Non-semiregular Auslander-Reiten components of an artin algebra

明海大学　古谷貴彦
明海大学　山内雅司

概 要

アルティン多元環のアウスランダー・ライテンクイバーにおける弱区分的道 ([F]) を用いて，弱区分的集合とよばれる道の集合を導入する。このとき，アウスランダー・ライテンクイバーの矢に付随して得られる弱区分的集合のある種の組が存在しないことを示す。

1　Introduction

K を可換アルティン環とし，A を K 上のアルティン多元環とする ([ARS])。有限生成右 A-加群の成す圏を $\operatorname{mod} A$ で表し，$\operatorname{mod} A$ におけるアウスランダー・ライテン移動を τ で表す。また，A のアウスランダー・ライテンクイバーを Γ_A で表す。$\operatorname{mod} A$ における直既約加群 X に対して，X を含む Γ_A の頂点，すなわち X を含む同型類と X を同一視する。$\operatorname{mod} A$ の連結成分を A のアウスランダーライテン成分，あるいは単に成分とよぶ。

$\mathcal{C}$ を A の成分とする。$\mathcal{C}$ が正則成分であるとは，$\mathcal{C}$ の任意の直既約加群 X について，常に $\tau^i X \neq 0$ $(i \in \mathbb{Z})$ であるときを言う。一方で，A の成分が準正則成分であるとは，それが射影加群を含まないか，または，入射加群を含まないときを言う ([L2])。

これまでに，アルティン多元環の正則成分の研究は活発になされてきた (例えば [L3] を参照)。しかしながら準正則成分の研究は少ない ([L2])。本報告集では準正則成分のある道の集合の非存在性をを考察することを目的とする。

Γ_A における矢 $X \to Y$ に対し，その評価 (valuation) を (d_{XY}, d'_{XY}) で表す。$n \geq 2$ を正の整数とし，

$$\Omega = (X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_n)$$

を Γ_A における道とする。このとき，集合 J_Ω を

$$J_\Omega = \{j \mid j \text{ is a hook of } \Omega, \text{ and } d_{X_j X_{j+1}} = 1\}$$

で定める。

[F] では，[L1] の準区分的道 (pre-sectional path) を一般化する次の道を導入した:

Definition 1.1 ([F]). $n \geq 3$ を正の整数とし，

$$\Omega = (X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_n)$$

を Γ_A における道とする。Γ_A が弱区分的道 (weakly sectional path) であるとは，$\operatorname{mod} A$ のある直既約加群の集合 $\{M_j\}_{j \in J_\Omega}$ が存在して，次の (1), (2), (3) が成り立つときを言う:

(1) $j+2 \notin J_\Omega$ である任意の $j \in J_\Omega$ に対して，$X_j \oplus M_j \oplus \tau X_{j+2}$ は X_{j+1} の右概分裂写像の定義域における直和因子。（ここで，$n \in J_\Omega$ のとき，τX_{n+1} は 0 と定める。）

(2) $j+2 \in J_\Omega$ である任意の $j \in J_\Omega$ に対して，$X_j \oplus M_j \oplus \tau X_{j+2} \oplus \tau M_{j+2}$ は X_{j+1} の右概分裂写像の定義域における直和因子。

(3) $j+2 \notin J_\Omega$ である任意の j $(1 \leq j \leq n)$ に対して，$X_j \oplus \tau X_{j+2} \oplus \tau M_{j+2}$ は X_{j+1} の右概分裂写像の定義域における直和因子。

[F] において，一般的に弱区分的道はサイクルにならないことが示されている。また，既約写像と弱区分的道の関連性が研究されている。この報告集では，弱区分的道のある集合を導入し，その組が存在しない状況を考察する。

次の 2 つの結果は主結果を証明する際に用いられる:

Lemma 1.2. $n \geq 2$ を正の整数とし，

$$\varOmega = (X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow X_n)$$

を $\varGamma_A$ における弱区分的道とする。

(1) $f : Z \to X_n$ を既約写像で，かつ単射とする。また，$Z \neq X_{n-1}$ とする。このとき，各直既約加群 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ は射影加群ではない。また，$J_\varOmega$ に属する各加群は射影加群ではない。

(2) $g : X_1 \to U$ を既約写像で，かつ単射とする。また，$Z \neq X_{n-1}$ とする。このとき，各直既約加群 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ は入射加群ではない。また，$J_\varOmega$ に属する各加群は入射加群ではない。

Lemma 1.3. $n \geq 6$ を正の整数とする。

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[dr] & & & & & X_{n-1} \\
& X_3 \arrow[r] & X_4 \arrow[r] & \cdots\cdots \arrow[r] & X_{n-2} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
X_2 \arrow[ur] & & & & & X_n
\end{tikzcd}$$

を $\varGamma_A$ における部分クイバーとする。

(1) 各矢 $X_i \to X_{i+1}$ $(i = 2, \ldots, n-2)$，$X_1 \to X_3$，$X_{n-2} \to X_n$ に対応する既約写像は全射とする。このとき，X_1（および X_2）の任意の前者 (predecessor) は射影加群ではない。

(2) 各矢 $X_i \to X_{i+1}$ $(i = 2, \ldots, n-2)$，$X_1 \to X_3$，$X_{n-2} \to X_n$ に対応する既約写像は単射とする。このとき，X_{n-1}（および X_{n-2}）の任意の後者 (successor) は入射加群ではない。

2 Weakly sectional family and main result

Definition 2.1. $t \geq 2$ を正の整数とし，各 $i = 1, \ldots, t$ に対して $n_i \geq 3$ を正の整数とする。また，各 $i = 1, \ldots, t$ に対して

$$\varOmega_i = (X_{i,1} \longrightarrow X_{i,2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{i,n_i-1} \longrightarrow X_{i,n_i})$$

を弱区分的道とする。このとき，集合 $\{\varOmega_i \mid i = 1, \ldots, t\}$ が**左弱区分的集合 (left weakly sectional family)** であるとは，次の (1) – (4) が満たされるときを言う:

(1) $X_{1,1} = X_{j,1}$ $(j = 1, \ldots, t)$.

(2) $X_{t,n_t-t+1} \in J_{\varOmega_t}$,　$X_{t-1,n_{t-1}-1} \in J_{\varOmega_{t-1}}$.

(3) $X_{t,n_t-j+1} \neq X_{t-j,n_{t-j}-1}$　$(j = 1, \ldots, t-1)$.

(4) $X_{t,n_t-j+1} = X_{t-j,n_t-j}$ $(j = 1, \ldots t-1)$.

双対的に**右弱区分的集合 (right weakly sectional family)** が定義される。

Lemma 1.2, 1.3 を用いて，Γ_A の弱区分的集合について，次の定理を得る:

Theorem 1. $\mathcal{C}$ を Γ_A における準正則成分ではない成分とする（すなわち，直既約射影加群および直既約入射加群をともに含む成分）とする。$t, t' \geq 2$ を正の整数とし，$U \to V$ を Γ_A を $\mathcal{C}$ に属する矢とする。このとき，左弱区分的集合

$$\Omega = \{\Omega_i = (X_{i,1} \longrightarrow X_{i,2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{i,n_i-1} \longrightarrow X_{i,n_i}) \mid i = 1, \ldots, t\},$$

および，右弱区分的集合

$$\Omega' = \{\Omega'_i = (X'_{i,1} \longrightarrow X'_{i,2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X'_{i,n_i-1} \longrightarrow X'_{i,n_i}) \mid i = 1, \ldots, t'\}$$

の組 (Ω, Ω') で $U = X_{1,1}$ かつ $V = X'_{1,1}$ を満たすものは存在しない。

参考文献

[ARS] M. Auslander, I. Reiten and O. Smalø, *Representation theory of artin algebras*, Cambridge studies in advanced mathmatics 36, Cambridge University Press 1995.

[F] T. Furuya, *Weakly sectional paths and the shapes of Auslander-Reiten quivers*, Proceedings of the 45th Symposium on Ring Theory and Representation Theory (2011) 11–14.

[L1] S. Liu, *The degrees of irreducible maps and the shapes of Auslander-Reiten quivers*, J. London Math. Soc. 45 (1992) 32–54.

[L2] S. Liu, *Almost split sequences for non-regular modules*, Fund. Math. 143 (1993) 183–190.

[L3] S. Liu, *Shapes of connected componets of the Auslander-Reiten quivers of artin algebras*, Representation Theory of Algebras and Related Topics (Mexico city, 1994) Cand. Math. Soc. Conf. Proc 19 (1995) 109–137.