# d-Smith 集合の計算の具体例について

岡山大学大学院・自然科学研究科　清田 航平 (Kohei Seita)
Graduate School of Natural Science and Technology, Okayama University

## 1　準備

本稿では特に断りのない限り，$G$ は有限群であるとし，実 $G$-加群は有限次元であるものしか扱わないこととする．また，$\mathrm{R}(G;\mathbb{Q})$ を $G$ の有理表現環，$\mathrm{RO}(G)$ を $G$ の実表現環とする．

**定義 1.1.** 有限次元の実 $G$-加群 $V$, $W$ に対しホモトピー球面 $\Sigma$ 上の滑らかな $G$-作用で，

$$\Sigma^G = \{a,\, b\}, \quad T_a(\Sigma) \cong V, \quad T_b(\Sigma) \cong W$$

を満たすものが存在するとき，$V$ と $W$ は **Smith 同値**であるといい，$V \sim_{\mathfrak{S}} W$ と書く．ここで，上の 2 つの同型は実 $G$-加群として同型という意味である．$V \sim_{\mathfrak{S}} W$ であり，すべての $G$ の部分群 $H$ に対して $\dim V^H = \dim W^H$ が成り立つとき，$V$, $W$ は **d-Smith 同値**であるといい，$V \sim_{\mathfrak{dS}} W$ と書く．

**定義 1.2.** $\mathrm{RO}(G)$ の部分集合 $\mathfrak{S}(G)$, $\mathfrak{dS}(G)$ を

$$\mathfrak{S}(G) = \{[V] - [W] \in \mathrm{RO}(G) \mid V \sim_{\mathfrak{S}} W\},$$
$$\mathfrak{dS}(G) = \{[V] - [W] \in \mathrm{RO}(G) \mid V \sim_{\mathfrak{dS}} W\}$$

により定義する．$\mathfrak{S}(G)$, $\mathfrak{dS}(G)$ をそれぞれ $G$ の **Smith 集合**，**d-Smith 集合**という．

更に，次の記号を定める．

$E$ : 単位群.
$\mathcal{S}(G)$ : $G$ の部分群全体の集合.
$\mathcal{P}(G)$ : $G$ の素数冪位数の部分群全体の集合.
$G^{\{p\}}$ : $G$ の正規部分群 $N$ で $|G/N|$ が $p$ 冪である最小のもの.
$\mathcal{L}(G)$ : ある素数 $p$ に対し $H \supset G^{\{p\}}$ を満たす $G$ の部分群 $H$ 全体の集合.
$G^{\mathrm{nil}}$ : $G$ の正規部分群 $N$ で $G/N$ が冪零である最小のもの.
$G^{\cap 2}$ : $|G/N| \le 2$ を満たす $G$ の正規部分群 $N$ 全体の共通部分.

特に，上で定義した $G^{\{p\}}$ を $G$ の $p$ 型の **Dress 部分群**という．

**定義 1.3.** $\mathrm{RO}(G)$ の部分集合 $A$ と $\mathcal{S}(G)$ の部分集合 $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ に対し，次を定める．

$$A^{\mathcal{F}} = \{[V] - [W] \in A \mid V^H = W^H = O \; (for\ all\ H \in \mathcal{F})\},$$
$$A_{\mathcal{G}} = \{[V] - [W] \in A \mid \mathrm{res}^G_K V \cong \mathrm{res}^G_K W \; (for\ all\ K \in \mathcal{G})\},$$
$$A^{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}} = (A^{\mathcal{F}})_{\mathcal{G}}.$$

**命題 1.1** (E. Laitinen–M. Morimoto [3]). 次の等式が成り立つ．

$$G^{\mathrm{nil}} = \bigcap_{p:\text{素数},\, p \mid |G|} G^{\{p\}}.$$

**定義 1.4.** $P$ と $G/H$ が素数冪位数の有限群で $H/P$ が巡回群になるような正規列 $P \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ が存在しないとき，$G$ を **Oliver 群**という．

$C_n$ を位数 $n$ の巡回群，$D_{2n}$ を位数 $2n$ の二面体群とする．

**例 1.2.** $p$, $q$, $r$ を相異なる 3 個の奇素数とする．

*1.* $C_{pqr} \times C_{pqr}$ と $D_{2pq} \times D_{2pq}$ は *Oliver* 群である．

*2.* $C_{pq} \times C_{pq}$ と $D_{2pqr}$ は *Oliver* 群ではない．

**定義 1.5.** $G$ の元 $g$ に対し，$(g) = \{xgx^{-1} \mid h \in G\}$ とする．このとき，集合 $(g) \cup (g^{-1})$ を $(g)^{\pm}$ と表し，$g$ を代表元とする**実共役類**という．

以下，特に断りのない限り，$N$ は $G$ の正規部分群であるとする．

**定義 1.6.** $\lambda(G, N)$ を $g$ が $G$ の素数冪位数でない $G$ の元全体を動くときの実共役類 $(gN)^{\pm}$ の個数とする．また，$\nu(G, N)$ を $H$ が $G$ の素数冪位数でない巡回部分群全体を動くときの $G/N$-共役類 $(HN/N)_{G/N}$ の個数とする．

**補題 1.3.** $G$ は有限群で，素数冪位数でない元を持つとする．このとき，

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} \mathrm{R}(G; \mathbb{Q})^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)} = \nu(G, E) - \nu(G, N)$$

が成り立つ．

## 2 $\mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}$ の階数

**定義 2.1.** 2 つの $\mathrm{RO}(G)$ の部分加群 $\overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(G)$, $\mathrm{RO}_0(G)$ を次のようにして定める．

$$\overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(G) = \{x \in \mathrm{RO}(G) \mid nx \in \mathrm{R}(G; \mathbb{Q}) \ (for\ some\ n \in \mathbb{N})\},$$
$$\mathrm{RO}_0(G) = \{[V] - [W] \in \mathrm{RO}(G) \mid \dim V^H = \dim W^H \ (for\ all\ H \in \mathcal{S}(G))\}.$$

**命題 2.1** (M. Morimoto [7], [9])**.** $G$ が *Oliver* 群ならば，

$$\mathrm{RO}_0(G)^{\mathcal{L}(G)}_{\mathcal{P}(G)} \subset \mathfrak{d}\mathfrak{S}(G)$$

が成り立つ．

[1] より任意の有限群 $G$ に対して

$$\mathrm{RO}(G) = \overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(G) \oplus \mathrm{RO}_0(G)$$

が成り立つことから，次の命題が得られる．

**命題 2.2.** 標準的同型

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{RO}(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)} = \left(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{R}_{\mathbb{Q}}(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}\right) \oplus \left(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}\right)$$

が成り立つ．

**補題 2.3** (K. Pawałowski–L. Solomon [10])**.** $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} \mathrm{RO}(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)} = \lambda(G, E) - \lambda(G, N)$ が成り立つ．

補題 1.3, 命題 2.2, 補題 2.3 より，次の定理が得られる．

**定理 2.4.** $G$ が素数冪位数でない元を持つとする．このとき，

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)} = (\lambda(G,E) - \lambda(G,N)) - (\nu(G,E) - \nu(G,N))$$

が成り立つ．

**系 2.5.** $G$ が

$$\lambda(G,E) - \lambda(G,G^{\mathrm{nil}}) > \nu(G,E) - \nu(G,G^{\mathrm{nil}})$$

を満たす *Oliver* 群ならば，$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G)$ は無限集合である．

# 3　d-Smith 集合の具体的計算

## 3.1　具体的な d-Smith 集合と主結果

$m$ を 2 以上の整数とし，$p_1, p_2, \ldots, p_m$ は $p_1 < p_2 < \cdots < p_m$ を満たす $m$ 個の奇素数とする．また，$q_m = p_1 p_2 \ldots p_m$ とおき，$x$, $y$ をそれぞれ位数 $q_m$, 2 の $D_{2q_m}$ の生成元とする．このセクションでは，$D_{2q_m}$ の $n$ 個の直積 $D_{2q_m}^n$ の d-Smith 集合について考察していく．次のことは直ちに得られる．

1. $n \geq 2$ ならば，$D_{2q_m}^n$ は Oliver 群である．
2. $i = 1, 2, \ldots, m$ に対し，$(D_{2q_m}^n)^{\{p_i\}} = D_{2q_m}^n$ が成り立つ．
3. $(D_{2q_m}^n)^{\{2\}}$ は $C_2^n$ と同型である．

命題 1.1 より，

$$(D_{2q_m}^n)^{\mathrm{nil}} \cong C_2^n$$

が得られる．以下，$n$ は 2 以上の整数であるとする．補題 2.1，[5]，[7] から，次の補題が得られる．

**補題 3.1.** $G$ が $G^{\cap 2} = G^{\mathrm{nil}}$ を満たす *Oliver* 群であれば，

$$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G)_{\mathcal{P}(G)} = \mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\mathrm{nil}}\}}_{\mathcal{P}(G)}$$

が成り立つ．

補題 3.1 から次の命題が直ちに得られる．

**命題 3.2.** $G$ は補題 *3.1* の仮定を満たす有限群とする．$G^{\mathrm{nil}}$ が奇数位数ならば，

$$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) = \mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\mathrm{nil}}\}}_{\mathcal{P}(G)}$$

が成り立つ．

命題 3.2 より

$$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(D_{2q_m}^n) = \mathrm{RO}_0(D_{2q_m}^n)^{\{(D_{2q_m}^n)^{\mathrm{nil}}\}}_{\mathcal{P}(D_{2q_m}^n)} \tag{3.1}$$

が得られるので，$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(D_{2q_m}^n)$ が $\mathbb{Z}$-自由加群になることがわかる．

**定理 3.3.** (1) $G = D_{2q_m}^2$ とする．このとき，

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}} \mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) \\
&= \left(\frac{p_1p_2\cdots p_m+3}{2}\right)^2 - \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i^2-9}{4} - \sum_{k=1}^{m} \frac{3^{m-k}}{2} \sum_{1\le t_1<\cdots<t_k\le m} \prod_{i=1}^{k} (p_{t_i}-1) - 3^m - 2^{m+1} - 1
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

(2) $\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}} \mathfrak{d}\mathfrak{S}(D_{2q_2}^2) \geq 46$ が成り立つ．等号が成立するのは，$(p_1, p_2) = (3, 5)$ のときである．

(3) $\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}} \mathfrak{d}\mathfrak{S}(D_{2q_3}^2) \geq 2714$ が成り立つ．等号が成立するのは，$(p_1, p_2, p_3) = (3, 5, 7)$ のときである．

## 3.2 定理 3.3 の証明

次の命題は容易に得られる．

**命題 3.4.** $G/N \cong C_2 \times \cdots \times C_2$ を満たすならば，

$$\lambda(G, N) = \nu(G, N)$$

が成り立つ．

以下，$G = D_{2q_m}^2$ とする．定理 2.4，(3.1)，命題 3.4 より，

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}} \mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) = \lambda(G, E) - \nu(G, E) \tag{3.2}$$

が得られるので，定理 3.3 (1) を証明するためには $\lambda(G, E)$ と $\nu(G, E)$ を求めたら良いことがわかる．

**命題 3.5.** 次の等式が成り立つ．

$$\lambda(D_{2q_m}^n, E) = \left(\frac{p_1p_2\cdots p_m+3}{2}\right)^n - \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{p_i+1}{2}\right)^n + m - 2^n.$$

証明. $D_{2q_m}^n$ の元の共役類の個数が

$$\left(\frac{p_1p_2\cdots p_m+3}{2}\right)^n$$

であり，その中で代表元の位数が 1，2，$p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ であるものの個数がそれぞれ 1，$2^n - 1$，$((p_i+1)/2)^n - 1$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ であることから得られる． □

**命題 3.6.** 次の等式が成り立つ．

$$\nu(G, E) = \sum_{k=1}^{m} \frac{3^{m-k}}{2} \sum_{1\le t_1<t_2<\cdots<t_k\le m} \prod_{i=1}^{k} (p_{t_i}-1) - \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i+3}{2} + 3^m + 2^{m+1} - 3.$$

証明. $H$ を任意の $G$ の素数冪位数でない巡回部分群 $\langle (h_1, h_2) \rangle$ とする．$h_1$，$h_2$ は $D_{2q_m}$ の元である．$m$ 以下の自然数 $k$ に対し，

$$
\begin{aligned}
X_0 &= \{(H)_G \mid |H| \equiv 1 \bmod 2,\ \gcd(\operatorname{ord}(h_1), \operatorname{ord}(h_2)) = 1\} \\
X_k &= \{(H)_G \mid |H| \equiv 1 \bmod 2,\ \gcd(\operatorname{ord}(h_1), \operatorname{ord}(h_2)) \text{ の素因数の個数は } k\} \\
X_{ev} &= \{(H)_G \mid |H| \equiv 0 \bmod 2\}
\end{aligned}
$$

とおく．但し，$i = 1, 2$ に対して $\mathrm{ord}(h_i)$ は $D_{2q_m}$ の元 $h_i$ の位数を表す．このとき，素数冪位数でない巡回部分群を代表元として持つ $G$ の部分群の共役類の全体は

$$\left(\coprod_{i=0}^{m} X_i\right) \coprod X_{ev}$$

である．更に，

$$\begin{aligned}
|X_0| &= 3^m - 2m - 1, \\
|X_1| &= \sum_{i=1}^{m} \frac{(3^{m-1}-1)(p_i - 1)}{2}, \\
|X_k| &= \sum_{1 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_k \le m} \frac{3^{m-k}}{2} \prod_{i=1}^{k} (p_{t_i} - 1) \ (2 \le k \le m), \\
|X_{ev}| &= 2(2^m - 1)
\end{aligned}$$

であることから，この命題が得られる． □

(3.2)，命題 3.5, 3.6 より (1) が得られる．(2), (3) は (1) より得られる．

# References


[1] T. tom Dieck: Transformation Groups and Representation Theory, Lect. Notes Math. **766**, Springer, Berlin, Heidelberg and New York, 1979.

[2] A. Koto–M. Morimoto–Y. Qi: The Smith sets of finite groups with normal Sylow 2-subgroups and small nilquotients, J. Math. Kyoto Univ. **48** (2008), 219–227.

[3] E. Laitinen–M. Morimoto: Finite groups with smooth one fix point actions on spheres, Forum Math. **10** (1998), 479–520.

[4] E. Laitinen–M. Morimoto–K. Pawałowski: Deleting-inserting theorem for smooth actions of finite nonsolvable groups on spheres, Comment. Math. Helv **70** (1995), 10–38.

[5] M. Morimoto: Smith equivalent $\mathrm{Aut}(A_6)$-representations are isomorphic, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), 3683-3688.

[6] M. Morimoto: Nontrivial $\mathcal{P}(G)$-matched $\mathfrak{S}$-related pairs for finite gap Oliver groups, J. Math. Soc. Japan **62** (2010), 623–647.

[7] M. Morimoto: Tangential representations of one-fixed-point actions on spheres and Smith equivalence, J. Math. Soc. Japan **67** (2015), 195–205.

[8] M. Morimoto: A necessary condition for the Smith equivalence of $G$-modules and its sufficiency, Math. Slov. **66** (2015), 1–24.

[9] M. Morimoto: One-fixed-point actions on spheres and Smith sets, Osaka J. Math. **53** (2016), 1003–1013.

[10] K. Pawałowski–L. Solomon: Smith equivalence and finite Oliver groups with Laitinen number 0 or 1, Algebr. Geom. Topol. **2** (2002), 843–895.

[11] K. Pawałowski–T. Sumi: Finite groups with Smith equivalent nonisomorphic representations, Proc. 33rd Symposium on Transformation Groups, in Yokohama 2006, (ed. T. Kawakami), Wing Co. Ltd. Wakayama, Japan, (2007), pp. 68–76.

[12] J. P. Serre: Linear Representations of Finite Groups, Graduate Texts in Mathematics 42, Springer, New York, 1977.

[13] T. Sumi: The gap hypothesis for finite groups which have an abelian quotient group not of order a power of 2, J. Math. Soc. Japan **64** (2012), 91–106.