The mod 3 cohomology ring of the finite projective general linear group of degree 3

芝浦工業大学・システム理工学部　亀子　正喜
MASAKI KAMEKO
COLLEGE OF SYSTEMS ENGINEERING AND SCIENCE,
SHIBAURA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

今回の RIMS 研究集会「有限群のコホモロジー論とその周辺」で "The mod 3 cohomology ring of the finite projective general linear group of degree 3" という題で話をさせていただきました. 未だにプレプリントの形にまとまっていませんので研究集会でのスライドを元にアナウンスメントという形で報告させていただきます. 以下, 英語の部分は実際に使用したスライドからのコピーです. これに日本語で補足説明をつけてゆく形でいきます.

In what follows, English parts are taken from the slides I used in this talk.

1 Introduction

1.1. まずは記号と取り上げる有限群, 位相空間等の説明からはじめます.

We are interested in the mod ℓ cohomology $H^*(-) = H^*(-;\mathbb{Z}/\ell)$ of the classifying space of

- $GL_n(\mathbb{C}) \simeq U(n)$,
- $GL_n(\mathbb{F}_q)$,
- $PGL_n(\mathbb{C}) = GL_n(\mathbb{C})/\mathbb{C}^\times \simeq PU(n) = U(n)/S^1$, and
- $PGL_n(\mathbb{F}_q) = GL_n(\mathbb{F}_q)/\mathbb{F}_q^\times$,

Suppose

- ℓ, p: prime numbers such that $(\ell, p) = 1$,

- q is a power of p, and
- unless otherwise stated, we assume $\ell^2|(q-1)$.

$U(n)$ は n 次のユニタリー群で n 次の複素数体上の一般線型群 $GL_n(\mathbb{C})$ とホモトピー同値になります. 分類空間もホモトピー同値になりますからコホモロジーも同型になります. ですのでコホモロジーの話をしようという時には $U(n)$ も $GL_n(\mathbb{C})$ も同じということになります. 代数群としての構造が必要なとき, たとえば複素数体 $\mathbb{C}$ を有限体 $\mathbb{F}_q$ で置き換えようという時には $U(n)$ ではなく $GL_n(\mathbb{C})$ を考える必要があります. $U(n)$ はコンパクト連結リー群ということで有限複体になりますのでトポロジーの人間にとっては $GL_n(\mathbb{C})$ よりなんとなく馴染みがあります.

1.2. ユニタリー群 $U(n)$ やその分類空間 $BU(n)$ のコホモロジーはよく知られています. $BGL_n(\mathbb{F}_q)$ についても上の条件のもとでは以下のような綺麗な結果が知られています. が中心（またはその部分群）で割ったものについては意外にわかっていません.

We want to know

$$H^*(BPGL_n(\mathbb{C})), \quad H^*(BPGL_n(\mathbb{F}_q))$$

and

$$H^*(\mathcal{L}BPU(n)).$$

$\mathcal{L}X$ is the free loop space of X, i.e.

$$\mathcal{L}X = \{\text{continuous maps } S^1 \to X\}.$$

一般の n について調べたいところなのですが, 一般の n についての話はとても難しく今の我々の知識ではとても計算できないように思えます. ですのでまずは小さな n から始めよう, というところです. ここでいきなり $\mathcal{L}$ を登場させていますがこれは自由ループ空間のことです.

Borel の古典的な結果として

$$H^*(BGL_n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}/\ell[z_2, z_4, z_6, \dots, z_{2n}]$$

がよく知られています. Quillen [Qui72] の結果として有限射影一般線型群についても上の条件のもとでは

$$H^*(BGL_n(\mathbb{F}_q)) = \mathbb{Z}/\ell[z_2, z_4, z_6, \dots, z_{2n}] \otimes \Lambda(z_1, z_3, z_5, \dots, z_{2n-1})$$

が知られています. $p = \ell$ の場合については部分的な結果は知られていますが一般的な結果はありません. かなり難しい問題かと思います. さらに分類空間の自由ループ空間についても

$$H^*(\mathcal{L}BU(n)) = \mathbb{Z}/\ell[z_2, z_4, z_6, \dots, z_{2n}] \otimes \Lambda(z_1, z_3, z_5, \dots, z_{2n-1})$$

となることは Quillen の計算と同様に Eilenberg-Moore スペクトル系列を用いると計算できます. $\mathcal{L}BU(n)$ のコホモロジーの計算は誰の結果と呼べばいいのか私にはわかりません. folklore というべきものなのかちゃんと文献があるのかご存知の方はご教示いただけると幸いです.

1.3. ここで話が飛びますが Toda スペクトル系列 [Tod87] について触れておきます. G を有限群またはコンパクトリー群とします. Γ を G の中心の部分群とします. Γ はアーベル群なので $BB\Gamma$ を考えることができて通常のファイバー系列

$$B\Gamma \to BG \to B(G/\Gamma)$$

は

$$B\Gamma \to BG \to B(G/\Gamma) \to BB\Gamma$$

まで延長できます. $BB\Gamma$ に分類空間の構成方法から自然に与えることのできるフィルトレーションを用いて以下のようなスペクトル系列が構成できます.

For

$$B\Gamma \to BG \to B(G/\Gamma) \to BB\Gamma,$$

there exists a spectral sequence

$$\mathrm{Cotor}_{H^*(B\Gamma)}(\mathbb{Z}/\ell, H^*(BG)) \Rightarrow H^*(B(G/\Gamma)).$$

Toda は [Tod87] でこのスペクトル系列を構成し, これを用いて $\ell = 2$ の場合に $H^*(BPU(4n+2))$ 等の計算を行なっています. その計算を見るとこのスペクトル系列はコンパクトリー群の分類空間のコホモロジーの計算にかなり使えそうであるように思えます. しかし, このスペクトル系列が [Tod87] 以外で実際に使われている例はありません. その意味でこの研究の目的の一つは $\ell \neq 2$ の場合にもこのスペクトル系列が分類空間のコホモロジーの計算に有用であることを示すことです. その点から $\ell = 3$ の場合の $H^*(BPGL_3(\mathbb{F}_q))$ の計算がその方向への第一歩ということで重要ということになります.

1.4. その一方で有限射影一般線型群で一番小さい非自明なものは $n = 2$ のときの $PGL_2(\mathbb{F}_q)$ です. 実はこれはこれで重要な研究対象です. 一般コホモロジー, 例えば Morava K-理論, の計算は興味深い問題です.

$n = 2$ のときには mod ℓ コホモロジーについては以下のような形でよくわかっています.

$$PGL_2(\mathbb{C}) \simeq PU(2) = SU(2)/C_2 = SO(3).$$

For $\ell \neq 2$,

$$\begin{aligned} H^*(BPGL_2(\mathbb{C})) &= \mathbb{Z}/\ell[z_4], \\ H^*(BPGL_2(\mathbb{F}_q)) &= \mathbb{Z}/\ell[z_4] \otimes \Lambda(z_3) \\ &= H^*(\mathcal{L}BSO(3)). \end{aligned}$$

For $\ell = 2$,

$$\begin{aligned} H^*(BPGL_2(\mathbb{C})) &= \mathbb{Z}/\ell[w_2, w_3], \\ H^*(BPGL_2(\mathbb{F}_q)) &= \mathbb{Z}/2[w_2, w_3] \otimes \Delta(x_1, x_2) \\ &= \mathbb{Z}/2[x_1, w_2, w_3]/(x_1^4 + w_2 x_1^2 + w_3 x_1) \\ &= H^*(\mathcal{L}BSO(3)). \end{aligned}$$

mod 2 コホモロジーについて上のように計算できるのは $H^*(BPGL_2(\mathbb{C}))$ が多項式環になるからです．コホモロジーが多項式環になる場合の自由ループ空間のコホモロジーやその類似としての有限シュバレー群のコホモロジーについては，たとえば Kuribayashi [Kur99], Kishimoto-Kono [KK10] に一般論があります．

しかし $BPGL_3(\mathbb{F}_q)$ の mod 3 コホモロジーは多項式環になりませんので上のようにはいきません．$BPGL_3(\mathbb{F}_q)$ が自由ループ空間のコホモロジーの一般論やその類似から計算できない一番はじめの例ということになります．

We can compute these cohomologies because $H^*(BG)$ is a polynomial algebra. $BPGL_3 \simeq BPU(3)$, $\ell = 3$ is the first non-polynomial case.

2 Known results

2.1. 以下 $\ell = 3$, $n = 3$ とし $PU(3) \simeq PGL_3(\mathbb{C})$, $PGL_3(\mathbb{F}q)$ の分類空間の mod 3 コホモロジーを考えます．Kono-Mimura-Shimada [KMS75] では Rothenberg-Steenrod スペクトル系列を用いて $BPU(3)$ の mod 3 コホモロジーが計算されています．Rothenberg-Steenrod スペクトル系列は

$$G \to * \to BG \to BG$$

の一番右の BG に入るフィルトレーションから構成されるスペクトル系列

$$\mathrm{Cotor}_{H^*(G)}(\mathbb{Z}/\ell, \mathbb{Z}/\ell) \Rightarrow H^*(BG)$$

ということもできます．Kono-Yagita [KY93] では $PU(3)$ の極大トーラス T と極大な基本アーベル 3-部分群 $A_2 \cong \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3$ に対して特性類を計算することにより

$$H^*(BPGL_3(\mathbb{C})) \to H^*(BT) \oplus H^*(BA_2)$$

が単射になることを示しています．これは Adams の予想（[KY93]）

$\ell > 2$ のとき

$$H^*(BG) \to \prod_{A \in \mathcal{A}} H^*(BA)$$

が単射になる．ここで $\mathcal{A}$ は G の基本アーベル ℓ-部分群全体の集合．

が $G = PU(3)$ の場合に成り立っていることを示しています. 以上をまとめると

From now on, we assume $\ell = 3$.

Theorem 2.1 ([KMS75], [KY93]) *$H^*(BPGL_3(\mathbb{C}))$ is isomorphic to*

$$\mathbb{Z}/3[y_8, z_2, z_{12}] \otimes \Lambda(y_3, y_7)/(y_3z_2, y_7z_2, y_8z_2 + y_3y_7),$$

where $y_3 = Q_0(z_2)$, $y_7 = Q_1(z_2)$, $y_8 = Q_0Q_1(z_2)$. The induced homomorphism

$$H^*(BPGL_3(\mathbb{C})) \to H^*(BT) \oplus H^*(BA_2)$$

is injective where T is a maximal torus and A_2 is a maximal non-toral elementary abelian subgroup of $GL_3(\mathbb{C})$.

ここで $Q_i\colon H^k(X) \to H^{k+2\ell^i-1}(X)$ は Milnor 作用素とよばれるコホモロジー作用素でコホモロジーの元の添え字はコホモロジーの次元を表します. つまり z_2 は $H^2((BPGL_3(\mathbb{C}))$ の元, y_3 は $H^3((BPGL_3(\mathbb{C}))$ の元ということになります.

2.2. $BPGL_3(\mathbb{F}_q))$ の mod 3 コホモロジーに関しては Tezuka [Tez02] で $q \equiv 4, 7 \mod 9$ の場合に $H^*(BPGL_3(\mathbb{F}_q))$ の環構造が決定されています. また対応する自由ループ空間 $\mathcal{L}BPU(3)$ の mod 3 コホモロジーに関しては Kuribayashi-Mimura-Nishimoto [KMN06] で $H^*(\mathcal{L}BPU(3))$ の $H^*(BPU(3))$-加群の構造が計算されています. これらの結果は Rothenberg-Steenrod 型のスペクトル系列

$$\mathrm{Cotor}_{H^*(G)}(\mathbb{Z}/\ell, H^*(G)) \Rightarrow H^*(\mathcal{L}BG)$$

$$\mathrm{Cotor}_{H^*(G)}(\mathbb{Z}/\ell, H^*(G)) \Rightarrow H^*(BG(\mathbb{F}_q))$$

を用い, これらのスペクトル系列が E_2-レベルで退化していることを示すことにより得られています. これらの結果は Tezuka 予想 [Tez98]

$$H^*(BG(\mathbb{F}_q)) = H^*(\mathcal{L}BG) \text{ for any integral group scheme } G?$$

が $G = PU(3)$ q が $q \equiv 4, 7 \mod 9$ の場合に成り立っていることを示しています. この Tezuka 予想を $q \equiv 0 \mod 9$ の場合にも示すことがこの研究のもう一つの目的です.

2.3. 上の $BPGL_3(\mathbb{C})$ の mod 3 コホモロジーの計算は Toda スペクトル系列を用いても容易にできます. さらに上の計算ではそれほど容易ではない π^* の像が Toda スペクトル系列を用いると容易に計算できます.

Toda spectral sequence for

$$BS^1 \to BU(3) \xrightarrow{\pi} BPU(3) \to K(\mathbb{Z}, 3)$$

collapses at the E_2-level.

Theorem 2.2 *As an algebra over* $\mathbb{Z}/3$, $H^*(BPGL_3(\mathbb{C}))$ *is generated by*

$$z_2, z_{12}, y_3 = Q_0(z_2), y_7 = Q_1(z_2), y_8 = Q_0Q_1(z_2),$$

$$H^*(BPGL_3(\mathbb{C}))[y_8^{-1}] = (\mathbb{Z}/3[y_8, z_{12}] \otimes (y_3, y_7))[y_8^{-1}],$$

$$\varphi\colon H^*(BPGL_3(\mathbb{C})) \to H^*(BGL_3(\mathbb{C})) \oplus H^*(BPGL_3(\mathbb{C}))[y_8^{-1}]$$

is injective and, in $H^*(BPGL_3(\mathbb{C}))[y_8^{-1}]$,

$$z_2 = \frac{1}{y_8}(-y_3y_7)$$

Moreover, z_2, z_{12} *are characterized by*

$$\pi^*(z_2) = z_2,$$
$$\pi^*(z_{12}) = z_4^3 + z_2^3z_6 - z_2^2z_4^2.$$

2.4. しかし, 注意すべき点もあります. E_2-項の計算が比較的楽になる一方で退化するかどうかがやや微妙になっていきます. たとえば $PU(3)$ を $SU(3)$ の商群とみて以下のようなファイバー系列を考えて Toda スペクトル系列を構成することはできますがこれは E_2-レベルでは退化しません.

Toda spectral sequence for

$$B(\mathbb{Z}/3) \to BSU(3) \to BPU(3) \to BB(\mathbb{Z}/3)$$

does not collapse at the E_2-level.

$$E_2 = \mathbb{Z}/3[y_2, y_8, z_4] \otimes \Lambda(y_3).$$
$$d_2(z_4) = \pm y_2y_3.$$

3 Results

3.1. 結果をいくつかに分割した形で述べて報告を終わります. 同様の結果が $\mathcal{L}BPU(3)$ の mod 3 コホモロジーについても成り立ちます. つまり上の Tezuka の予想が $G = PGL_3(\mathbb{F}_q)$ に対して成り立ちます.

Theorem 3.1 *Toda spectral sequence for*

$$B\mathbb{F}_q^\times \to BGL_3(\mathbb{F}_q) \to BPGL_3(\mathbb{F}_q) \to BB\mathbb{F}_q^\times,$$

that is,

$$\mathrm{Cotor}_{H^*(B\mathbb{F}_q^\times)}(\mathbb{Z}/3, H^*(BGL_3(\mathbb{F}))) \Rightarrow H^*(BPGL_3(\mathbb{F}_q)),$$

collapses at the E_2*-level.*

Theorem 3.2 *As an algebra,* $H^*(BPGL_3(\mathbb{F}_q))$ *is generated by* $y_2, y_3, y_7, y_8, z_1, z_2, z_8, z_9, z_{12}$. z_1, z_8, z_9 *are characterized by*

$$\begin{aligned} &\pi^*(z_1) = z_1, && && \\ &\pi^*(z_8) = z_1 z_7, && Q_0(z_8) = 0, && y_2 z_8 = 0, \\ &\pi^*(z_9) = z_2 z_7 + z_1 z_4^2, && Q_0(z_9) = 0, && y_2 z_9 - y_3 z_8 = -y_3 y_8, \end{aligned}$$

where $z_7 = z_2 z_5 + z_3 z_4$.

Theorem 3.3

$$H^*(BPGL_3(\mathbb{F}_q))[y_8^{-1}] = (\mathbb{Z}/3[y_2, y_8, z_{12}]/(y_2^9 + y_2^3 z_{12} - y_2 y_8^2) \otimes \Lambda(y_3, y_7))[y_8^{-1}],$$
$$\varphi\colon H^*(BPGL_3(\mathbb{F}_q)) \to H^*(BGL_3(\mathbb{F}_q)) \oplus H^*(BPGL_3(\mathbb{F}_q))[y_8^{-1}]$$

is injective.

Theorem 3.4 *In* $H^*(BPGL_3(\mathbb{F}_q))[y_8^{-1}]$,

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{y_8}(y_2 y_7 + y_2^3 y_3), \\ z_2 &= \frac{1}{y_8}(-y_3 y_7), \\ z_8 &= \frac{1}{y_8}(y_8^2 - y_2^8 - y_2^2 z_{12}), \\ z_9 &= \frac{1}{y_8}(-y_2^7 y_3 - y_2 y_3 z_{12}). \end{aligned}$$

Theorem 3.5 *The mod* 3 *cohomology ring is generated by elements above with the following* 13 *relations*

$$y_2 z_2 + y_3 z_1 = y_2 z_8 = y_2 z_9 + y_3 z_8 = y_2 y_7 - y_8 z_1 = 0,$$
$$y_3 z_2 = y_3 z_9 = y_7 z_2 = y_7 z_1 + y_2^2 y_3 z_1 = y_7 z_9 = 0,$$
$$y_8 z_2 + y_3 y_7 = 0,$$

and

$$\begin{aligned} y_2 z_1 z_{12} + y_7 z_8 &= -y_2^7 z_1 + y_7 y_8, \\ y_2^2 z_{12} + y_8 z_8 &= -y_2^8 + y_8^2, \\ y_2 y_3 z_{12} + y_8 z_9 &= -y_2^7 y_3. \end{aligned}$$

謝辞：本研究は JSPS 科研費 17K05263 の助成を受けたものです。

References

[KK10] D. Kishimoto and A. Kono, *On the cohomology of free and twisted loop spaces*, J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), no. 5, 646–653, DOI 10.1016/j.jpaa.2009.07.006. MR2577671

[KMS75] A. Kono, M. Mimura, and N. Shimada, *Cohomology of classifying spaces of certain associative H-spaces*, J. Math. Kyoto Univ. **15** (1975), no. 3, 607–617, DOI 10.1215/kjm/1250523006.

[KY93] A. Kono and N. Yagita, *Brown-Peterson and ordinary cohomology theories of classifying spaces for compact Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **339** (1993), no. 2, 781–798, DOI 10.2307/2154298.

[Kur99] K. Kuribayashi, *Module derivations and the adjoint action of a finite loop space*, J. Math. Kyoto Univ. **39** (1999), no. 1, 67–85, DOI 10.1215/kjm/1250517954.

[KMN06] K. Kuribayashi, M. Mimura, and T. Nishimoto, *Twisted tensor products related to the cohomology of the classifying spaces of loop groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **180** (2006), no. 849, vi+85, DOI 10.1090/memo/0849.

[Qui72] D. Quillen, *On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field*, Ann. of Math. (2) **96** (1972), 552–586, DOI 10.2307/1970825.

[Tez98] M. Tezuka, *On the cohomology of finite Chevalley groups and free loop spaces of classifying spaces*, Sūrikaisekikenkyūsho Kokyūroku **1057** (1998), 54–55. Cohomology theory of finite groups and related topics (Japanese) (Kyoto, 1998).

[Tez02] ———, *Cohomology of 3×3 finite projective linear groups*, Sūrikaisekikenkyūsho Kokyūroku **1251** (2002), 124–129 (Japanese). Cohomology theory of finite groups and related topics (Japanese) (Kyoto, 2001).

[Tod87] H. Toda, *Cohomology of classifying spaces*, Homotopy theory and related topics (Kyoto, 1984), Adv. Stud. Pure Math., vol. 9, North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 75–108, DOI 10.2969/aspm/00910075.