Homology of the complex of all non-trivial nilpotent subgroups of a finite non-solvable group

山口大学・教育学部　飯寄信保

Nobuo Iiyori

Department of Mathematics, Faculty of Education,

Yamaguchi University, Yamaguchi 753-8511, Japan

iiyori@yamaguchi-u.ac.jp

千葉大学・教育学部　澤辺正人

Masato Sawabe

Department of Mathematics, Faculty of Education,

Chiba University, Chiba 263-8522, Japan

sawabe@faculty.chiba-u.jp

この報告は 2019 年 2 月 14 日（木）に京都大学数理解析研究所で行った講演を再現するものである. 講演内容はベキ零部分群全体から定義される部分群複体のホモロジーの計算に関する一つの考察である. 具体的には以下で述べる関係式 (3.2), 命題 3.1, 例 3.3 の紹介である. 本研究の詳細については論文 [1] を参照されたい.

1　はじめに

記号の定義などから述べる. G を有限群とし, $\pi(G)$ を G の位数を割り切る素数全体の集合とする. 空でない部分集合 $\pi \subsetneqq \pi(G)$ に対して $\mathcal{N}_\pi(G)$ を G の非自明なベキ零 π-部分群全体からなる集合とする. $\mathcal{N}_\pi(G)$ を通常の包含関係に関して半順序集合 $(\mathcal{N}_\pi(G), \subsetneqq)$ と見なしたとき, その順序複体（抽象単体複体）$\mathsf{O}(\mathcal{N}_\pi(G)) = \mathsf{O}(\mathcal{N}_\pi(G), \subsetneqq)$ が定義される. 以下, 集合 $\mathcal{N}_\pi(G)$ と複体 $\mathsf{O}(\mathcal{N}_\pi(G))$ を同一視して, 複体も単に $\mathcal{N}_\pi(G)$ で表すことにする. さらに G の非自明な単なるベキ零部分群全体からなる集合を $\mathcal{N}(G)$ で表す. 言い換えれば $\pi = \pi(G)$ に対する $\mathcal{N}_{\pi(G)}(G)$ を $\mathcal{N}(G)$ で表す. ここでの話は複体 $\mathcal{N}(G)$ のホモロジーの計算に関する一つの考察である. ベキ零部分群に着目する理由の一つとして, いわゆる p-部分群複体と q-部分群複体を同時に考察し, 両者を比較したいという思いがある.

2　素数グラフとその連結成分

$\Gamma(G)$ を有限群 G の素数グラフ (cf. page 487 in [5]) とする. 即ち, 頂点集合 $V(\Gamma(G))$ は $\pi(G)$ であり, 異なる 2 頂点 $p, q \in V(\Gamma(G))$ に対して G が位数 pq の巡回部分群を持つとき p と q を結ぶのである. $\Gamma(G)$ の連結成分を

$$\pi(G) = \pi_1 \cup \cdots \cup \pi_s$$

とする. 特に G が偶数位数の群ならば $2 \in \pi(G)$ であるが, この場合 π_1 が 2 を含む連結成分であるとする. グラフの定義から, 連結成分をまたぐような部分集合 $\pi \subseteq \pi(G)$ に対して G のベキ零 π-部分群は存在しない. 従って $\mathcal{N}(G)$ は disjoint union $\mathcal{N}(G) = \biguplus_{i=1}^{s} \mathcal{N}_{\pi_i}(G)$ のように書ける. この $\mathcal{N}_{\pi_i}(G)$ を複体の連結成分のいくつかの和集合と見なせば, 複体 $\mathcal{N}(G)$ のホモロジー群 $H_n(\mathcal{N}(G))$ は次のよう

になる.

$$H_n(\mathcal{N}(G)) \cong \bigoplus_{i=1}^{s} H_n(\mathcal{N}_{\pi_i}(G)) \tag{2.1}$$

ここでホモロジーの係数は有理整数環 $\mathbb{Z}$ とする. 以上から, $\mathcal{N}(G)$ のホモロジーは各連結成分 π_i に対応するホモロジー $H_n(\mathcal{N}_{\pi_i}(G))$ の計算に帰着される. 次に素数グラフ $\Gamma(G)$ に関して次の Williams の定理に着目する.

補題 2.1（cf. page 488 in [5]） G を非可解群とする. $\pi_i \subsetneqq \pi(G)$ $(2 \leqq i \leqq s)$ を $\Gamma(G)$ の 2 を含まない連結成分とする. このとき G は孤立ベキ零 Hall π_i-部分群 D_i を持つ. ここで D_i が孤立部分群であるとは, D_i は T.I.-集合であり, かつ任意の $d \in D_i \setminus \{1\}$ に対して $C_G(d) \subsetneqq D_i$ が成り立つことである.

3 $\mathcal{N}(G)$ のホモロジー

前節までの状況をまとめる. $\Gamma(G)$ の 2 を含まない連結成分 を $\pi_i \subsetneqq \pi(G)$ $(2 \leqq i \leqq s)$ とする. このとき任意の $H \in \mathcal{N}_{\pi_i}(G)$ は孤立ベキ零 Hall π_i-部分群 D_i のある共役部分群 D_i^g $(g \in G)$ に含まれる. 一般論としては, もし G がベキ零 Hall π-部分群 K を持てば, 任意の π-部分群 $L \subsetneqq G$ は K のある共役部分群に含まれる (cf. page 166 in [4]). よって D_i が T.I.-集合であることを合わせると $\mathcal{N}_{\pi_i}(G)$ は次のように表される.

$$\mathcal{N}_{\pi_i}(G) = \bigcup_{g \in G} \mathcal{N}_{\pi_i}(D_i^g) = \biguplus_{x \in G/N_G(D_i)} \mathcal{N}_{\pi_i}(D_i^x)$$

ここで $G/N_G(D_i)$ は $N_G(D_i)$ による剰余類の完全代表系とする. 上記の式において D_i^x 自身もベキ零 π_i-部分群であることから D_i^x が半順序集合 $(\mathcal{N}_{\pi_i}(D_i^x), \subsetneqq)$ の最大元となり, 複体 $\mathcal{N}_{\pi_i}(D_i^x)$ は可縮である. 従って $H_n(N_{\pi_i}(G))$ は次のようになる.

$$H_n(\mathcal{N}_{\pi_i}(G)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{|G:N_G(D_i)|} & n = 0 \\ \{0\} & n \geqq 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

このとき全体 $\mathcal{N}(G)$ のホモロジーは (2.1) を合わせると次のようになる.

$$H_n(\mathcal{N}(G)) \cong \begin{cases} H_0(\mathcal{N}_{\pi_1}(G)) \oplus \left(\bigoplus_{i=2}^{s} \mathbb{Z}^{|G:N_G(D_i)|} \right) & n = 0 \\ H_n(\mathcal{N}_{\pi_1}(G)) & n \geqq 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

ここで $H_0(\mathcal{N}_{\pi_1}(G)) \cong \mathbb{Z}^t$ とすると t は複体 $\mathcal{N}_{\pi_1}(G)$ の連結成分の個数である. 一方 1 次以上の場合は (3.1) より π_1 以外のところは全て消えてしまうことから $H_n(\mathcal{N}(G)) \cong H_n(\mathcal{N}_{\pi_1}(G))$ である. 以上から全体のホモロジーはいずれの場合も π_1 に関する計算に帰着される.

さて部分群 $H \subsetneqq G$ が次の条件件を満足するとき H を G の強く埋め込まれた部分群という.

(i) H は偶数位数であり, かつ G の真の部分群である.

(ii) 任意の $g \in G \setminus H$ に対して $H \cap H^g$ は奇数位数である.

強く埋め込まれた部分群に関連して次の結果を得る.

命題 3.1（Proposition 3.3 in [1]） G を偶数位数の群とする. 部分集合 $\pi \subsetneqq \pi(G)$ は素数グラフ $\Gamma(G)$ の連結部分グラフであり, かつ 2 を含むものとする. $\mathcal{N}_\pi(G)$ は非連結であると仮定する. このとき

$\mathcal{N}_\pi(G)$ の任意の連結成分 $\mathcal{C} \subsetneqq \mathcal{N}_\pi(G)$ に対してその固定部分群 $\mathrm{Stab}_G(\mathcal{C})$ は G の強く埋め込まれた部分群である．特に G が強く埋め込まれた部分群を持たないならば $\mathcal{N}_\pi(G)$ は連結となる．つまり $H_0(\mathcal{N}_\pi(G)) \cong \mathbb{Z}$ が導かれる．

注意 3.2　強く埋め込まれた部分群を持つ有限群は H. Bender によって特徴付けられている．特にその部分群を持つ有限単純群は完全に分類されている (cf. [4, page 391])．

例 3.3　二つの例を観察する．

1. $\mathbb{M}$ をモンスターとする．$\mathbb{M}$ は非可換単純群より非可解群である．素数グラフ $\Gamma(\mathbb{M})$ は四つの連結成分を持つ (cf. [5, page 494]):

$$\pi_1 = \{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,47\},\ \pi_2 = \{41\},\ \pi_3 = \{59\},\ \pi_4 = \{71\}.$$

各 $i = 2,3,4$ に対して D_i を $\mathbb{M}$ の孤立ベキ零 Hall π_i-部分群とすれば $D_2 \cong C_{41}$, $D_3 \cong C_{59}$, $D_4 \cong C_{71}$ である．よって (3.2) から $\mathcal{N}(\mathbb{M})$ の 0 次のホモロジーは次のように計算される．

$$H_0(\mathcal{N}(\mathbb{M})) \cong \mathbb{Z}^1 \oplus \mathbb{Z}^{\frac{|\mathbb{M}|}{41\cdot 40}} \oplus \mathbb{Z}^{\frac{|\mathbb{M}|}{59\cdot 29}} \oplus \mathbb{Z}^{\frac{|\mathbb{M}|}{71\cdot 35}}.$$

ここで最初の $\mathbb{Z}^1$ は, $\mathbb{M}$ が強く埋め込まれた部分群を持たないこと, 及び命題 3.1 から導かれる．一方, 1 次以上の場合は現時点で計算は出来ていないが, 一般に $H_n(\mathcal{N}_{\pi_1}(\mathbb{M}))$ の計算に帰着されている．

2. $G \cong PSL(2,7) \cong PSL(3,2)$ とする．位数は $2^3 \cdot 3 \cdot 7$ である．G は非可換単純群より非可解群である．素数グラフ $\Gamma(G)$ は三つ連結成分を持つ (cf. [5, page 494]):

$$\pi_1 = \{2\},\ \pi_2 = \{3\},\ \pi_3 = \{7\}.$$

各 $i = 2,3$ に対して D_i を G の孤立ベキ零 Hall π_i-部分群とすれば $D_2 \cong C_3$, $D_3 \cong C_7$ である．よって (3.2) から $\mathcal{N}(G)$ の 0 次のホモロジーは次のように計算される．

$$H_0(\mathcal{N}(G)) \cong \mathbb{Z}^1 \oplus \mathbb{Z}^{\frac{|G|}{3\cdot 2}} \oplus \mathbb{Z}^{\frac{|G|}{7\cdot 3}} = \mathbb{Z}^1 \oplus \mathbb{Z}^{28} \oplus \mathbb{Z}^8.$$

ここで最初の $\mathbb{Z}^1$ は, G が強く埋め込まれた部分群を持たないこと, 及び命題 3.1 から導かれる．一方, 1 次以上の場合は一般に $H_n(\mathcal{N}_{\pi_1}(G))$ の計算に帰着されている．ここで $\pi_1 = \{2\}$ は 2 の一点集合であることから, $\mathcal{N}_{\pi_1}(G)$ は非自明な 2-部分群全体からなる $\mathcal{S}_2(G)$ に同一である．また詳しいことは省略するが, $\mathcal{S}_2(G)$ は Radical 2-複体 $\mathcal{B}_2(G)$ と互いにホモトピー同値である．ここで $\mathcal{B}_2(G)$ は $PSL(3,2)$ に付随するビルディングであり

$$H_n(\mathcal{N}_{\pi_1}(G)) = H_n(\mathcal{S}_2(G)) \cong H_n(\mathcal{B}_2(G))$$

である．一般に L を標数 p の Lie 型の群でランクが r とすると, 付随するビルディング $\mathcal{B}_p(L)$ の簡約ホモロジーは Solomon-Tits の定理から次のように計算される (cf. page 301 in [3])．

$$\widetilde{H}_n(\mathcal{B}_p(L)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{|L|_p} & n = r-1 \\ \{0\} & n \neq r-1 \end{cases}$$

従って $G \cong PSL(3,2)$ に戻れば, $n = r-1 = 2-1 = 1$ のとき $\widetilde{H}_n(\mathcal{N}_{\pi_1}(G)) \cong \widetilde{H}_n(\mathcal{B}_2(G)) \cong \mathbb{Z}^{|G|_2} = \mathbb{Z}^8$ であり, それ以外は $\{0\}$ である．まとめると次のように計算される．

$$H_n(\mathcal{N}(PSL(2,7))) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^1 \oplus \mathbb{Z}^{28} \oplus \mathbb{Z}^8 & n = 0 \\ \mathbb{Z}^8 & n = 1\ . \\ \{0\} & n \geq 2 \end{cases}$$

以上, 全体を振り返ってみると, 非可解群 G 対して $\mathcal{N}(G)$ のホモロジーは (3.2) から素数グラフの 2 を含む連結成分 π_1 に対する $H_n(N_{\pi_1}(G))$ の計算に一般に帰着される. 特に 0 次のホモロジーは命題 3.1 より G が強く埋め込まれた部分群を持たなければ $H_0(N_{\pi_1}(G)) \cong \mathbb{Z}$ である. さらに 1 次以上の $H_n(N_{\pi_1}(G))$ についても状況によって $PSL(2,7)$ のように手計算が可能になるという話の大雑把な紹介であった. 詳細については論文 [1] を参照されたい.

参考文献

[1] N. Iiyori and M. Sawabe, Homology of the complex of all non-trivial nilpotent subgroups of a finite non-solvable group, to appear in *Tokyo J. Math.*

[2] S.D. Smith, “Subgroup complexes”, Mathematical Surveys and Monographs, **179**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[3] M. Suzuki, “Group theory II”, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **248**, Springer-Verlag, New York, 1986.

[4] J.S. Williams, Prime graph components of finite groups, *J. Algebra* **69** (1981), 487–513.