrm{Rem}_2| &\le \frac{1}{M}\Big[\frac{R_2(d,g,c)}{\sigma^2}\mathrm{E}[Y^2]+\Big\{\frac{|f^{(3)}(c)|R_1(d,g,c)}{3!\sigma^4}+\frac{R_0(d,g,c)}{\sigma^4}\Big\}\mathrm{E}[Y^4]\\&\qquad+\frac{\{R_3(d,f,c)\}^2}{2\sigma^6}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\rho_{d,f,c}y^2}|y|^6dy\Big]\\&=\frac{1}{M}\Big[\frac{R_2(d,g,c)}{\sigma^2}+\frac{|f^{(3)}(c)|R_1(d,g,c)+6R_0(d,g,c)}{2\sigma^4}+\frac{15\{R_3(d,f,c)\}^2}{16\sigma^6\rho_{d,f,c}^{7/2}}\Big]\end{aligned} \tag{2.8}$$

が得られる.

$$\int_z^\infty \phi(y)ydy = \big[-\phi(y)\big]_z^\infty = \phi(z), \tag{2.9}$$

$$\int_z^\infty \phi(y)y^3dy = \big[-\phi(y)y^2\big]_z^\infty + 2\int_z^\infty \phi(y)ydy = \phi(z)\{z^2+2\} \tag{2.10}$$

であるから

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{|y|>M^{1/2}\sigma d}\phi(y)\Big[g(c)+\frac{1}{M^{1/2}}\Big\{g'(c)\frac{y}{\sigma}+\frac{g(c)f^{(3)}(c)}{3!}\Big(\frac{y}{\sigma}\Big)^3\Big\}\Big]dy\Big|\\&\quad\le 2|g(c)|\Phi(-M^{1/2}\sigma d)+\frac{\phi(M^{1/2}\sigma d)}{M^{1/2}}\Big\{\frac{|g'(c))}{\sigma}+\frac{|g(c)f^{(3)}(c)|}{3!\sigma^3}(2M\sigma^2d^2+2)\Big\}\end{aligned} \tag{2.11}$$

が成り立つ. 従って, (2.7),(2.4), (2.8), (2.11) より $-\infty\le a<c<b\le\infty$ ならば 2.2 節と同様に

$$\int_a^b e^{Mf(x)}g(x)dx = \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma}\{g(c)+O(M^{-1})\}$$

であることがわかる.

また, (2.7) 式において, $g(x)$ を $g(x)1_{[a,\,c+M^{-1/2}z]}(x)$, $g(x)1_{[a+M^{-1/2}z,\,b]}(x)$ で置き換えれば, (2.9), (2.10) を用いて

$$\int_a^{c+M^{-1/2}z} e^{Mf(x)}g(x)dx$$
$$= \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma}\Big[g(c)\Phi(\sigma z) - \frac{\phi(\sigma z)}{M^{1/2}}\Big\{\frac{g'(c)}{\sigma} + \frac{g(c)f^{(3)}(c)}{3!\sigma^3}(z^2\sigma^2+2)\Big\} + O(M^{-1})\Big], \tag{2.12}$$

$$\int_{c+M^{-1/2}z}^{b} e^{Mf(x)}g(x)dx$$
$$= \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma}\Big[g(c)\Phi(-\sigma z) + \frac{\phi(\sigma z)}{M^{1/2}}\Big\{\frac{g'(c)}{\sigma} + \frac{g(c)f^{(3)}(c)}{3!\sigma^3}(z^2\sigma^2+2)\Big\} + O(M^{-1})\Big] \tag{2.13}$$

のように展開できることがわかる．なお, $O(M^{-1})$ と表した剰余項は, (2.4), (2.8), (2.11) の合計であり, $g(x)$ を $g(x)1_{[a,\,c+M^{-1/2}z]}(x)$, $g(x)1_{[a+M^{-1/2}z,\,b]}(x)$ で置き換えても増加することはない．したがって, $O(M^{-1})$ は a, z について一様なオーダー評価であり, z は M に依存していても (2.12), (2.13) は成立する．特に $z_M = M^{1/2}(b-c)$ を (2.12) に代入すると

$$\int_a^b e^{Mf(x)}g(x)dx$$
$$= \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma}\Big[g(c)\Phi(\sigma z_M) - \frac{\phi(\sigma z_M)}{M^{1/2}}\Big\{\frac{g'(c)}{\sigma} + \frac{g(c)f^{(3)}(c)}{3!\sigma^3}(z_M^2\sigma^2+2)\Big\} + O(M^{-1})\Big] \tag{2.14}$$

と書くこともできる．

3　標本分位点の漸近性質

3.1　一致性

(1.1) において, $b(u)$ は $u = r = (k-1)/M$ で最大となる．

$$z_M(x) = \sigma_b M^{1/2}\{F(x) - r\}, \tag{3.1}$$
$$\sigma_b = \sqrt{-b''(r)} = \{r(1-r)\}^{-1/2}$$

とおくと (2.14) より

$$\int_0^{F(x)} e^{Mb(u)}du = \frac{e^{Mb(c)}\sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma_b}\Big[\Phi(z_M(x)) - \frac{\phi(z_M(x))}{M^{1/2}}\Big\{\frac{b^{(3)}(c)}{3!\sigma_b^3}((z_M(x))^2+2)\Big\} + O(M^{-1})\Big]$$

が成り立つ．また,

$$\mathrm{B}(k, n-k+1) = \int_0^1 e^{Mb(u)}du$$

であるから,

$$\mathrm{B}(k, n-k+1) = \frac{e^{Mb(c)}\sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma_b}\{1 + O(M^{-1})\}$$

である. したがって,

$$\mathrm{P}(X_{([n\alpha])}) \le x) = \Phi(z_M(x)) - \frac{\phi(z_M(x))}{M^{1/2}}\Big\{\frac{b^{(3)}(c)}{3!\sigma_b^3}((z_M(x))^2 + 2)\Big\} + O(M^{-1}) \qquad (3.2)$$

が成り立つ.

$M \to \infty$ のとき, $r \to \alpha$, $\sigma_b \to \{\alpha(1-\alpha)\}^{-1/2}$ であるから

$$\lim_{M\to\infty} z_M(x) = \begin{cases} \infty & (F(x) > \alpha) \\ -\infty & (F(x) < \alpha) \end{cases}$$

となる. したがって, 母集団分布のサポートにおいて $F(x)$ が狭義の単調増加関数ならば

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(X_{([n\alpha])} \le x) = \begin{cases} 1 & (x > F^{-1}(\alpha)) \\ 0 & (x < F^{-1}(\alpha)) \end{cases}$$

であるから, $X_{([n\alpha])}$ は $F^{-1}(\alpha)$ の一致推定量である.

3.2 漸近正規性

母集団分布関数 $F(x)$ は C^1-級と仮定し, 確率密度関数を $f(x)$ とする.

$$Z_n = M^{1/2}\sigma_b(X_{([n\alpha])} - F^{-1}(\alpha))$$

とおくと

$$\mathrm{P}(Z_n \le z) = \mathrm{P}\Big(X_{([n\alpha])} \le F^{-1}(\alpha) + \frac{z}{M^{1/2}\sigma_b}\Big)$$

である. (3.1) において, $x = F^{-1}(\alpha) + M^{-1/2}\sigma_b^{-1}z$ を代入すると

$$z_M\Big(F^{-1}(\alpha) + \frac{z}{M^{1/2}\sigma_b}\Big) = f(F^{-1}(\alpha))z + O(M^{-1/2})$$

であるから, (3.2) より $\mathrm{P}(Z_n \le z) = \Phi\big(f(F^{-1}(\alpha))z\big) + O(M^{-1/2})$ となり,

$$Z_n \xrightarrow{d} N\Big[0, \frac{1}{\{f(F^{-1}(\alpha))\}^2}\Big] \quad (n \to \infty)$$

である.

4 おわりに

確率分布の近似方法として, ラプラス近似は有力な手法のひとつである. 標本分位点以外にも様々な統計量の分布の近似に応用できるが, 最も有名な応用は標本平均の密度関数の鞍点近似であろう. X を連続型確率変数とし, 積率母関数

$$M(t) = e^{K(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f(x)dx$$

が t の適当な区間 J 内で存在するとする. ここで, f は X の確率密度関数である. $X_1, \ldots, X_n$ を互いに独立に X と同じ分布に従う確率変数とするとき, 標本平均 $\bar{X} = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} X_j$ の確率密度関数は $\tau \in J$ を用いて

$$f_{\bar{X}}(x) = \frac{ne^{n\{K(\tau)-\tau x\}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{n\{K(\tau+is) - K(\tau) - isx\}\}dx$$

と表すことができる. ここで i は虚数単位である. $K'(\tau_0) = x$ を満たす $\tau_0 \in J$ が存在するとき, $K(\tau_0+is) - K(\tau_0) - isx$ は $s = 0$ で最大となりラプラス近似を適用することによって

$$f_{\bar{X}}(x) = \frac{ne^{n\{K(\tau_0)-\tau_0 x\}}}{2\pi}\left\{1 + O(n^{-1})\right\}$$

が得られる. 標本平均の分布の近似として中心極限定理を用いた場合, x が平均値から離れると近似精度は悪くなるが, 鞍点近似では x が平均値から離れていても近似精度が良いことが知られている. 詳しくは Lugannani and Rice (1980) を参照されたい.

標本平均でなくても, 積率母関数が陽に書ける場合には適切な漸近枠組みの下で, 鞍点近似を適用することができる. 例えば, MANOVA における尤度比検定統計量の帰無分布は Wilks のラムダ分布として知られているが, その積率母関数は ガンマ関数の積と商として表される. Srivastaba and Yau (1989) は Wilks のラムダ分布に対する鞍点近似公式を導出している.

参考文献

[1] Srivastava, M. S. and Wai Kwok Yau (1989), “Saddlepoint Method for Obtaining Tail Probability of Wilks’ Likelihood Ratio Test, JMA 31, 117-126.

[2] Lugannani, R., and Rice, S. (1980), Saddlepoint approximation for the distribution of the sum of independent random variables. Adv. in Appl. Probab. 12, 475-490.