The uniform perfectness of diffeomorphism groups of open manifolds

京都工芸繊維大学・基盤科学系　矢ヶ崎 達彦

Tatsuhiko Yagasaki
Faculty of Arts and Sciences
Kyoto Institute of Technology

1. 背景と主要結果

本論説は，多様体の 微分同相群 の 一様完全性・有界性・一様単純性 についての 福井和彦 氏・Tomasz Rybicki 氏との共同研究 [5] に関する概説である．

多様体の微分同相群 (より正確には，多様体の内部にコンパクト台を持って id とイソトピックな微分同相の成す群) は，群として 完全性 や 単純性 としていった特徴的な性質を持つことが古典的な結果として知られている (Herman [6], Thurston [12], Mather [8], Epstein [4], et al.)．また，コンパクト多様体の 内部において，コンパクト台を持つとは限らない id とイソトピックな微分同相の成す群 については，D. McDuff [9] が 完全性 を示している (cf. [7, 11])．

時を経て，その後の Gromov の仕事や幾何的群論の大きな流れは，代数的な対象に距離を導入し，より定量的に考察することを促した．群の 完全性／単純性 に関しても，群の各元を "交換子" や "1 つの元の共役元" の積として表すときの因子の個数を評価する より定量的な考察へと進み，群の 一様完全性・有界性・一様単純性 の研究が進展した．特に，多様体の微分同相群の 一様完全性・有界性・一様単純性 については，D. Burago, S. Ivanov, L. Polterovich [2] (2008) による，群の 交換子長 や 共役生成ノルム に関する一般的な考察 と 3 次元閉多様体の微分同相群の一様完全性 に関する結果に続き，坪井先生の一連の論文 [14, 15, 16] により，奇数次元 および 偶数高次元 の 閉多様体 の微分同相群の 一様完全性・一様単純性 に関する包括的な結果が得られている．以下で，$cld\, G$ は 群 G の 交換子長 cl に関する直径を表す．

定理 A. ([2], [14, 16]) M を n 次元 閉多様体 とし，$1 \le r \le \infty$, $r \ne n+1$ とする．

(1) $n = 2m+1$ $(m \ge 0)$ のとき $cld\, \mathrm{Diff}^r(M)_0 \le 4$ である．

(2) $n = 2m$ $(m \ge 1)$ の場合，

- (i) M が m-ハンドルを含まないハンドル分解 を持てば $cld\, \mathrm{Diff}^r(M)_0 \le 3$ となる．
- (ii) $m \ge 3$ で M が 高々 k 個の m-単体 を含む C^∞ 三角形分割 を持てば， $cld\, \mathrm{Diff}^r(M)_0 \le 4k + 11$ が成り立つ．

定理 B. ([15, 16]) M を n 次元連結閉多様体 $(n \geq 1)$ とし，$1 \leq r \leq \infty$, $r \neq n+1$ とする．もし (i) $n \neq 2, 4$ or (ii) $n = 2m$ で M が m-ハンドルを含まないハンドル分解を持つならば，$\mathrm{Diff}^r(M)_0$ は一様単純になる．

T. Rybicki [10] は，コンパクト多様体の内部について，ポータブルという特殊なクラスの場合に，コンパクト台を持つとは限らない id とイソトピックな微分同相の成す群の有界性に関する結果を得ている．

我々は，坪井先生の理論を基礎として，論文 [5] で (i) 境界を持つコンパクト多様体の境界の近傍で id である様な微分同相の成す群や (ii) 一般の開多様体のコンパクト台を持つとは限らない微分同相の成す群の場合にその議論を発展させ，下記の定理 I ∼ V を得た．以下，多様体は C^∞ 級で，境界を持っても良いとする．境界を持たない場合に限定する際は，閉／開多様体等明示する．記号 $\mathrm{Diff}^r(M)_0$ は C^∞ 多様体 M の "id_M と C^r イソトピックな C^r 微分同相" 全体の成す群を表し，M の部分集合 C に対して部分群 $\mathrm{Diff}^r(M, C)_0$ や $\mathrm{Diff}^r_c(M, C)_0$ は，上記のイソトピーに "C のある近傍上 id" や "コンパクト台" という条件を付加することで定義される．

定理 I. $n = 2m + 1$ $(m \geq 0)$, $1 \leq r \leq \infty$, $r \neq n+1$ の場合：

(1) M がコンパクト n 次元多様体のとき $cld\,\mathrm{Diff}^r(M, \partial)_0 \leq 4$.

(2) M が n 次元開多様体のとき $cld\,\mathrm{Diff}^r(M)_0 \leq 8$ かつ $cld\,\mathrm{Diff}^r_c(M)_0 \leq 4$.

定理 II. $n = 2m$ $(m \geq 1)$, $1 \leq r \leq \infty$, $r \neq n+1$ の場合：

(1) M はコンパクト n 次元多様体で $m \geq 3$ とする．M が高々 k 個の m-単体を含む C^∞ 三角形分割を持てば $cld\,\mathrm{Diff}^r(M, \partial)_0 \leq 2k + 7$ となる．

(2) M を境界を持たない n 次元多様体とする.

(i) M が m-ハンドルを含まないハンドル分解を持てば,

$cld\,\mathrm{Diff}^r(M)_0 \leq 6$ かつ $cld\,\mathrm{Diff}^r_c(M)_0 \leq 3$ が成り立つ．

(ii) $m \geq 3$ で M は高々 k 個の m-ハンドルを含むハンドル分解 $\mathcal{H}$ を持つとする．$\mathcal{H}$ のコア複体を $P_{\mathcal{H}}$ で表す．

(a) $P_{\mathcal{H}}$ の各 m 次元閉セルが自分自身に対して強 displacement property を持てば，次が成り立つ：

$cld\,\mathrm{Diff}^r(M)_0 \leq 3k + 8$ かつ $cld\,\mathrm{Diff}^r_c(M)_0 \leq 3k + 5$.

(b) $P_{\mathcal{H}}$ の各 m 次元閉セルが $P_{\mathcal{H}}$ の m 次元骨格に対して強 displacement property を持てば，次が成り立つ：

$cld\,\mathrm{Diff}^r(M)_0 \leq 2k + 10$ かつ $cld\,\mathrm{Diff}^r_c(M)_0 \leq 2k + 7$.

Displacement property については 3.2 節で補足する．定理 II (2)(ii) におけるコア複体 $P_{\mathcal{H}}$ の m 次元閉セルの the displacement property の有無は，偶数次元での交換子長の評価の議論の 1 つの障害になっており，ここでは，この条件を命題の中に直接取り込むこ

とで，その適応範囲を広げている．実際，この評価は M が閉多様体の場合でも有効である．例えば，2 つの m 次元球面 S^m $(m \geq 3)$ の積 $M = S^m \times S^m$ を考えよう．S^m は 1 つの 0-ハンドル と 1 つの m-ハンドル からなる標準的なハンドル分解を持ち，その積は M の $k = 2$ のハンドル分解を与える．このとき，定理 II (2)(ii)(a) より 次の評価を得る:

$$cld\,\mathrm{Diff}^r(S^m \times S^m)_0 \leq 11 \quad (m \geq 3).$$

また，定理 II (1) では三角形分割を用いているが，この場合 m-単体の個数 k は一般に大きくなる．[5] の Section 5.2 では，三角形分割の場合は m-単体全体を，ハンドル分解の場合はそのコア複体の m 次元閉セル全体を，それぞれ適当な displacement property を持つグループに分けて，各グループをまとめて扱うことで評価を改善している．([5, Theorem 5.1, Proposition 5.1] 参照).

M が無限個の m-ハンドルを持つ $2m$ 次元開多様体の場合でも，対応する無限個の m 次元閉セルをまとめて，適当な displacement property を持つ有限個のクラスに分けることができれば，第 4 節における開多様体上のイソトピーの分解と組み合わせて，交換子長に関する評価が得られる．[5] の Section 5.3.1 では，$P_{\mathcal{H}}$ の m 次元セル のグループ化 と cl や clb の評価ついての一般的な考察を行なっている．この結果は，閉多様体の被覆多様体や有限個のコンパクト多様体の無限和のように，M が有限個のパターンの繰り返しの形をしている場合に，実際に効果的に適応される．

定理 III. $n = 2m$ $(m \geq 3)$, $1 \leq r \leq \infty$, $r \neq n+1$ とする．

(1) $\pi : M \to N$ を n 次元閉多様体 N 上の C^∞ 被覆とする．もし N が高々 k 個の m-単体を含む C^∞ 三角形分割を持てば，

$$cld\,\mathrm{Diff}^r(M)_0 \leq 4k + 14 \quad \text{かつ} \quad cld\,\mathrm{Diff}^r_c(M)_0 \leq 2k + 7 \quad \text{が成り立つ．}$$

(2) M が ある n 次元閉多様体の分枝を許す無限連結和 (より一般に，有限個のコンパクト n 次元多様体の適当な整合性を持つ無限和) のとき，

$$cld\,\mathrm{Diff}^r(M)_0 < \infty \quad \text{かつ} \quad cld\,\mathrm{Diff}^r_c(M)_0 < \infty \quad \text{である．}$$

境界を持つコンパクト多様体の内部についての D. McDuff [9] や T. Rybicki [10] の結果は次の様に一般化される．

定理 IV. M を境界を持つコンパクト n 次元多様体 W の内部とし，$1 \leq r \leq \infty$, $r \neq n+1$ とする．このとき，$cld\,\mathrm{Diff}^r(M)_0 \leq \max\{cld\,\mathrm{Diff}^r(W, \partial)_0, 2\} + 2$ が成り立つ．特に，$n \neq 2, 4$ のとき $\mathrm{Diff}^r(M)_0$ は一様完全になる．

交換子の台に制約を加えて，球体に台を持つ交換子長 clb を考えることができる．より正確には，互いに素な球体の有限和／離散和に台を持つ交換子を考えることで 交換子長 clb^f ／ clb^d が定義される (2.2 節 参照)．上記の定理 I ∼ IV における 交換子長 cl の考察と並行して，交換子長 clb^f, clb^d についての対応する評価が得られる．交換子長 clb^f, clb^d の評価からは，共役生成ノルム ν_g に関する評価が得られ，後者からは，微分同相群の有界性や一様単純性が導かれる (2.3 節 参照)．これにより，次の結論が得られる．

定理 V. $1 \le r \le \infty, r \ne n+1$ とする．

[1] M が n 次元 コンパクト 連結 多様体 で $n \ne 2, 4$ のとき，

$\mathrm{Diff}^r(M, \partial)_0$ は 一様単純 である．

[2] M を n 次元 連結 開多様体 とする．次の各場合に，

$\mathrm{Diff}^r(M)_0$ は 有界 かつ $\mathrm{Diff}_c^r(M)_0$ は 一様単純 である．

(1) $n = 2m+1$ $(m \ge 0)$.

(2) $n = 2m$ $(m \ge 1)$ で M が 次の条件の 1 つを満たす．

(i) M は m-ハンドルを含まないハンドル分解 を持つ．

以下 $m \ge 3$ の場合:

(ii) M は 高々有限個 の m-ハンドルを含むハンドル分解 $\mathcal{H}$ を持ち，$P_{\mathcal{H}}$ の 各 m 次元 閉セル は 自分自身に対して 強 displacement property を持つ．

(iii) M は $2m$ 次元 閉多様体 上の C^∞ 被覆多様体 である．

(iv) M は 有限個 の n 次元 コンパクト 多様体 の 適当な 整合性をもつ 無限和

[3] M が 境界を持つ コンパクト n 次元 多様体 W の内部 のとき，

$\mathrm{Diff}^r(W, \partial)_0$ が 有界 ならば，$\mathrm{Diff}^r(M)_0$ も 有界 になる．

今後の問題として，多様体 M の位相 と $cld\,\mathrm{Diff}^r(M)_0$ や $clb^f d\,\mathrm{Diff}^r(M)_0$ の値の間にどの様な体系的な関係があるか興味ある点であるが，現時点では これらの正確な値，特に下からの評価 は 得られていない．

次節では，関連する基本用語 や 上記の主定理 を導くための 基本的な考え方 について 概説する．

2. 微分同相群 上の 交換子長・共役生成ノルム

本節では，群の一様完全性・有界性・一様単純性の定義，その基となる 交換子長 および 共役生成ノルム について，微分同相群の場合に重点を置きながら振り返る ([2, 15], [5]).

2.1. 共役不変ノルム．

群 G 上の 拡張された 共役不変ノルム とは，次の条件を満たす関数 $q : G \to [0, \infty]$ のことである：

(i) $q(g) = 0$ iff $g = e$ (ii) $q(g^{-1}) = q(g)$

(iii) $q(gh) \le q(g) + q(h)$ (iv) $q(hgh^{-1}) = q(g)$ $(g, h \in G)$.

特に $q(G) \subset [0, \infty)$ のとき，単に 共役不変ノルム と呼ぶ．G 上の 任意の共役不変ノルム が有界のとき，G は 有界であると言う．

拡張された 共役不変ノルム q に対して，逆像 $N = q^{-1}([0, \infty))$ は G の 正規部分群 であり，$q|_N$ は N 上の 共役不変ノルム を与える．逆に，N が G の 正規部分群 で q が N 上の 共役不変ノルム ならば，$q = \infty$ による q の 自明な拡張は，G 上の 拡張された 共役不変ノルム を定める．拡張された 共役不変ノルム q に対して G の部分集合 A の q-直径 を $qd\,A := \sup\{q(g) \mid g \in A\}$ により定める．

拡張された共役不変ノルム の 1 つの標準的な構成法 が次で与えられる：S を G の部分集合で，対称 $(S=S^{-1})$ かつ 共役不変 $(gSg^{-1}=S\ ({}^\forall g\in G))$ とする． このとき，S の正規化部分群 $N(S)$ について $N(S)=\bigcup_{k=0}^\infty S^k$ が成り立つ．したがって，拡張された共役不変ノルム $q_{(G,S)}: G\longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}\cup\{\infty\}$ を 次で定義することができる:

$$q_{(G,S)}(g) := \begin{cases} \min\{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0} \mid g=g_1\cdots g_k \text{ for some } g_1,\cdots,g_k\in S\} & (g\in N(S)), \\ \infty \quad (g\in G-N(S)). & \end{cases}$$

2.2. 交換子長.

群 G の交換子全体の集合 G^c は，対称 かつ 共役不変 であり，$[G,G]=N(G^c)$ となる．対応する $q_{(G,G^c)}$ を $cl=cl_G$ で表し，G の 交換子長 と呼ぶ．また，G および 部分集合 $A\subset G$ の cl_G に関する直径は $cld\,G$ および $cld(A,G)$ で表す．$G=[G,G]$，すなわち，G の任意の元が交換子の積としてかけるとき，G は 完全 であると言う．さらに，$cld\,G<\infty$, すなわち，G の任意の元が ある一定の個数以下の交換子の積 としてかけるとき, G は一様完全であると言う．有界完全群は一様完全である．

n 次元多様体の微分同相群の場合には，さらに交換子の台を考慮して，“n 次元球体 に台を持つ交換子 に関する 交換子長” を定義することができる．以下 $A\subset M$ に対して $M_A := M-\mathrm{Int}_M A$ とおく．M の閉集合 C に対して，記号 $\mathcal{B}_f^r(M,C)$ および $\mathcal{B}_d^r(M,C)$ により, $\mathrm{Int}\,M-C$ の中の 互いに素な n 次元 C^r 球体の 有限和 および “M の中での離散” 和全体の族を表す．群 $G\equiv \mathrm{Diff}^r(M,\partial M\cup C)_0$ において，$\mathcal{B}=\mathcal{B}_f^r(M,C)$, $\mathcal{B}_d^r(M,C)$ に付随して G^c の部分集合 $S_\mathcal{B} := \bigcup\{\mathrm{Diff}^r(M,M_D)_0^c \mid D\in\mathcal{B}\}$ が定まる．$S_\mathcal{B}$ は G において 対称 かつ 共役不変 であり，拡張された共役不変ノルム $q_{(G,S_\mathcal{B})}$ が得られる．これらを clb^f および clb^d で表す．ここで導入された clb^d は，開多様体 の 有界性 を扱う際に有用となる．

2.3. 共役生成ノルム.

群 G において，各元 $g\in G$ の 共役類 を $C(g)$ で表し，$C_g := C(g)\cup C(g^{-1})$ とおく．$N(g)=N(C_g)$ であり, C_g は G において 対称 かつ 共役不変 であるから, G 上の 拡張された 共役不変ノルム $q_{(G,C_g)}$ が定義される．このノルムを ν_g で表し，g に関する 共役生成ノルム と呼ぶ．任意の $h\in C_g$ に対して，$C_h=C_g$ かつ $\nu_h=\nu_g$ が成り立つ．$G^\times := G-\{e\}$ とおく．群 G が 一様単純 であるとは，ν_g $(g\in G^\times)$ が 一様有界 である，すなわち，ある $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ があって，任意の $f,g\in G$, $g\neq e$ に対して，f は g あるいは g^{-1} の共役元 の高々 k 個 の積としてかける ことである. 一様単純群 は 単純である．さらに，ある $g\in G^\times$ に対して ν_g が有界ならば，G は有界である．実際，もし $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ かつ $\nu_g\leq k$ ならば，G 上の 任意の 拡張された 共役不変ノルム q に対して $q\leq kq(g)$ が成り立つ．

微分同相群においては，ν_* は clb^f, clb^d により上から評価される (cf. [2, 5, 15]). 以下 $\mathcal{C}(X)$ および $\mathcal{K}(X)$ は 位相空間 X の 連結成分 全体の集合 および コンパクト部分集合 全体の集合 を表す.

M を n 次元多様体 とする．

定義 2.1. $g \in \mathrm{Diff}^r(M)$ とする.

(1) g が 連結成分ごとに非自明 $\iff$ $g|_U \neq \mathrm{id}_U$ $\;({}^\forall U \in \mathcal{C}(M))$

(2) g が 連結成分ごとに エンド-非自明 $\iff$

(i) $g|_U \neq \mathrm{id}_U$ $\;({}^\forall U \in \mathcal{C}(M) \cap \mathcal{K}(M))$,

(ii) $g|_V \neq \mathrm{id}_V$ for ${}^\forall(U, K, V)$ s.t. $U \in \mathcal{C}(M) - \mathcal{K}(M)$, $K \in \mathcal{K}(U)$

$V \in \mathcal{C}(U - K)$, $Cl_U V$ は 非コンパクト

$\mathcal{G}$ を $\mathrm{Diff}^r(M)_0$ の部分群とし，M の部分集合 A に対して, $\mathcal{G}_A := \mathcal{G} \cap \mathrm{Diff}^r(M, M_A)_0$ とおく．このとき，次の事実が知られている：

(i) $g \in \mathcal{G}$, $g(A) \cap A = \emptyset \implies (\mathcal{G}_A)^c \subset C_g^4$ in $\mathcal{G}$

(ii) $B \subset M$, ${}^\exists h \in \mathcal{G}$ s.t. $h(B) \subset A \implies (\mathcal{G}_B)^c \subset C_g^4$ in $\mathcal{G}$

このことから，次の評価が得られる.

補題 2.1. $g \in \mathrm{Diff}^r(M, \partial)_0$ とする.

(1) ([2, 15] et al.) g が 連結成分ごとに非自明 のとき

(i) $\nu_g \leq 4clb^f$ in $\mathrm{Diff}^r(M, \partial)_0$,

(ii) さらに，$g \in \mathrm{Diff}_c^r(M, \partial)_0$ ならば $\nu_g \leq 4clb^f$ in $\mathrm{Diff}_c^r(M, \partial)_0$.

(2) ([5]) g が 連結成分ごとに エンド-非自明 のとき，$\nu_g \leq 4clb^d$ in $\mathrm{Diff}^r(M, \partial)_0$.

3. コンパクト多様体の微分同相群における cl, clb^f の 評価

3.1. 基本補題.

微分同相 f の交換子長 の評価では，f と id を結ぶ イソトピー F の 変形・分解 が議論の中心となる．この際, イソトピー拡張定理は 1 つの重要な道具となり, 議論の過程で繰り返し用いられる．記号の補足をしておく．M の部分集合 C に対して, $\mathrm{Isot}^r(M, C)_0$ は M の C^r イソトピー $H = \{H_t\}_{t \in [0,1]}$ で，$H_0 = \mathrm{id}_M$ かつ C の ある近傍 U 上で $H_t|_U = \mathrm{id}_U$ $(t \in [0, 1])$ を満たすもの全体の成す群を表す．また，$\mathrm{Isot}_c^r(M, C)_0$ は コンパクト台 を持つイソトピーの成す $\mathrm{Isot}^r(M, C)_0$ の部分群を表す．自然な準同型 $R : \mathrm{Isot}_{(c)}^r(M, C)_0 \to \mathrm{Diff}_{(c)}^r(M, C)_0$: $R(H) = H_1$ がある.

微分同相群上での 交換子長 cl および clb^f の評価の基になるのは，次の基本補題である.

補題 3.1. ([2, 14, 15, 16]) M は n 次元多様体，$1 \leq r \leq \infty$, $r \neq n + 1$, $F \in \mathrm{Isot}_c^r(M, \partial)_0$, $f := F_1 \in \mathrm{Diff}_c^r(M, \partial)_0$ とし，次を仮定する:

$(*)$ ある $U \in \mathcal{K}(M)$, $V, W \in \mathcal{K}(\mathrm{Int}\, M)$, $\varphi \in \mathrm{Diff}^r(M, M_U \cup \partial M)_0$ が存在して

$U \supset V \supset W$, $\varphi(V) \subset W$, $\mathrm{supp}\, F \subset \mathrm{Int}_M V - W$ を満たす.

このとき，次の評価が成り立つ:

(1) $cl\, f \leq 2$ in $\mathrm{Diff}^r(M, M_U \cup \partial M)_0$.

さらに，次の分解が存在する: $f = gh$,

ただし，$g \in \mathrm{Diff}^r(M, M_U \cup \partial M)_0^c \cap \mathrm{Diff}^r(M, M_V)_0$ かつ $h \in \mathrm{Diff}^r(M, M_W)_0^c$.

(2) さらに，もし $clb^f \varphi \le k$ in $\mathrm{Diff}^r(M, M_U \cup \partial M)_0$ ならば，

$clb^f(f) \le 2k+1$ in $\mathrm{Diff}^r(M, M_U \cup \partial M)_0$ であり，

(1) において g, h を次の条件を満たす様に選べる：

$clb^f(g) \le 2k$ in $\mathrm{Diff}^r(M, M_U \cup \partial M)_0$ and $clb^f(h) \le 1$ in $\mathrm{Diff}^r(M, M_W)_0$.

以下で，$\mathcal{O}(X)$, $\mathcal{F}(X)$ は それぞれ 位相空間 X の 開集合／閉集合 全体の集合 を表す.

3.2. **Absorption property と Displacement property.**

基本補題 3.1 の 条件 $(*)$ における V, W, φ の存在は, M の コンパクト部分集合 の イソトピー による absorption property と displacement property に関係している (cf. [2, 14, 16]).

M を n 次元多様体とし，$O \in \mathcal{O}(M)$, $K \in \mathcal{K}(M)$, $L \in \mathcal{F}(M)$ とする．また，$\mathcal{P}$ を $\mathrm{Diff}_c(M, M_O)_0$ の元 に関する任意の条件とする.

定義 3.1. (Weak absorption property)

(1) $C \in \mathcal{K}(O)$ が weakly absorbed to K in O with $\mathcal{P}$

$\iff$ K の M における 任意の近傍 U に対して $\varphi \in \mathrm{Diff}_c(M, M_O)_0$ が存在して，$\varphi(C) \subset U$ かつ φ は 条件 $\mathcal{P}$ を満たす.

(2) K has the weak absorption property in O with $\mathcal{P}$

$\iff$ 任意の $C \in \mathcal{K}(O)$ が weakly absorbed to K in O with $\mathcal{P}$.

(3) $K \in \mathcal{K}(O)$ のとき：

K has the weak neighborhood absorption property in O with $\mathcal{P}$

$\iff$ K の あるコンパクト近傍が weakly absorbed to K in O with $\mathcal{P}$.

定義 3.2. (Displacement property)

(1) K is displaceable from L in O (or K has the displacement property for L in O)

$\iff$ ${}^\exists\psi \in \mathrm{Diff}_c(M, M_O)_0$ s.t. $\psi(K) \cap L = \emptyset$

(2) K is strongly displaceable from L (or K has the strong displacement property for L)

$\iff$ K is displaceable from L in any open neighborhood of K in M

補足 3.1.

(1) 論文 [5] の Sections 2, 3 の議論では，次の 3 条件 $\mathcal{P}$ が重要な役割を果たしている.

(i) rel L $\iff$ $\varphi(L) \subset L$ (ii) keeping L invariant $\iff$ $\varphi(L) = L$

(iii) $clb^f \le k$ $\iff$ $clb^f \varphi \le k$ in $\mathrm{Diff}_c(M, M_O)_0$ $(k \in \mathbb{Z}_{\ge 0} \cup \{\infty\})$

(2) K が the weak nbd absorption property in O を持つとき, 次の量を導入することができる： $clb^f(K; O) := \min\{k \in \mathbb{Z}_{\ge 0} \cup \{\infty\} \mid (*)_k\}$:

$(*)_k$ K has the weak nbd absorption property in O with $clb^f \le k$.

補題 3.1 (2) より，この量は clb^f のより詳しい評価に役立つ.

論文 [5] の Lemmas 2.4 - 2.6 では，上記の the weak absorption property と the strong displacement property についての適当な仮定の下での 補題 3.1 の帰結を，多様体が境界を持つ場合に重点をおいて考察している．

3.3. イソトピーの分解 と cl, clb^f の 評価.

一般のコンパクト多様体では，その微分同相 f を効果的に 交換子 に分解するために，まず，f と id を結ぶ イソトピー F を，基本補題 3.1 の条件 $(*)$ を満たすいくつかのイソトピーに分解し，各因子に 補題 3.1 を適応する．基本的な手順を理解するため，まず，閉多様体の場合の [14, 16] における議論を振り返える ([I])．次に，境界を持つコンパクト多様体の場合に生じる問題点とそれに対して [5] で用いた方策について議論する ([II], [III])．

[I] まず，M を $2m+1$ 次元 閉多様体 とし，$f \in \mathrm{Diff}(M)_0$ とする．M のハンドル分解 $\mathcal{H}$, それに付随する Morse 関数の勾配流 φ_t, $\mathcal{H}$ のコア複体の m-骨格 P, 双対 m-骨格 Q を考える．id_M と f を結ぶイソトピー F による P のトラック $\cup_{t\in[0,1]}F_t(P)$ と Q の間の交差は，(F を generic なもので近似した後で) 互いに素な球体の有限和 に台をもつ適当なイソトピー A との合成 AF を考えることにより取り除くことができる．この操作において，パラメータ t の役割に注意する必要がある．交差が解消されれば，イソトピー拡張定理 を用いて f は 共役を除いて $f = agh$ と分解できる．ただし，$g \in \mathrm{Diff}(M,Q)_0$, $h \in \mathrm{Diff}(M,P)_0$, $a \in \mathrm{Diff}(M,M_D)_0^c$, $D \in \mathcal{B}_f(M)$ である．$M - Q$ の 任意のコンパクト部分集合 は 勾配流 φ_t の下で P に向かって引き寄せられ，また，P は displaceable from itself in $M-Q$ であるから，基本補題 3.1 により g は効果的に交換子の積に分解される．同様に，$M-P$ の 任意のコンパクト部分集合 は 流れ φ_t^{-1} の下で Q に向かって引き寄せられ，また，Q は displaceable from itself in $M-P$ であるから，再び 基本補題 3.1 により h は効果的に交換子の積に分解される．これにより clf の効果的な評価が得られる．

M が $2m$ 次元の場合には，まず F の下での P のトラックと Q の交わりのうちで，低次元の部分の交差を取り除く．その操作を反映して F は適当に分解される．F から低次元の交差を取り除いて出来たイソトピー F' の下で，P の 各 m 次元開セル σ のトラックと その 双対セル σ^* との交差は本質的で除けないが，$Q-\sigma^*$ との交差は，($t=0$ での代数的な交差数が 0 なので) $m \geq 3$ のとき Whitny trick を用いて 互いに素な球体の有限和に台をもつイソトピーとの合成 により取り除かれる．この操作に対応してイソトピー F' はさらに分解される．このような操作を P の 各 m 次元 開セル に対して順次行う．もしハンドル分解 $\mathcal{H}$ が 三角形分割 $\mathcal{T}$ に付随したものであれば，P は $\mathcal{T}$ の m-骨格に一致し，m 次元 閉セル $Cl_M\sigma$ は $\mathcal{T}$ の m-単体 になる．したがって，$Cl_M\sigma$ は 必要な the strong displacement property を持ち，F' の分解における各因子に基本補題 3.1 が適応され，clf の効果的な評価が得られる．ただし，この場合，評価は m ハンドルの個数 に依存することになる．

[II] 次に M が 境界を持つ コンパクト $2m+1$ 次元 多様体の場合 を考察してみる．もし M のハンドル分解 $\mathcal{H}$ を 通常の形 にとれば，部分勾配流 φ_t は ∂M に横断的に交わる．

また，P は $\mathrm{Int}\, M$ に含まれているが，Q は ∂M と交わる．この場合，$\mathrm{Int}\, M - P$ の任意の コンパクト部分集合 は，流れ φ_t^{-1} により Q と ∂M の和に向かって引き寄せられる．しかし，この和は，M の外部に カラー を付けても not displaceable from itself となり，補題 3.1 が適応できないことになる．したがって，M が境界を持つ場合に 基本補題 3.1 を P, Q 両方に適応するためには，M 上の流れで，∂M を保ちながら P と Q を結ぶものが必要となる．その様な流れは，M に 三角形分割 $\mathcal{T}$ が与えられれば 自然に得られる．実際，P, Q を $\mathcal{T}$ の m-骨格，双対 m-骨格 として，$\mathcal{T}$ に付随する "境界に横断的な ハンドル分解" から得られる勾配流 を用いることもできるし，また，P と Q を底 とする 2 重写像柱 構造 に付随する流れを用いることもできる．[5] では，より直接的に扱える 後者を用いている ([5, Section 3.2] 参照)．ただ，三角形分割を用いる場合，一般に m-単体の個数は大きくなる．偶数次元での cl や clb^f の評価は m-単体 の個数に依存するので，[5, Theorem 5.1] では m-単体たちを適当に グループ化 して，評価の改善を図っている．

[III] M が n 次元 開多様体 の場合は，次の 第 4 節 で説明するように，イソトピーが与えられるごとに，cl や clb^f の評価は 適当な コンパクト n 次元 部分多様体 の増加列 上での議論に帰着される．M に ハンドル分解 $\mathcal{H}$ が与えられているとき，$\mathcal{H}$ で閉じた 1 つのコンパクト部分多様体 N のみで議論すると，[II] で述べた問題が生じるが，双対ハンドル分解 $\mathcal{H}^*$ で閉じたコンパクト部分多様体 L で $N \subset L$ となるものを取り，部分群 $\mathrm{Diff}^r(M, M_N)_0$ の $\mathrm{Diff}^r(M, M_L)_0$ の中での cl や clb^f についての 双対的な評価 を考えれば，[II] の問題は解消する．例として，[5, Proposition 5.1] から評価を抜粋する．

設定 3.1. M を 境界を持たない $2m$ 次元 多様体 $(m \geq 3)$ とし，$1 \leq r \leq \infty$, $r \neq 2m+1$ とする．次のデータが与えられているとする．

(i) $\mathcal{H}$ は M のハンドル分解，$\mathcal{S}$ は $P_{\mathcal{H}}$ の m 次元 開セル 全体の集合，

(ii) N, N_1, N_2 は M の コンパクト n 次元 部分多様体，$N \subset \mathrm{Int}\, N_1$, $N_1 \subset \mathrm{Int}\, N_2$,
N_1 は $\mathcal{H}$ について閉じており，N_2 は $\mathcal{H}^*$ について閉じている，
$\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \cap \mathrm{Int}\, N \neq \emptyset \ \curvearrowright\ \sigma \subset \mathrm{Int}\, N_1$,

(iii) $\{\sigma \in \mathcal{S} \mid \sigma \cap \mathrm{Int}\, N \neq \emptyset\} \subset \mathcal{C} \subset \{\sigma \in \mathcal{S} \mid \sigma \subset \mathrm{Int}\, N_1\}, \quad \mathcal{C} = \cup_{j=1}^k \mathcal{C}_j.$

命題 3.1. 設定 3.1 の下で，各 $Cl_M|\mathcal{C}_j|$ $(j = 1, \ldots, k)$ が M の中で 自分自身から strongly displaceable ならば，次が成り立つ．

(1) $cld(\mathrm{Diff}^r(M, M_N)_0, \mathrm{Diff}^r(M, M_{N_2})_0) \leq 3k + 5$,

(2) $clb^fd\,(\mathrm{Diff}^r(M, M_N)_0, \mathrm{Diff}^r(M, M_{N_2})_0) \leq 2(m+2)(k+1)$.

4. 開多様体の微分同相群における cl, clb^f の 評価

4.1. 開多様体におけるイソトピーの分解.

開多様体上のイソトピーは，次の補題が示すように，適当な コンパクト部分多様体 の列を選び，各部分多様体上で イソトピー拡張定理 を用いることで，コンパクト部分多様体の

離散和に台を持つ 2 つのイソトピーの合成に分解できる．これにより，開多様体上での cl や clb^f の評価に関する議論は，コンパクト部分多様体での議論に帰着される．

補題 4.1. M を n 次元開多様体とし，$F \in \mathrm{Isot}^r(M)_0$ とする．

(1) M のコンパクト n 次元部分多様体の増加列 $\{M_k\}_{k\geq 1}$ で，$\cup_k M_k = M$ かつ $F(M_{4k,4k+1} \times I) \subset \mathrm{Int}\, M_{4k-1,4k+2} \times I \ \ (k \geq 0)$ を満たすものが取れる．

(2) $M' := \bigcup_{k\geq 0} M_{4k+2,4k+3}$，$M'' := \bigcup_{k\geq 0} M_{4k,4k+1}$ とおくと，F の分解 $F = GH$ で $G \in \mathrm{Isot}^r(M, M')_0$，$H \in \mathrm{Isot}^r(M, M'')_0$ を満たすものが取れる．

ただし，$M_0 = \emptyset$, $M_{i,j} := (M_j)_{M_i}$ $(0 \leq i < j < \infty)$ とおいた．上記の様な列 $\{M_k\}_{k\geq 1}$ を M の an exhausting sequence と呼ぶ．列 $\{M_k\}_k$ は帰納的に構成され，M_k に対して M_{k+1} はいくらでも大きく取れる．

4.2. イソトピーの分解 と cl, clb^f の 評価.

M を n 次元開多様体とする．補題 4.1 の応用として $cld\,\mathrm{Diff}^r(M)_0$ および $clb^d d\,\mathrm{Diff}^r(M)_0$ に対する次の評価式が得られる．

補題 4.2. $\{L_i\}_{i\geq 1}$ を M の an exhausting sequence とする．

(1) $cld\,\mathrm{Diff}^r(L_i; \partial)_0 \leq \ell \ (1 \leq i < \infty)$, $\quad cld\,\mathrm{Diff}^r(L_{ij}; \partial)_0 \leq m \ \ (1 \leq i < j < \infty)$

$$\Longrightarrow \ cld\,\mathrm{Diff}^r(M)_0 \leq \max\{\ell + m, 2m\} \quad \text{and} \quad cld\,\mathrm{Diff}^r_c(M)_0 \leq \ell$$

(2) $clb^f d\,\mathrm{Diff}^r(L_i; \partial)_0 \leq \ell \ (1 \leq i < \infty)$, $\quad clb^f d\,\mathrm{Diff}^r(L_{ij}; \partial)_0 \leq m \ \ (1 \leq i < j < \infty)$

$$\Longrightarrow \ clb^d d\,\mathrm{Diff}^r(M)_0 \leq \max\{\ell + m, 2m\} \quad \text{and} \quad clb^f d\,\mathrm{Diff}^r_c(M)_0 \leq \ell$$

結び.

以上，論文 [5] の 主要結果・関連する基礎事項・基本的な考え方 について概説したが，cl や clb^f, clb^d のより詳しい評価やその証明等，詳細については [5] を直接参照してください．

References

[1] A.Banyaga, *The structure of classical diffeomorphisms*, Kluwer Akademic Publisher, Dordrecht, 1997.

[2] D.Burago, S.Ivanov and L.Polterovich, *Conjugation-invariant norms on groups of geomatric origin*, Advanced Studies in Pure Math. 52, (2008), Groups of diffeomorphisms, 221-250.

[3] W.D.Curtis, The automorphism group of a compact groups action, Trans. Amer. Math. Soc., **203** (1975), 45-54.

[4] D.B.A.Epstein, *The simplicity of certain groups of homeomorphisms*, Compositio Math., **22** (1970), 165-173.

[5] K.Fukui, T.Rybicki, T.Yagasaki, *The uniform perfectness of diffeomorphism groups of open manifolds*, arXiv math: 1905.07664.

[6] M.Herman, *Simplicité du groupe des difféomorphismes de classe C^∞, isotopes à l'identité, du tore de dimension n*, C.R.Acad. Sci. Paris **273** (1971), 232-234.

[7] W. Ling, *Normal subgroups of the group of automorphisms of an open manifold that has boundary*, Preprint, (1977).

[8] J. Mather, *Commutators of diffeomorphisms I, II* and *III*, Comm. Math. Helv., **49** (1974), 512-528, **50**(1975), 33-40 and **60** (1985), 122-124.

[9] D. McDuff, *The latice of normal subgroups of the group of diffeomorphisms or homeomorphisms of an open manifold*, J. London Math. Soc., **18** (1978), 353-364.

[10] T. Rybicki, *Boundedness of certain automorphism groups of an oepn manifold*, Geom. Dedicata, **151** (2011), 175-186.

[11] P. A. Schweitzer, *Normal subgroups of diffeomorphism and homeomorphism groups of* $\mathbf{R}^n$ *and other open manifolds*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **31** (2011), 1835-1847.

[12] W. Thurston, *Foliations and groups of diffeomorphisms*, Bull. Amer. Math. Soc., **80** (1974), 304-307.

[13] T. Tsuboi, *On the group of foliation preserving diffeomorphisms*, Foliations 2005, ed. by P.Walczak et al., World scientific, Singapore, (2006), 411-430.

[14] T. Tsuboi, *On the uniform perfectness of diffeomorphism groups*, Advanced Studies in Pure Math. 52, (2008), Groups of diffeomorphisms, 505-524.

[15] T. Tsuboi, *On the uniform simplicity of diffeomorphism groups*, In Differential Geometry, World scientific Publ., Hackensack, N.J., (2009), 43-55.

[16] T. Tsuboi, *On the uniform perfectness of the groups of diffeomorphism groups of even-dimensional manifolds*, Comm. Math. Helv., **87** (2012), 141-185.