分解不可能かつ可約な擬リーマン対称空間のコンパクト Clifford–Klein 形の存在問題について

前多 啓一 (東京大学数理科学研究科)
Keiichi Maeta (Graduate School of Mathematical Siences, The University of Tokyo)

2019 年 10 月 8 日

1　はじめに

本稿のテーマは，分解不可能かつ可約な擬リーマン対称空間のコンパクト Clifford–Klein 形の存在問題である．まず，2 つの視点から問題の背景について述べ，その後，この問題に対し 2 つのアプローチを試みる．1 つは，Lie 群の性質を用いた手法，もう 1 つは Lie 代数のコホモロジーを用いた手法である．

1.1　分解不可能な擬リーマン対称空間

多様体 M の各点 $p \in M$ に対し，その点を孤立固定点に持つような接続を保つ微分同相写像 $\sigma_p : M \to M$ をもつものを対称空間という．この σ_p は点対称と呼ばれる．対称空間 M は等質空間であり，M に推移的に作用する Lie 群 G およびその閉部分群 H を用いて $M = G/H$ と表すことができる．この Lie 群の対 (G, H)(また，その Lie 代数の対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$) を対称対という．対称空間は，球面やトーラス，上半平面など，等質空間の中でも「性質の良い」多様体のクラスであり，幾何学的に重要な例を多く含む．その中でも，リーマン対称空間 (H がコンパクト) の分類は É. Cartan によって行われた．それは，単連結なリーマン対称空間は接空間への H の作用によって，既約リーマン対称空間の直積として分解できることに基づき，既約リーマン対称空間を分類するというものである．その後，Berger[Ber57] によって，非リーマン (H が非コンパクト) を含む既約対称空間が分類された．しかし，擬リーマン対称空間の分類問題は未解決である．これは，擬リーマン対称空間は接空間に退化する部分空間を持つため，可約であったとしても，既約擬リーマン対称空間の積に分解するとは限らないためである．擬リーマン対称空間としてそれ以上分解できない「最小単位」は，分解不可能な擬リーマン対称空間と呼ばれ，その分類が擬リーマン対称空間の分類の目標となる．分解不可能なローレンツ対称空間は Cahen–Wallach[CW70] によって，符号 $(n, 2)$ の擬リーマン対称空間は Kath–Olbrich ら [KO09] によって完全に分類されている．

1.2　Cliffor–Klein 形

Clifford–Klein 形を定義するために，群作用の性質である固有不連続性を復習しておく．

定義 1.1 (固有不連続). 群 Γ が空間 M に固有不連続に作用するとは，任意の 2 点 $p, q \in M$ に対し，その近傍 U, V が存在して，$\#\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma U \cap V \neq \emptyset\} < \infty$ となることを言う．

群 Γ の多様体 M への作用が固有不連続かつ自由であることと，$\Gamma\backslash M$ の多様体構造が一意に存在して，自然な全射 $\pi : M \to \Gamma\backslash M$ が可微分な被覆写像となることは同値となる．もし作用が固有不連続でなければ，$\Gamma\backslash M$ は Hausdorff ですらなくなり，固有不連続であって，自由でなければ，オービフォルドと呼ばれる空間になる．

以下では，G を Lie 群，H をその閉部分群とする．Clifford–Klein 形とは，等質空間 G/H を，固有不連続かつ自由に作用する離散部分群 $\Gamma \subset G$ で割った商空間 $\Gamma\backslash G/H$ に，上でのべた多様体構造を入れた空間をいう．$\pi : G/H \to \Gamma\backslash G/H$ は被覆写像であり，G/H の G-不変な幾何構造は，Clifford–Klein 形 $\Gamma\backslash G/H$ も自然に持つことになる．

G/H がリーマン等質空間 (H がコンパクト) の場合，任意の離散部分群 $\Gamma \subset G$ は，空間に固有不連続かつ自由に作用するため，Clifford–Klein 形の研究は G の離散部分群の研究とほぼ同義となる．一方，G/H が非リーマン (H が非コンパクト) の場合には，離散部分群の作用が固有不連続になるとは限らない．この場合に対する 1980 年の小林俊行による研究 [Kob89] 以降，非リーマンな等質空間に対する Clifford–Klein 形が研究され始めた．小林によって提起された Clifford–Klein 形の重要な未解決問題の 1 つに，コンパクト Clifford–Klein 形をもつ等質空間 G/H の分類問題がある．

問題 1.2. [Kob89] コンパクト Clifford–Klein 形をもつ等質空間 G/H を分類せよ．

この問題に対する手法として，Benoist-Kobayashi の固有性判定法に基づく Lie 群論的手法 ([Ben96],[Kob96]) や，行列要素の漸近挙動の解析に基づく手法 ([Mar97])，Lie 代数のコホモロジーを用いた手法 ([KO90],[Mor15]) などが用いられている．既約な対称空間 G/H に対しては，現在までに 12 系列の対称空間に対しコンパクト Clifford–Klein 形の存在が知られている [KY05]．既約な対称空間の場合，リー群 G は簡約群であり，多くの研究においては簡約群の Clifford–Klein 形の分類を目標とされてきた．

1.3 問題および主結果

既約な対称空間に対する Clifford–Klein 形の問題についての研究が多い一方，「最小単位」である分解不可能な擬リーマン対称空間のコンパクト Clifford–Klein 形は少ない．そこで，次のような，問題 1.2 の部分問題を考える．

問題 1.3. 可約かつ分解不可能な擬リーマン対称空間 G/H でコンパクト Clifford–Klein 形を持つものを分類せよ．

この問題に対する先行研究としては，Lorentz 対称空間に関して [KO15] がコンパクト Clifford–Klein 形を持つための必要十分条件を与えているが，一般の次元に対しては調べられていない．

詳しい記号の定義は 2 章以降で述べることにして，主結果を先に述べる．一つ目は，コンパクト Clifford–Klein 形を持つための必要条件である．

定理 1.4. $D = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)$, $D' = \mathrm{diag}(b_1, \cdots, b_n)$ とするとき，$G_{D,D'}/H$(定義 2.1 を参照) がコンパクト Clifford–Klein 形を持つならば，ある $\{\varepsilon_i\} \in \{\pm 1\}^n$ で

$$\sum_{c_i \in \mathbb{R}} \varepsilon_i c_i = 0, \qquad \sum_{c_i \in \sqrt{-1}\mathbb{R}} \varepsilon_i |c_i| = 0,$$

を満たすものが存在する．ただし，$c_i := \sqrt{a_i}\sqrt{b_i}$ である．

例えば，符号 $(4,1)$ の可約かつ分解不可能な Lorentz 対称空間のパラメーター空間は，球面で与えられる．この必要条件を満たす空間は，その中でも，以下の図における円で与えられる．実際には，この条件の稠密な部分集合の空間がコンパクト Clifford–Klein 形を持つことが知られている [KO15].

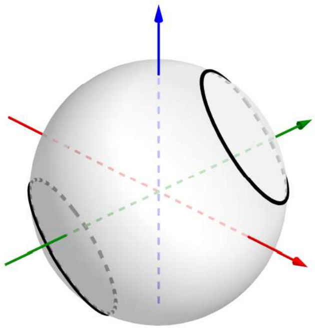

図 1　パラメーター空間および必要条件を満たすパラメータ

主結果の二つ目は，符号 $(2,2)$ におけるコンパクト Clifford–Klein 形をもつ空間の分類定理である．

定理 1.5. 分解不可能な擬リーマン対称空間 G/H で以下を満たすものは，$G_{I_{1,1},-I_{1,1}}/H$ に局所同型である．

1. G は可解群であり，G/H の移換群である．
2. G/H はコンパクト Clifford–Klein 形を持つ．
3. G/H の次元は 4 以下である．

2　対称空間 $G_{D,D'}/H$ の定義

まず，主結果に登場する擬リーマン対称空間を定義する．

定義 2.1. $D, D' \in GL(n,\mathbb{R})$ を対称かつ可逆な行列とし，$W \in \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ を以下で定義する．

$$W := \begin{pmatrix} & D' \\ D & \end{pmatrix} \in \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}).$$

ハイゼンベルク代数 $\mathfrak{h}_n := \mathbb{R}\text{-span}\{X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_n,Z\}$ $([X_i,Y_j]=\delta_{ij}Z)$ に対し，以下の写像を考える．

$$\rho : \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}) \to \operatorname{Der}\mathfrak{h}_n \quad X \mapsto \begin{pmatrix} X & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき，以下のように定義する．

$$\mathfrak{g}_{D,D'} := \mathbb{R}W \ltimes_\rho \mathfrak{h}_n,\ \mathfrak{h} := \mathbb{R}\text{-span}\{Y_1,\cdots,Y_n\}.$$

部分空間 $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}$ を，$\mathfrak{q} := \mathbb{R}\text{-span}\{W,X_1,\cdots,X_n,Z\}$ とすると，$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ となり，$G_{D,D'}/H$ の接空間は自然に $\mathfrak{q}$ と同一視できる．さらに，$\mathfrak{q}$ 上の内積を，以下で定義する．

$$g := \begin{pmatrix} 0 & & -1 \\ & D'^{-1} & \\ -1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

$G_{D,D'}$ を，$\mathfrak{g}_{D,D'}$ を Lie 代数に持つような 1-連結 Lie 群とし，H を，$\mathfrak{h}$ に対応する解析的部分群とする．

命題 2.2. D' の符号を (p,q) とするとき，$G_{D,D'}/H$ は符号 $(p+1,q+1)$ の分解不可能かつ可約な対称空間の構造を持つ．

3 Lie 群的なアプローチ

3.1 主定理の証明の流れ

この節では，定理 1.5 の証明の流れについて述べる．

まず，定理の条件を満たすもののリストは，以下で与えられる．

事実 3.1. [KO09] 分解不可能かつ可約な符号 $(2,2)$ の，冪零でない可解な擬リーマン対称空間の Lie 代数の対称対は以下の D,D' に対応する $(\mathfrak{g}_{D,D'},\mathfrak{h})$ で与えられる．

1. $D=\mathrm{diag}(\pm 1,a), D'=I_{1,1}\ (a\in\mathbb{R}^\times)$,
2. $D=-P^{-1}\begin{pmatrix}\nu & 1\\ 1 & -\nu\end{pmatrix}Q,\ D'=-Q^{-1}\begin{pmatrix}-\nu & 1\\ 1 & \nu\end{pmatrix}P,$

   ただし，$P=\begin{pmatrix}1 & \nu\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}0 & 1/(1+\nu^2)\\ 1 & -\nu/(1+\nu^2)\end{pmatrix}\quad(\nu\in\mathbb{R}),$
3. $D_\pm=\begin{pmatrix}\pm 2 & -1\\ -1 & \end{pmatrix},\quad D'_\pm=\pm\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}.$

したがって，対称空間 $G_{D,D'}/H$ のコンパクト Clifford–Klein 形の存在を調べれば良い．それを判定するための必要十分条件を与えるために，ハイゼンベルク群 H_n の部分群 L_C を定義しておく．

定義 3.2. $C\in M(n,\mathbb{R})$ に対し，$\mathfrak{l}_C$ を，以下の行列で定まる線形写像 $f_C:\mathfrak{h}_n\to\mathfrak{h}_n$ の像とする．

$$\begin{pmatrix}I_n & C & \mathbf{0}\\ O & O & \mathbf{0}\\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 1\end{pmatrix}\in M(2n+1,\mathbb{R})$$

ただし，$\mathfrak{h}_n$ の基底は，$\{X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots Y_n,Z\}$ で与える．このとき，$\mathfrak{l}_C$ は $\mathfrak{h}_n$ の部分代数であり，これに対応する $G_{D,D'}$ の解析的部分群を L_C と書く．

このとき，次の命題が成り立つ．

命題 3.3. 可逆な対称行列 D,D' に対し，以下の条件は同値である．

(a) 対称空間 $G_{D,D'}/H$ はコンパクト Clifford–Klein 形を持つ．

(b) ある行列 $C\in M(n,\mathbb{R})$ で，以下の条件を満たすものが存在する．

  (i) 行列 A_t+B_tC は全ての $t\in\mathbb{R}$ に対し，可逆である．

  (ii) 部分群 $L_C\subset G_{D,D'}$ はある $l\in G_{D,D'}\setminus H_n$ に対し，T_l-不変な格子を持つ．

ここで，T_l は $l\in G_{D,D'}$ に関する内部自己同型であり，$A_t,\ B_t\in M(n,\mathbb{R})$ は次で定義される行列である．

$$X_t=\begin{pmatrix}A_t & B_t\\ * & *\end{pmatrix}:=\exp t\begin{pmatrix} & D'\\ D & \end{pmatrix}.$$

この命題を，事実 3.1 のリストの D, D' に対し適用することで，求める定理を得ることができる．以下では，この命題の証明のキーアイディアを述べたい．

3.2 連続類似と (L)-condition

コンパクト Clifford–Klein 形の存在を調べる上で重要な考え方の一つとして，連続類似がある．これは，小林 [Kob89] によって導入されたアイディアであり，以下の事実が本質的である．

事実 3.4. [Kob89] Lie 群 L が多様体 M に可微分に作用しているとし，$\Gamma \subset L$ を余コンパクト離散部分群とする．このとき，以下が成り立つ．

1. $\Gamma\backslash M$ がコンパクト $\iff$ $L\backslash M$ がコンパクト
2. Γ の作用が固有不連続 $\iff$ L の作用が固有

ただし，L の作用が固有であるとは，任意のコンパクト集合 $S \subset M$ に対し，集合 $L_S := \{\ell \in L \mid \ell S \cap S \neq \emptyset\}$ が L の中でコンパクトであることを言う．離散部分群の作用に対しては，固有不連続性と固有性は一致する．

この事実により，扱いづらい離散部分群の作用を L の作用に置き換えて考えることができる．特に，L が連結であれば，Lie 代数を用いた解析が可能である．例えば，G が冪零 Lie 群のとき，その離散部分群 Γ は，syndetic hull と呼ばれる連結閉 Lie 部分群 L を保つことが知られている ([Sai57], [BK10])．しかし，この事実は一般の可解群に対しては成り立たない．そこで，以下の概念を新しく導入する．

定義 3.5 ((L)-condition)**.** Lie 部分群 $L' \subset G_{D,D'}$ が (L)-condition を満たすとは，$L_0 = L' \cap H_n$ が連結であり，ある $l \in L' \setminus L_0$ で，$L' = \langle l \rangle L_0$ となるものが存在することを言う．

この (L)-condition は，連結とは限らないが，「連結に近い」部分群の条件であり，Lie 代数を用いた解析が可能になる．さらに，以下で述べるように，$G_{D,D'}/H$ にコンパクト Clifford–Klein 形が存在するとすれば，(L)-condition を満たす部分群が常に存在する．

命題 3.6. Γ を $G_{D,D'}$ の離散部分群で，$G_{D,D'}/H$ に余コンパクトに作用するとする．$L_0 = L \cap H_n$ とすると，$l \in \Gamma$ で，$L' := \langle l \rangle L_0$ となる L' が存在し，Γ を余コンパクトに含む．さらに，$\Gamma \cap L_0$ は L_0 の余コンパクト部分群である．

次の命題は，(L)-condition を満たす L' の余コンパクト性と固有性の判定条件を与えている．

命題 3.7 (余コンパクト性と固有性の判定条件)**.** D, D' を対称かつ可逆な行列とし，L' を $G_{D,D'}$ の部分群で (L)-condition を満たすとする．$L_0 := L' \cap H_n$ とするとき，次の条件は同値である．

(a) L' の $G_{D,D'}/H$ への作用が余コンパクトかつ固有である．
(b) ある行列 $C \in M(n, \mathbb{R})$ が存在し，$L_0 = L_C$ であり，$A_t + B_t C$ は任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し可逆である．(記号は定義 3.2 および命題 3.3 を参照)

命題 3.6 と命題 3.7 を用いることで，$G_{D,D'}/H$ がコンパクト Clifford–Klein 形を持つならば，命題 3.3 の条件 (b)(i) が成り立つことがわかる．条件 (b)(ii) は L_C が余コンパクトな離散部分群 Γ を持つための必要十分条件である．

4　コホモロジーを用いたアプローチ

4.1　コホモロジーに現れる障害

この節では，定理 1.4 の証明の流れについて述べる．この証明には，Lie 代数のコホモロジーに現れるコンパクト Clifford–Klein 形の障害を用いる．この手法は小林-小野 [KO90] において提起され，森田 [Mor15] により発展した．

G を Lie 群とし，H をその閉部分群，$\mathfrak{g}$ および $\mathfrak{h}$ を G および H の Lie 代数とする．G/H の不連続群 $\Gamma \subset G$ に対し，Clifford–Klein 形 $\Gamma\backslash G/H$ を考える．このとき，以下の包含写像を考える．

$$\eta : (\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^{\mathfrak{h}} \simeq \Omega(G/H)^G \to \Omega(G/H)^\Gamma \simeq \Omega(\Gamma\backslash G/H)$$

ただし，$\Omega(G/H)$ は G/H 上の微分形式の集合，$\Omega(G/H)^G$ は G-不変な微分形式の部分集合を表す．この写像は，コホモロジーの準同型を誘導する．

$$\eta : H^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \to H^*(\Gamma\backslash G/H)$$

このとき，以下の事実が成り立つ．

事実 4.1 ([BH72],[KO90])**.** Clifford–Klein 形 $\Gamma\backslash G/H$ がコンパクトならば，

$$\eta : H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \to H^N(\Gamma\backslash G/H).$$

は単射である．ただし，$N := \dim(G/H)$ とする．

森田 [Mor15] はこれを以下の形の障害として定式化した．

事実 4.2 ([Mor15],[Mor17])**.** K_H を H の極大コンパクト部分群とし，$\mathfrak{k}_H$ をその Lie 代数とする．G/H がコンパクト Clifford–Klein 形を持つならば，自然な全射 $\pi : G/K_H \to G/H$ が誘導する以下の写像は単射である．

$$\pi^* : H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \to H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}_H; \mathbb{R}),$$

ただし，$N := \dim(G/H)$ とする．

4.2　対称空間 $G_{D,D'}/H$ への適用

特に，G が 1 連結な可解 Lie 群のとき，コンパクトな連結部分群は自明群しかないため [Hoc65]，$G_{D,D'}/H$ に対し，上の事実を適用すると，以下のような障害になる．

命題 4.3. 等質空間 $G_{D,D'}/H$ がコンパクト Clifford–Klein 形を持つならば，自然な全射 $\pi : G_{D,D'} \to G_{D,D'}/H$ が誘導する以下の写像 π^* は単射である．

$$\pi^* : H^N(\mathfrak{g}_{D,D'}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \to H^N(\mathfrak{g}_{D,D'}; \mathbb{R}) \quad (N = n + 2).$$

次の補題が定理の証明に本質的である．

補題 4.4. 可逆な対角行列 $D = \mathrm{diag}(a_i), D' = \mathrm{diag}(b_i)$ に対し，以下は同値である．

(a) $\pi^* : H^N(\mathfrak{g}_{D,D'}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \to H^N(\mathfrak{g}_{D,D'} : \mathbb{R})$ は単射である.
(b) $\exists \varepsilon \in \{\pm 1\}^n$ s.t. $\sum_{c_i \in \mathbb{R}} \varepsilon_i c_i = 0, \quad \sum_{c_i \in \sqrt{-1}\mathbb{R}} \varepsilon_i |c_i| = 0.$

ただし, $c_i := \sqrt{a_i}\sqrt{b_i}$ である.

定理 1.4 の証明は, 以下の図式のように, 命題 4.3 と補題 4.4 を組み合わせることで従う.

$$\begin{tikzcd}
G_{D,D'}/H \text{ がコンパクト Clifford–Klein 形を持つ} \arrow[r, Rightarrow, "\text{命題 4.3}"'] & \pi^* \text{ は単射} \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{補題 4.4}"] \\
 & \exists \varepsilon \in (\pm 1)^n \text{ s.t. } \sum_{c_i \in \mathbb{R}} \varepsilon_i c_i = 0, \quad \sum_{c_i \in \sqrt{-1}\mathbb{R}} \varepsilon_i |c_i| = 0
\end{tikzcd}$$

また, D, D' が 2 次対称行列のとき, 次の命題が言える.

命題 4.5. D, D' が 2 次対称行列のとき, 次は同値である.

(a) $\pi^* : H^N(\mathfrak{g}_{D,D'}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \to H^N(\mathfrak{g}_{D,D'} : \mathbb{R})$ は単射である.
(b) $\exists k \in \mathbb{R}^\times$ s.t. $D' = kD^{-1}$.

この命題を使うことで, 次の補題が簡単に証明でき, 定理 1.5 をより簡潔に証明できる.

補題 4.6. 事実 3.1 の D, D' のうち, 2.(a) における $a = 1$ 以外のパラメータに対応する空間は, コンパクト Clifford–Klein 形を持たない.

参考文献

[Ben96] Y. Benoist. Actions propres sur les espaces homogènes réductifs. *Ann. of Math. (2)*, 144(2):315–347, 1996.

[BH72] R. Bott and A. Haefliger. On characteristic classes of Γ-foliations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 78:1039–1044, 1972.

[BK10] A. Baklouti and I. Kédim. On non-abelian discontinuous subgroups acting on exponential solvable homogeneous spaces. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (7):1315–1345, 2010.

[Hoc65] G. Hochschild. *The structure of Lie groups.* Holden-Day, Inc., San Francisco-London-Amsterdam, 1965.

[KO90] T. Kobayashi and K. Ono. Note on Hirzebruch's proportionality principle. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 37(1):71–87, 1990.

[KO09] I. Kath and M. Olbrich. On the structure of pseudo-Riemannian symmetric spaces. *Transform. Groups*, 14(4):847–885, 2009.

[KO15] I. Kath and M. Olbrich. Compact quotients of Cahen-Wallach spaces. *ArXiv e-prints*, January 2015.

[Kob89] T. Kobayashi. Proper action on a homogeneous space of reductive type. *Math. Ann.*, 285(2):249–263, 1989.

[Kob96] T. Kobayashi. Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups. *J. Lie Theory*, 6(2):147–163, 1996.

[KY05] T. Kobayashi and T. Yoshino. Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces—revisited. *Pure Appl. Math. Q.*, 1(3, Special Issue: In memory of Armand Borel. Part 2):591–663, 2005.

[Mar97] G. Margulis. Existence of compact quotients of homogeneous spaces, measurably proper actions, and decay of matrix coefficients. *Bull. Soc. Math. France*, 125(3):447–456, 1997.

[Mor15] Y. Morita. A topological necessary condition for the existence of compact Clifford-Klein forms. pages 1–13, May 2015.

[Mor17] Y. Morita. A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford-Klein forms. *Selecta Math. (N.S.)*, 23(3):1931–1953, 2017.

[Sai57] M. Saito. Sur certains groupes de Lie résolubles. II. *Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo*, 7:157–168, 1957.