On the complexes from posets of p-subgroups

福井大学医学部　藤田亮介 (Ryousuke Fujita)
School of Medical Sciences, University of Fukui

概 要

このノートでは, 部分群複体に関するホモトピー理論に関する現在までの研究状況を紹介する. その後に, Quillen 予想解決に向けてのオリジナルなアイデアを述べる.

1 部分群複体の幾何学的実現

G を有限群, p を G の位数の 1 つの素因数とする. そのとき, 次の集合を考える.

$$S_p(G) = \{G \text{ の非自明な } p\text{-部分群}\}$$
$$A_p(G) = \{G \text{ の非自明な基本アーベル } p\text{-部分群}\}$$

これらは通常の包含関係により, 半順序集合 (poset) になる. $r+1$ 個の全順序部分群列を r-単体 (r-simplex) とする単体的複体構造が入る. その複体をそれぞれ $\Delta(S_p(G))$, $\Delta(A_p(G))$ とかく. すなわち,

$$\Delta(S_p(G)) = \{(H_0 < H_1 < \cdots < H_r) \mid H_i \in S_p(G),\ r \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$
$$\Delta(A_p(G)) = \{(H_0 < H_1 < \cdots < H_r) \mid H_i \in A_p(G),\ r \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

$\Delta(S_p(G))$, $\Delta(A_p(G))$ をそれぞれ p における **Brown 複体**, **Quillen 複体**という.

1 つの poset $\mathcal{P}$ があれば, 上の真似をして単体的複体 $\Delta(\mathcal{P})$ が定義できる. これを $\mathcal{P}$ から定まる**順序複体 (order complex)** という. このことばを使うと, Brown 複体とは poset $S_p(G)$ から定まる順序複体のことである. Quillen 複体についても同様.

$\Delta(S_p(G))$, $\Delta(A_p(G))$ の幾何学的実現をそれぞれ $|\Delta(S_p(G))|$, $|\Delta(A_p(G))|$ とかく. 幾何学的実現の定義を明確にしよう. $\Delta(S_p(G))$ の頂点集合 $S_p(G)$ の元の個数を n とすると, n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ を考え, $H_i \in S_p(G)$ を $\mathbb{R}^n$ の点 $e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ と同一視する. ただし, e_i は i 番目の成分が 1 で他の成分が 0 という点を表す. $\sigma = (H_0 < H_1 < \cdots < H_r) \in \Delta(S_p(G))$ に対して, σ により張られる, $\mathbb{R}^n$ の凸集合を $|\sigma|$ と書く. すなわち,

$$|\sigma| = \left\{ t_o H_0 + \cdots + t_r H_r \,\middle|\, t_i \geqq 0,\ \sum_{i=0}^{r} t_i = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

そのとき,

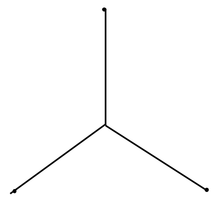
$$|\Delta(S_p(G))| := \bigcup_{\sigma \in \Delta(S_p(G))} |\sigma|$$

とおき, $|\Delta(S_p(G))|$ に $\mathbb{R}^n$ の部分空間の位相を入れたものが $\Delta(S_p(G))$ の幾何学的実現である. $|\Delta(A_p(G))|$ についても同様に定義する.

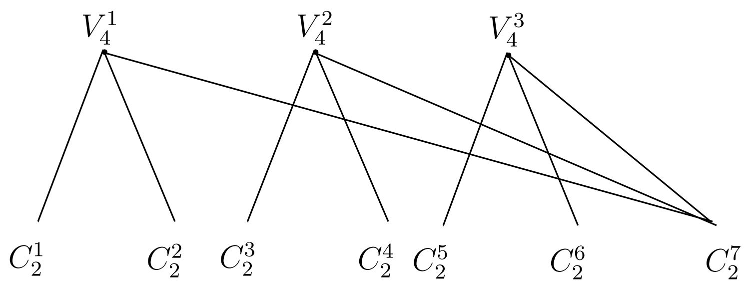
例 1. $G = C_2$ のとき, $S_2(C_2) = A_2(C_2) = \{C_2\} \Longrightarrow \Delta(S_2(C_2)) = \Delta(A_2(C_2)) = \{(C_2)\} \Longrightarrow |\Delta(S_2(C_2))| = |\Delta(A_2(C_2))| = \{$ 1 点 $\}$

例 2. $G = C_{p^2}$ のとき, $S_p(C_{p^2}) = \{C_p, C_{p^2}\},\ A_p(C_{p^2}) = \{C_p\} \Longrightarrow \Delta(S_p(C_{p^2})) = \{(C_p),\ (C_p < C_{p^2})\},\ \Delta(A_p(C_{p^2})) = \{(C_p)\} \Longrightarrow |\Delta(S_p(C_{p^2}))| =$ 単位区間 I, $|\Delta(A_p(C_{p^2}))| = \{$ 1 点 $\}$

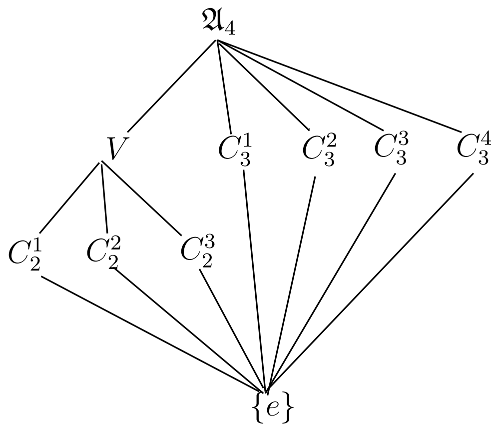
例 3. $G = C_2 \times C_2$ のとき, $S_2(C_2 \times C_2) = A_2(C_2 \times C_2) = \{C_2^1,\ C_2^2,\ C_2^3,\ C_2 \times C_2\} \Longrightarrow \Delta(S_2(C_2)) = \Delta(A_2(C_2)) = \{(C_2^1),\ (C_2^2),\ (C_2^3),\ (C_2^1 < C_2 \times C_2),\ (C_2^2 < C_2 \times C_2),\ (C_2^3 < C_2 \times C_2)\}$ ここで, C_2^j $(j = 1,\ 2,\ 3)$ は位数 2 の巡回群である.
$\Longrightarrow |\Delta(S_2(C_2))| = |\Delta(A_2(C_2))| =$ 下図のような tree



例 4. $G = D_{12}$ のとき, $S_2(D_{12}) = A_2(D_{12}) = \{C_2^1,\ C_2^2,\ C_2^3,\ C_2^4,\ C_2^5,\ C_2^6,\ C_2^7,\ V_4^1,\ V_4^2,\ V_4^3\}$, $S_3(D_{12}) = A_3(D_{12}) = \{C_3\}$, ここで, C_2^j $(j = 1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$ は位数 2 の巡回群, V_4^k $(k = 1,\ 2,\ 3)$ はクライン群とする. ハッセ図は以下の通り.



例 5. $G = \mathfrak{A}_4$ (= 4 次交代群) の部分群のハッセ図は以下の通りである.



例でもわかる通り, 有限群 G の位数が小さいものは何とか絵に描けるが, そうでなければ, とてもじゃないが手に負えない. そこでホモトピー概念を用いて, Brown 複体や Quillen 複体を特徴付けたい. この方面の研究者らがバイブルにしていた論文は, Daniel Quillen による次のものである:

Homotopy Properties of the Poset of Nontrivial p-Subgroups of a Group, Advances in mathematics **28**, 101-128(1978)

上の Quillen の論文, また多くのこの分野に関する論文でも, ポセットとその順序複体, さらにその幾何学実現を同じ記号で記述しているため, 初学者には混乱が生じやすい. したがって, このノートでは敢えてその違いを強調するために, 省略せずに正確に記述している. つまり, ポセットは $S_p(G)$, 複体は $\Delta(S_p(G))$, その幾何学的実現は $|\Delta(S_p(G))|$ というように. この論文は題名の通り, 部分群複体の幾何学的実現, 特に $|\Delta(S_p(G))|$ や $|\Delta(A_p(G))|$ のホモトピー性質を調べ上げている. 主定理は「有限可解群 G が非自明な p-正規部分群をもつための必要十分条件は, $|\Delta(A_p(G))|$ が可縮になることである」であり, 可解性を外した一般の有限群の場合を, オープン・プロブレムとして提示している. つまり, 現在 “Quillen Conjecture” とよばれているものは次である:

「任意の有限群 G は, $|\Delta(A_p(G))|$ が可縮であるならば, G は非自明な p-正規部分群をもつ」

注. 逆の証明, すなわち十分条件の証明は容易に示すことができる.

ホモトピー同値性を保つ “より個数が少ないポセットを見出す” ことは極めて自然である. 例えば, その 1 つとして Bouc 複体 $\Delta(B_p(G))$ がある. その定義は

$$B_p(G) = \{P \in S_p(G) \,|\, O_p(N_G(P)) = P\}$$

ここで, $O_p(N_G(P))$ は P の正規化群 $N_G(P)$ の極大正規 p 部分群を意味する. 定義式からこのポセットは Sylow p 部分群全部を含むことが直ぐわかる. しかも $|\Delta(B_p(G))|$ は $|\Delta(A_p(G))|$ とホモトピー同値, したがって, $|\Delta(S_p(G))|$ ともそうである. 一般に, $B_p(G)$ が一番元の個数が小さいから, Bouc 複体をターゲットにして Quillen Conjecture にアタックしようとするのは極めて自然なことである.

他に, 最近発見された興味あるポセットを紹介しよう.

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_p(G) &=: \{U \in \mathcal{S}(G) \mid U \text{ は } G \text{ の非自明なべき零 } p \text{ 部分群}\}, \\
\mathcal{L}_p(G) &=: \{U \in \mathcal{N}_p(G) \mid U > O_p(Z(N_G(U)))\}
\end{aligned}$$

とおくとき, 次が成り立つ:

定理 ([3], 2016, Iiyori and Sawabe)
包含写像 $\iota : |\Delta(\mathcal{B}_p(G))| \hookrightarrow |\Delta(\mathcal{L}_p(G))|$ はホモトピー同値である. したがって,

$$|\Delta(\mathcal{S}_p(G))| \simeq |\Delta(\mathcal{A}_p(G))| \simeq |\Delta(\mathcal{B}_p(G))| \simeq |\Delta(\mathcal{L}_p(G))|.$$

2　McCord の定理

一方, Stong は 1960〜70 年代にかけ「有限位相空間論」, 特にそのホモトピー理論を創り上げた. 我々の部分群複体理論とは何ら関係ないように思われるが, 実は大いに関係がある. Stong の結果を述べると,

「有限 T_0 空間 $S_p(G)$ が可縮になるための必要十分条件は, G が非自明な p-正規部分群をもつことである」

statement からして, Stong は Quillen Conjecture を強く意識していたことが見て取れる. 有限ポセットと有限 T_0 空間は 1 対 1 に対応するから, $S_p(G)$ は有限 T_0 空間であることに注意しておく. では, 有限 T_0 空間 $S_p(G)$ と $|\Delta(A_p(G))|$ のギャップは何なのか? これに解答を与えたのが McCord である. さて, McCord の結果を述べよう.

McCord の定理
有限 T_0 空間 X とそれに対応するコンパクト多面体 $|\Delta(X)|$ は弱ホモトピー同値 (= 各次元のホモトピー群が同型) であって、$\mu_X : |\Delta(X)| \to X$ を弱ホモトピー同値写像として次の可換図式

$$\begin{array}{ccc} |\Delta(X)| & \xrightarrow{|\Delta(f)|} & |\Delta(Y)| \\ {\scriptstyle \mu_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_Y} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

が存在する. ここで, f は有限 T_0 空間 X, Y 間の連続写像, $|\Delta(f)|$ は多面体 $|\Delta(X)|, |\Delta(Y)|$ 間の連続写像である.

上の図式より「f が弱ホモトピー同値写像である」ことと「$|\Delta(f)|$ がホモトピー同値写像である」ことは同値である. 特に $X = A_p(G), Y = S_p(G), f = \iota(=$ 包含写像$)$ とおくとき ι が弱ホモトピー同値写像であることがわかる. 直ちに $|\Delta(\iota)| : |\Delta(A_p(G))| \to |\Delta(S_p(G))|$ はホモトピー同値写像である. Stong, McCord の有限位相空間論の立場から見ると, Quillen は (図式の) 上だけを見ていたことになるだろう. 図式から「$|\Delta(X)|$ が可縮であることと, X が homotopically trivial であることは同値」(“ homotopically trivial ”とは全ての次元のホモトピー群が trivial と定義する) だから, 結局, Quillen Conjecture は

「有限 T_0 複体 $S_p(G)$ が homotopically trivial ならば, $S_p(G)$ は可縮である」

と言い換えることができる. すなわち, $S_p(G)$ では 1 点と弱ホモトピー同値ならば, ホモトピー同値になると主張している. もちろん, こんなことは有限位相空間でも一般には成り立たない. 「ホモトピー同値」と「弱ホモトピー同値」のギャップを問題にしているわけで, トポロジー的には非常に興味をそそられる問題である.

以上のような先行研究の流れを踏まえて, 私の最近の Quillen Conjecture へのオリジナル・アプローチは「有限位相空間論を適用し, $S_p(G)$ よりももっと扱いやすいものに取り換えて, その観点からアタックする」ものであった. ところが, $B_p(G)$ や $A_p(G)$ に取り換えたところで, そのぞれの空間の特殊性から一般論が展開できない. ただし, G が特殊な場合,

例えばベキ零の場合には $B_p(G)$ が 1 点 (= Sylow p-部分群) に定まるので, 常に $|\Delta(B_p(G))|$ は可縮, すなわち $\Delta(B_p(G))$ が可縮になることがわかる.

3 Quillen Conjecture へのアプローチ

背理法でやる. $O_p(G)=1$ とする. このとき有限 T_0 空間 $S_p(G)$ は可縮でない. $S_p(G)=\emptyset$ であるならば, $\Delta(S_p(G))=\emptyset$ となってしまい, $|\Delta(S_p(G))|$ が可縮であることに反する. したがって, $S_p(G)\neq\emptyset$ である. $P\in S_p(G)$ をとって,

(i) $|\Delta(S_p(G)_{<P})|$ が可縮のとき, (ii) $|\Delta(S_p(G)_{<P})|$ が非可縮のとき

で場合分けする. **(i) のとき,** p-部分群 P が基本アーベルならば, $|\Delta(S_p(G)_{<P})|$ が非可縮になってしまうので, $P\in S_p(G)\backslash A_p(G)$ である. ここで,

$$Lk_{\Delta(S_p(G))}(P)=\Delta(S_p(G)_{<P})*\Delta(S_p(G)_{>P})$$

を考察する. ここで, $Lk_{\Delta(S_p(G))}(P)$ は $\Delta(S_p(G))$ の P におけるリンク複体である. 今 $|\Delta(S_p(G)_{<P})|$ が可縮だから,

$$|Lk_{\Delta(S_p(G))}(P)|\simeq\{1\text{ 点 }\}*|\Delta(S_p(G)_{>P})|\simeq\{1\text{ 点 }\}$$

したがって, $|Lk_{\Delta(S_p(G))}(P)|$ は可縮である. よって, $|\Delta(S_p(G))|\simeq|\Delta(S_p(G))\backslash\{P\}|\simeq|\Delta(S_p(G)\backslash\{P\})|$. 有限 T_0 空間として $S_p(G)$ と $S_p(G)\backslash\{P\}$ は弱ホモトピー同値であるから, $\chi(S_p(G))=\chi(S_p(G)\backslash\{P\})$ である. 実は $\chi(S_p(G))=\chi(|\Delta(S_p(G))|)=\chi(|\Delta(S_p(G)\backslash\{P\})|)=\chi(S_p(G)\backslash\{P\})=1$ である. ここで, $\chi(X)$ は X のオイラー標数である.

一方,

$$S_p(G)=(S_p(G)\backslash\{P\})\bigcup\{P\}\ (\text{disjoint union})$$

だから,

$$\chi(S_p(G)))=\chi(S_p(G)\backslash\{P\})+\chi(\{P\})$$

この等式より, $\chi(\{P\})=0$ となる. これは矛盾である.

(ii) のとき, p-部分群 P が非基本アーベルならば, $|\Delta(S_p(G)_{<P})|$ が可縮になってしまうので, $P\in A_p(G)$ である. ここで, (i) と同様に

$$|Lk_{\Delta(S_p(G))}(P)|=|\Delta(S_p(G)_{<P})|*|\Delta(S_p(G)_{>P})|$$

を考察しよう. 今 $P\in A_p(G)$ だから, $S_p(G)_{<P}=A_p(G)_{<P}$ である. したがって, $|\Delta(A_p(G)_{<P})|$ が非可縮となる. まず $A_p(G)_{<P}\neq\emptyset$ とする. このときは, P には位数 p^2 以上の元が少なくとも 1 つは存在する. 今 $\Omega_1(Z(P))=\Omega_1(P)<P$ より, $\Omega_1(P)\in A_p(G)_{<P}$ である. これは $|\Delta(A_p(G)_{<P})|$ が可縮になることを意味するので矛盾である. $A_p(G)_{<P}=\emptyset$ である. $\Delta(S_p(G)_{>P})=\emptyset$ ならば, $S_p(G)=\{P\}$ となってしまい, $S_p(G)$ は可縮になって矛盾である. 実際,

$$S_p(G)=\{P\}\bigcup(S_p(G)-\{P\})\ (\text{disjoint union})$$

であって, $<P, >P$ が空集合かつ $|\Delta(S_p(G))|$ は可縮だから, P と順序同等なものしかない. よって, $S_p(G)=\{P\}$ である. 以下, $S_p(G)_{>P}\neq\emptyset$ とする.

<u>Claim</u> $|\Delta(S_p(G)_{>P})|$ は可縮である.
Proof $|\Delta(S_p(G)_{>P})|\simeq|\Delta(N_G(P)_{>P})|$ より, 以下 $|\Delta(N_G(P)_{>P})|$ が可縮であることを示す. $S_p(G)_{>P}\ni Q$ をとる. そのとき, $P<N_Q(P)<N_G(P)$ である. $N_Q(P)\leq Q$ に注意すると,

$$P<N_Q(P)=O_p(N_Q(P))<O_p(N_G(P)).$$

よって, $|\Delta(N_G(P)_{>P})|\simeq\{1\text{ 点 }\}$.

$|\Delta(S_p(G)_{>P})|$ が可縮になれば (i) と全く同様な議論が展開できる. 今, $|\Delta(S_p(G)_{>P})|$ が可縮だから,

$$|Lk_{\Delta(S_p(G))}(P)|=|\Delta(S_p(G)_{<P})|*|\Delta(S_p(G)_{>P})|\simeq|\Delta(S_p(G)_{<P})|*\{1\text{ 点 }\}$$

したがって, $|Lk_{\Delta(S_p(G))}(P)|$ は可縮である. (i) の議論により $\chi(\{P\})=0$ となるが, これは矛盾である.

参考文献

[1] Barmak, J.A., *Algebraic Topology of Finite Topological Spaces and Applications*, Lecture Notes in Math, 2032, Springer-Verlag, 2011.

[2] Fujita, R. and Kono, S., *Some aspects of a finite T_0-G-space*, RIMS Koukyuroku. **1876** (2014), 89–100.

[3] Iiyori, N. and Sawabe, M., *Partially ordered set of non-trivial nilpotent π-subgroups*, Osaka J. Math. **53**(2016), 731-750.

[4] McCord, M.C., *Singular homotopy groups and homotopy groups of finite topological spaces*, Duke. Math. J. **33** (1966), 465-474.

[5] Quillen D., *Homotopy properties of the poset of nontrivial p-subgroups of a group*, Advances in Math. **28**(1978), 101–128.

[6] Stong, R.E., *Finite topological spaces*, Trans.Amer.Math.Soc. **123** (1966), 325-340.

[7] Stong, R.E., *Group actions on finite spaces*, Discrete Math. **49** (1984), 95-100.