A VARIANT OF TRACE FORMULA RELATED WITH TRIPLE PRODUCTS OF MODULAR FORMS
(モジュラー形式の三重積に関係する変形された跡公式)

杉山 真吾　(日本大学　理工学部数学科)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
COLLEGE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY,
NIHON UNIVERSITY

Abstract. 本記事では, あるテスト関数 f の積分核の対角成分への制限 $K_f(g,g)$ と even な Hecke-Maass カスプ形式 φ の積の積分を考察することによって得られた "φ の重みつき跡公式" について解説する. 得られた公式の応用として, even な Hecke-Maass カスプ形式 f に対して, $L(1/2, f\times F)$ が非ゼロになるような GL_3 のコホモロジカル Hecke 固有形式 F が無限に存在することを定量的に示す. 本研究は都築正男氏 (上智大学) との共同研究に基づく.

1. Introduction

正の偶数 $k \geqslant 4$ に対して, 重さ k, レベル 1 の楕円カスプ形式全体を $S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ とする. この空間は有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間である. $k<12$ の時は $S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))=\{0\}$ であるが, 主結果は $4\leqslant k<12$ の場合にも成り立つので, $4\leqslant k<12$ の場合も考慮する.

$S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ の Petersson 内積に関する正規直交基底 H_k を, Hecke 固有形式からなるように取っておく. Petersson 内積は Poincaré 上半平面 $\mathfrak{H}$ 上の積分を用いて以下のように定義される:

$$\langle f_1, f_2\rangle := \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}} f_1(z)\overline{f_2(z)}y^k\frac{dxdy}{y^2} \qquad (f_1,f_2\in S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))).$$

この内積に関する f の Petersson ノルムを $\|f\|$ と書くことにする. $f\in H_k$ と良い関数 $\phi:\mathfrak{H}\to\mathbb{C}$ に対して,

$$\mu_f(\phi)=\int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}} \phi(z)f(z)\overline{f(z)}y^k\frac{dxdy}{y^2}$$

とおく. μ_f は確率測度となる. この測度は Quantum Unique Ergodicity (量子一意エルゴード性, 略して QUE) の観点で研究されている.

エルゴード[1]という言葉は人名ではなく, ギリシャ語の ergon(エルゴン: 仕事量) と hodos(オドス: 道, 経路) を混ぜて Boltzmann(1884 年) が造ったもので, 統計熱力学に端を発する. エルゴード性をハミルトニアンのスペクトルによって量子的に記述したものを量子エルゴード性 (略して QE) と呼ぶ. そして, QE よりさらに強い性質として QUE がある[2]. QUE とは次の予想である (cf. Rudnik-Sarnak [22] の予想):

「負曲率の閉 Riemann 多様体 M の Laplacian Δ のスペクトル展開に現れる固有値 $0=\lambda_0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$ に対する固有関数からなる正規直交系を $\{\phi_j\}_{j=0}^{\infty}$ とする: $\Delta\phi_j=\lambda_j\phi_j$. この時, M の体積要素を $d\mu$ とすると, 重み付き測度 $|\phi_j|^2d\mu$ を $\lambda_j\to\infty$ とした時の弱収束極限が存在し, その極限は $\mathrm{vol}(M)^{-1}d\mu$ で与えられるだろう.」

[1] 日本語ではエルゴード的, エルゴード性という言い回しはあるが, エルゴードという名詞は見たことがない. 英単語だと ergodic, ergodicity はよく目にするが, ergod という単語を見たことはない

[2] ergodic だが uniquely ergodic でない例や, QE だが QUE でない例がある. Hassell [3] で分かりよく解説されている.

ちなみに, $\mathbb{N}$ の中で自然密度 1 の集合 J があって $\{|\phi_j|^2 d\mu\}_{j\in J}$ が弱収束するという性質は, QE と呼ばれる. QUE 予想に関しては, Lindenstrauss[3] [14] の貢献が有名であろう. この予想は非コンパクト多様体, 特にモジュラー曲線 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}$ の場合にも考察が可能であり, この場合は ϕ_j は Maass 波動形式になる. もちろん, 非コンパクトの場合は連続スペクトルの寄与なども考慮して予想を定式化する必要がある. Maass 波動形式を正則なモジュラー形式に置き換えた問題 (holomorphic analogue of QUE) ももちろん考えることができて, 多様体 M がモジュラー多様体のような数論的な多様体の場合には, 保型 L 関数の特殊値の積分表示, 劣凸評価 (subconvexity 評価) が crucial に関わってくる. QUE や arithmetic QUE の研究に関する歴史については Sarnak [23] を参照されたし.

モジュラー形式のレベルが 1 の場合の holomorphic QUE は, Holowinsky, Soundararajan [5] によって 2010 年に解決された.

Theorem 1 (holomorphic Quantum Unique Ergodicity)**.** *k 毎に $f \in H_k$ を取っておく. この時, 弱収束の意味で*

$$\lim_{k\to\infty} \mu_f = \frac{3}{\pi}\frac{dxdy}{y^2}$$

が成り立つ.

この系として, f の零点集合 N_f の k に関する合併 $\bigcup_k N_f$ が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}$ の中で稠密にあることが分かる ([21]). 上記の予想が解決される前に, Luo [15] が 2002 年に QUE の平均版を解決した. 証明は Zagier の公式 [31] のそれに少し似ている.

Theorem 2 ([15])**.** *$A \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}$ を任意の可測集合とする ($\frac{dxdy}{y^2}$ に関する可測集合を考えている). 任意の $\epsilon > 0$ に対して,*

$$\frac{1}{\dim S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))}\sum_{f\in H_k}\mu_f(A) = \int_A \frac{3}{\pi}\frac{dxdy}{y^2} + O(k^{-1/2+\epsilon}).$$

また, Luo, Sarnak [16] は 2004 年に μ_f の 2nd moment に関する漸近公式を証明した.

Theorem 3 ([16])**.** *簡単のため, ϕ をレベル 1 の even Hecke-Maass カスプ形式とする. 任意の $\epsilon > 0$ に対して,*

$$\frac{2}{K}\sum_{K\leqslant k<2K}\sum_{f\in H_k} L(1,\mathrm{Sym}^2(f)))|\mu_f(\phi)|^2 \xrightarrow{K\to\infty} \pi L(1/2,\phi)\|\phi\|^2.$$

ここで, $L(s,\mathrm{Sym}^2(f))$ は非完備対称 2 次 L 関数で, $L(s,\phi)$ は非完備スタンダード L 関数である.

Remark 4. *$L(1,\mathrm{Sym}^2(f))$ という因子は邪魔に思うかもしれない. しかし "a little more effort" により, この因子を取り除くことが可能であるというコメントが [16, p.772] の Theorem 1 直前にある. 実際に取り除くには, プレプリント [24] の 5 章の計算をまねる必要がある[4]. そしてその因子を取り除くと, 極限値は $C(\phi)\pi L(1/2,\phi)\|\phi\|^2$ に置き換わる. ここで $C(\phi)$ は, ϕ の素数 p における Hecke 固有値 $\lambda_\phi(p)$ を用いて*

$$C(\phi) = \frac{1}{\zeta(2)}\prod_p\left(1 - \frac{p^{-1}\lambda_\phi(p)}{p^{1/2}+p^{-1/2}}\right)$$

で定義される. $\lambda_\phi(p)$ は一般 Ramanujan-Petersson 予想が $|\lambda_\phi(p)| \leqslant 2$ と同値になるように正規化しておく. この無限積が収束することは一般 Ramanujan-Petersson 予想に関連する Kim-Sarnak bound $|\lambda_\phi(p)| \leqslant 2p^{7/64}$ ([11, Appendix 2]) から分かる.

[3] QUE とその数論への応用に関して, 2010 年に Fields 賞受賞.

[4] [24] の 5 章では, GL_3 のスタンダード保型 L 関数の族の零点の個数に関するレベルアスペクト評価 [12] を引用している. しかし, 本来引用すべきは [12] の結果そのものではなく, [12] の零点個数評価の重さアスペクト版である. ここで, 無限素点のパラメーターに関するアスペクトを重さアスペクトと呼んでいる. 重さアスペクト版は, 無限素点の情報に依存する定数を無視せずに書き下すことでレベルアスペクトの場合とほぼ同様に示される.

この記事では以下の結果を紹介する．

(1) $n \in \mathbb{N}$ とレベル 1 の even Hecke-Maass カスプ形式 ϕ に対する $\sum_{f\in H_k} \mu_f(\phi)\lambda_f(n)$ の exact formula を与える (Theorem 5)．これから Luo の漸近公式 (Theorem 2) の refinement (Theorem 7) も得られる．

(2) Luo-Sarnak の公式の類似として 1st moment に関する

$$\lim_{K\to\infty} \frac{2}{K} \sum_{K\leqslant k<2K} (-1)^{k/2} \sum_{f\in H_k} \mu_f(\phi)\lambda_f(n)$$

の公式を与える (Theorem 8).

(3) 応用として $L(1/2, \phi \times F) \neq 0$ となる $\mathrm{GL}_3(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ のコホモロジカルなカスプ形式 F が無限に存在することを定量的に示す (Corollary 9)．実際に F は対称 2 次リフト $F = \mathrm{Sym}^2(f)$ $(f \in H_k)$ によって与えられる．

2. Main results and Applications

結果の説明に入ろう．レベル 1 で双曲ラプラシアン $-y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ の固有値が $\frac{1-\nu_\infty^2}{4}$ である even Maass カスプ形式 ϕ であって，Hecke 固有形式になっているものを一つ取っておく．ここでは $n = 1$ における ϕ の Fourier 係数が 1 になるように正規化しておく．ϕ に対応する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の保型表現のユニタリー性より，$\nu_\infty \in i\mathbb{R} \cup (-1, 1)$ となる．Selberg 予想 (Ramanujan-Petersson 予想の無限素点版) はレベル 1 の時は知られており，したがって $\nu_\infty \in i\mathbb{R}$ が成り立つ．これは例えば [4, Notes for chaper eleven] に書いてある．他にも例えば [20, §7] に，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}$ の基本領域の面積の大小関係を用いた簡明な証明[5]があって，その証明から $(1-\nu_\infty^2)/4 \geqslant 3\pi^2/2 \approx 14.8044066 > 1/4$ が分かる．ただしこの評価は粗くて，[4, Appendix C] の表によると，$|\nu_\infty/2i|$ の最小値はおよそ 13.7797513518907 である (ただし表の下に “the last digit in each number is uncertain” との記述あり) から，even Maass カスプ形式のラプラシアンの固有値の最小値は 189.6315... くらいである．これは 14.8044066 よりだいぶ大きい．

素数 p に対して，複素数 ν_p を用いて Hecke 固有値を $\lambda_\phi(p) = p^{\nu_p/2} + p^{-\nu_p/2}$ と表しておく．無限素点の場合と同様に，$\nu_p \in i\mathbb{R} \cup (-1, 1)$ となる．

以下の 2 つの特殊関数を用意する $(a \in \mathbb{R})$.

$$\mathcal{O}_k^{+,(\nu_\infty)}(a) = \frac{2\pi}{\Gamma(k)} \left| \frac{\Gamma(k + \frac{\nu_\infty - 1}{2})}{\Gamma_\mathbb{R}(\frac{1+\nu_\infty}{2})} \right|^2 \mathrm{ch}_{\{|x|>1\}}(a)\sqrt{a^2-1}\,\mathfrak{P}^{1-k}_{\frac{\nu_\infty-1}{2}}(|a|),$$

$$\mathcal{O}_k^{-,(\nu_\infty)}(a) = \frac{\pi i}{\Gamma(k)} \left| \Gamma\left(k + \frac{\nu_\infty - 1}{2}\right) \right|^2 \mathrm{sgn}(a)\sqrt{a^2+1}\{\mathfrak{P}^{1-k}_{\frac{\nu_\infty-1}{2}}(ia) - \mathfrak{P}^{1-k}_{\frac{\nu_\infty-1}{2}}(-ia)\}$$

ここで $\Gamma_\mathbb{R}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ は $\mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$ の自明指標に対する局所 L 因子，$\mathfrak{P}^\mu_\nu(z)$ は第一種 Legendre 陪関数である (定義域は $\mathbb{C} - (-\infty, 1]$):

$$\mathfrak{P}^\mu_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2} {}_2F_1\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-z}{2}\right), \qquad z \in \mathbb{C} - (-\infty, 1].$$

上の $\mu/2$ 乗の分枝は，偏角が $-\pi/2$ から $\pi/2$ の間になるように決めておく．この時，$z > 1$ に対して $\arg(\frac{z+1}{z-1}) = 0$ となる．また，$\mathrm{ch}_{\{|x|>1\}}$ は $\mathbb{R}$ 上の $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\}$ の特性関数である．$a = 0$ の時は $\mathcal{O}_k^{\pm,(\nu_\infty)}(a)$ は見かけ上定義されてないが，$\lim_{a\to 0}$ を考えたときの極限値を $a = 0$ での値と思う事にする．

次に判別式 $\Delta \in \mathbb{Z}$ について考える $(\Delta \equiv 0, 1 \pmod 4)$．この時，1 または基本判別式であるような $D \in \mathbb{Z}$ と，自然数 $f \in \mathbb{N}$ を用いて，$\Delta = Df^2$ と一意的に分解できる．この時，$\nu_{\mathrm{fin}} = (\nu_p)_p$ と Δ に対して，

$$\mathbf{B}(\nu_{\mathrm{fin}}; \Delta) = \prod_{p|f} \left(\frac{\zeta_p(-\nu_p)}{L_p(\frac{-\nu_p+1}{2}, \chi_D)} |f|_p^{\frac{\nu_p-1}{2}} + \frac{\zeta_p(\nu_p)}{L_p(\frac{\nu_p+1}{2}, \chi_D)} |f|_p^{\frac{-\nu_p-1}{2}} \right)$$

[5] $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の場合だけでなく，$\Gamma(2)$ の場合も証明しており，この時の固有値の下界は $\pi^2/2 \approx 49.34802201$.

とおく.

次に D を基本判別式としたときに, ϕ の周期 $\mathbb{P}_D(\phi)$ を導入する. この周期は $\phi:\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}\to\mathbb{C}$ が連続関数であれば定義できるので, ϕ として定数関数 1 や実解析的 Eisenstein 級数や楕円モジュラー関数 $j-744$ を考えても良い[6].

まず $\mathcal{F}(D)$ で, $\mathbb{Z}$ 係数の原始的 2 次形式で判別式が D であるようなもの全体のうち, 負定値 (negative-definite) でないもの全体とする. この集合には $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ が $(Q[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}])(x,y)=Q(ax+by,cx+dy)$ により作用する. $\mathcal{F}(D)/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ は有限集合であり, 濃度は $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の狭義類数と一致することが知られている. $\mathcal{F}(D)/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ の完全代表系 $\{Q_1,Q_2,\ldots,Q_h\}$ をひとつ固定し, 各 Q_j に対して, その固定部分群を $\mathrm{Stab}(Q_j)=\{\gamma\in\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\mid Q_j\gamma=Q_j\}$ とする.

(1) $D<0$ の場合, $Q_j(z,1)$ の 2 つの根のうち $\mathfrak{H}$ に含まれるほうを z_{Q_j} とする.
$$\mathbb{P}_D(\phi)=\sum_{j=1}^{h}\frac{1}{\#\mathrm{Stab}(Q_j)}\phi(z_{Q_j})$$
と定める.

(2) $D<0$ の場合は, $Q_j(z,1)$ の 2 つの根は実数であり, その 2 つを直径の両端とするような半円で繋ぐことができる. 半円のうち $\mathfrak{H}$ と共通部分を持つほうを Ω_j と書く.
$$\mathbb{P}_D(\phi)=\sum_{j=1}^{h}\int_{\mathrm{Stab}(Q_j)\backslash\Omega_j}\phi(z)\frac{\sqrt{D}\,dz}{Q_j(z,1)}$$
と定める. ここで Ω_j の向きは, $Q_j(z,1)$ の z^2 の係数が正の時に反時計回り, 負の時に時計回りとする.

この時, 次の exact formula が成り立つ.

Theorem 5. *$k\geqslant 4$ は偶数とし, $n\in\mathbb{N}$ とする. この時, 以下が成り立つ.*
$$\begin{aligned}&\frac{4\pi}{k-1}n^{1/2}\sum_{f\in H_k}\mu_f(\phi)\lambda_f(n)\\&=\frac{1}{4}\hat{L}(1/2,\phi)\sum_{\substack{(d_1,d_2)\in\mathbb{N}^2\\ n=d_1d_2,\ d_1\neq d_2}}\mathbf{B}(\nu_{\mathrm{fin}};(d_1-d_2)^2)\mathcal{O}_k^{+,(\nu_\infty)}(\tfrac{d_1+d_2}{d_1-d_2})\\&\quad+\frac{1}{2}\sum_{D\in\mathcal{D}}2^{\delta(D<0)}\mathbb{P}_D(\phi)\sum_{t\in\mathcal{T}(n,D)}\mathbf{B}(\nu_{\mathrm{fin}};t^2-4n)\mathcal{O}_k^{\mathrm{sgn}(t^2-4n),(\nu_\infty)}(\tfrac{t}{\sqrt{|t^2-4n|}}).\end{aligned}$$
ここで $\hat{L}(s,\phi)$ は ϕ の完備スタンダード L 関数であり, $\delta(D<0)$ は D が負の時に 1, そうでない場合 0 をとる. $\mathcal{D}$ は基本判別式全体の集合であり, $\mathcal{T}(n,D)=\{t\in\mathbb{Z}\mid\exists f\in\mathbb{N},t^2-4n=Df^2\}$ とおいた. また, 第 2 項の無限和は絶対収束する.

Remark 6. (1) *ϕ が定数関数 1 の時 $\mu_f(\phi)=\|f\|=1$ となるが, この場合の $\sum_{f\in H_k}\lambda_f(n)$ の公式も知られている. もちろん Eichler-Selberg 跡公式に他ならない.*

(2) *ϕ が実解析的 Eisenstein 級数*
$$E(z,\tau)=\sum_{\gamma\in\{\pm[\begin{smallmatrix}1&*\\0&1\end{smallmatrix}]\}\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\mathrm{Im}(\gamma\tau)^{(z+1)/2},\quad\tau\in\mathfrak{H}$$

[6] $D<0$ の場合, ϕ が定数関数 1 の時は Kronecker-Hurwitz 類数と呼ばれ, ϕ が $j-744$ の時は特異モジュラスのトレース (trace of singular moduli) と呼ばれる.

の場合の $\sum_{f\in H_k}\mu_f(E(z))\lambda_f(n)$ の公式は *Zagier* の公式 [31][7] として知られている．この *Zagier* の公式の $z=1$ での留数を計算すると，ϕ が定数関数 1 の時の公式 (*Eichler-Selberg* 跡公式) が得られる．

(3) ϕ がカスプ形式の場合の我々の公式は，上記の観点から *Eichler-Selberg* 跡公式や *Zagier* の公式の一般化といえる．

Δ が基本判別式とは限らない判別式の場合，$\Delta = Df^2$ に対して $\mathbb{P}_\Delta(\phi) = \mathbb{P}_D(\phi)$ とおく．Theorem 5 から次の漸近公式が得られる．

Theorem 7. $k \geqslant 4$ は偶数とし，$n \in \mathbb{N}$ とする．この時，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}(-1)^{k/2}n^{1/2}\sum_{f\in H_k}\mu_f(\phi)\lambda_f(n) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}_{-4n}(\phi)\mathbf{B}(\nu_{\mathrm{fin}};-4n)\\ &+\frac{1}{2}\sum_{\substack{t\in\mathbb{Z}\\ 0<t<2n^{1/2}}}\mathbb{P}_{t^2-4n}(\phi)\mathbf{B}(\nu_{\mathrm{fin}};t^2-4n)\frac{1}{\sqrt{4n-t^2}}\{\rho(\tfrac{\bar\rho}{\rho})^{k/2}+\bar\rho(\tfrac{\rho}{\bar\rho})^{k/2}\}+O(k^{-1}).\end{aligned}$$

ここで，$\rho = \frac{-t+i\sqrt{4n-t^2}}{2}$ とおいた．

上記の結果で $n=1$ とした後で $\dim S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ で割れば，テスト関数がカスプ形式の場合の Luo の結果 (Theorem 2) に相当する漸近公式が得られる．よって Theorem 7 は Luo [15] の精密化といえる (0 に収束するスピードが分かる)．特に 2nd main term の振動項は，本研究によって得られたものである．

さらなる応用として，Luo-Sarnak の漸近公式 (2nd moment) の 1st moment 版を与える．

Theorem 8. k は 4 以上の偶数の中で動かすとする．任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して，以下が成り立つ．

$$\frac{2}{K}\sum_{K\leqslant k<2K}(-1)^{k/2}\sum_{f\in H_k}\mu_f(\phi)\lambda_f(n) \xrightarrow{K\to\infty} \frac{1}{2}n^{-1/2}\mathbb{P}_{-4n}(\phi)\mathbf{B}(\nu_{\mathrm{fin}};-4n).$$

この 1st moment の漸近公式 (Theorem 8) と Luo-Sarnak の 2nd moment の漸近公式 (Theorem 3) を組み合わせると，$L(1/2,\phi\times\mathrm{Sym}^2(f))\neq 0$ となる $f\in\bigcup_{k\geqslant 4}H_k$ が無限に存在することを定量的に与えることができる．ここで $L(s,\phi\times\mathrm{Sym}^2(f))$ は $\mathrm{GL}_2\times\mathrm{GL}_3$ の Rankin-Selberg L 関数であり，以下のように定義される:

$$L(s,\phi\times\mathrm{Sym}^2(f)) = \prod_{p<\infty}\det(1_6 - p^{-s}\left[\begin{smallmatrix}p^{\nu_p/2} & \\ & p^{-\nu_p/2}\end{smallmatrix}\right]\otimes\mathrm{Sym}^2\begin{pmatrix}\alpha_p & \\ & \alpha_p^{-1}\end{pmatrix})$$

ここで (α_p,α_p^{-1}) は f の素数 p における佐武パラメーターである．この無限積は $\mathrm{Re}(s)$ が十分大きい時に収束する．また，

$$\begin{aligned}\hat L(s,\phi\times\mathrm{Sym}^2(f)) =&\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\nu_\infty/2+1)\Gamma_{\mathbb{R}}(s-\nu_\infty/2+1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s+\nu_\infty+k-1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-\nu_\infty+k-1)\\ &\times L(s,\phi\times\mathrm{Sym}^2(f))\end{aligned}$$

とおけば，これは $\mathbb{C}$ 上の整関数に解析接続され，$L(s,\phi\times\mathrm{Sym}^2(f)) = L(1-s,\phi\times\mathrm{Sym}^2(f))$ という関数等式を持つ (cf. [2], [8])．

さて，

$$X_\phi := \{n\in\mathbb{N}\mid -4n\in\mathcal{D}\quad\&\quad L(1/2,\phi\otimes\chi_{-4n})\neq 0\},$$

$$N_{\phi,n}(K) := \#\{f\in\bigcup_{K\leqslant k<2K}H_k \mid L(1/2,\phi\times\mathrm{Sym}^2(f))\lambda_f(n)\neq 0\}$$

とおき，$d(n) := \sum_{0<d|n}1$ とする．この時，次が成り立つ．

[7] 拙著 [25] でアデリックに扱ったものについて解説している．[25] の p.58 の下から 3 行目で，完備 L 関数と書いてあるが，正しくは非完備 L 関数でなければならない．注意されたし．

Corollary 9. $L(1/2,\phi)\neq 0$ を仮定する．この時, 任意の $n\in X_\phi$ と任意の $\epsilon>0$ に対して, ある $K_{\phi,n,\epsilon}>0$ が存在して, 任意の $K\geqslant K_{\phi,n,\epsilon}$ に対して,

$$N_{\phi,n}(K)\geqslant \frac{1-\epsilon}{16\pi}\frac{1}{n^{1/2}\,d(n)^2}\frac{L(1/2,\phi\otimes\chi_{-4n})}{C(\phi)L(1,\mathrm{Sym}^2(\phi))}\times K.$$

上の系の仮定が空だと意味のない結果となってしまうが, 系の仮定を満たす ϕ と n は, 下記の通り無数に存在することが知られている．

Remark 10. (1) 1992 年の本橋 [18, Theorem 2] の漸近公式

$$\sum_{\substack{\phi\\ |\nu_\infty/2|\leqslant T}}\frac{L(1/2,\phi)^2}{\cosh(\pi|\nu_\infty|/2)\|\phi\|^2}=\frac{2\,T^2}{\pi^2}\left(\log T+\gamma-\frac{1}{2}-\log(2\pi)\right)+O(T(\log T)^6)$$

により，$L(1/2,\phi)\neq 0$ となる ϕ は無数に存在する．ちなみに左辺に現れる分母は, $\|\phi\|^2=2^{-1}\hat{L}(1,\mathrm{Sym}^2(\phi))$ と

$$L_\infty(1,\mathrm{Sym}^2(\phi))=\Gamma_{\mathbb{R}}(1)\Gamma_{\mathbb{R}}(1+\nu_\infty)\Gamma_{\mathbb{R}}(1-\nu_\infty)=\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}\nu_\infty\right)\right\}^{-1}$$

を用いると

$$\cosh(\pi|\nu_\infty|/2)\|\phi\|^2=2^{-1}L(1,\mathrm{Sym}^2(\phi))$$

と書き換えられる．$\nu_\infty\in i\mathbb{R}$ という性質も使っていることに注意．

(2) π_ϕ を ϕ に対応する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の保型表現としよう．π_ϕ は既約, 中心指標が自明, すべての素点で *spherical,* という性質を持つ．ϕ はレベル 1 の *even Maass* カスプ形式なので, $\epsilon(1/2,\pi_\phi)=1$ である．特に χ_{-4} に対応する *2* 次 *Hecke* 指標 $\varepsilon_{-4}:\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times\to\{\pm1\}$ に対して, $\epsilon(1/2,\pi_\phi\otimes\varepsilon_{-4})=1$ も分かる．*1995* 年の *Friedberg-Hoffstein* [1] により, *2* 次指標 $\eta:\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times\to\{\pm1\}$ で $\eta_v=(\varepsilon_{-4})_v$ $(v=\infty,2)$ と $L(1/2,\pi_\phi\otimes\eta)\neq 0$ を満たすものが無数に存在する．η はある $n\in X_\phi$ に対する *Kronecker* 指標 χ_{-4n} のアデリックリフトであるから, X_ϕ は無限集合である．$L(1/2,\pi_\phi\otimes\eta)\geqslant 0$ なので[8], 非ゼロなら正の数である．

Luo-Sarnak の *2nd moment* からは, $L(1/2,\phi\times\mathrm{Sym}^2(f))\neq 0$ となる $f\in\bigcup_{k\geqslant4}H_k$ が無限個存在することが分かる．一方, *Corollary 9* は,「そのような無限に存在する f は $\cup_{K\leqslant k<2K}H_k$ の中で K の定数倍以上ある」という定量的な評価まで与えている．割合の評価をするには, $\frac{N_{\phi,n}(K)}{K^2}$ を扱う必要があるが, 我々の結果は $\frac{N_{\phi,n}(K)}{K}$ の *lower bound* を与えているということも追記しておく．

$\mathrm{GL}_2\times\mathrm{GL}_3$ の場合の L 関数の中心値が消えない保型形式の無限性については, 下記の通り, 我々のものとは双対的な研究もいくつか知られている．

Remark 11. (1) *2009* 年に *Li* [13, Theorem 1.1] はレベル $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ の *Hecke-Maass* カスプ形式 F を固定し, レベル $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の正規化された *even Hecke-Maass* カスプ形式 ϕ を動かした時の漸近公式

$$\sum_{\phi}e^{-|\nu_\infty|^2/(4T^2)}\frac{L(1/2,\phi)L(1/2,\phi\times F)}{\pi^{-1}\cosh(\pi|\nu_\infty|/2)\|\phi\|^2}=\frac{12\,L(1,F)L(1,\tilde{F})}{\pi^3}T^2+O_{\epsilon,f}(T^{11/6+\epsilon})$$

を与えている．ここで $\tilde{F}$ は F の *dual* である．[13, Theorem 1.1] と上の公式は, 一見すると左辺が異なっているように思えるが, 実は同じである．[13] の u_j (*ONB* の元) の *Fourier* 係数 $\rho_j(n)$ は我々の $\frac{1}{\|\phi\|}\phi$ (*ONB* の元) の場合の $\frac{\lambda_\phi(n)}{2|n|^{1/2}\|\phi\|}$ に対応している

[8] 相対跡公式の手法による Jacquet, Chen [7, Theorem 1] の $L(1/2,\pi_\phi)L(1/2,\pi_\phi\otimes\eta)\geqslant 0$ と Katok, Sarnak [10, Corollary 1] の $L(1/2,\phi)\geqslant 0$ を合わせると, $L(1/2,\phi)\neq 0$ ならば $L(1/2,\phi\otimes\chi_{-4n})\geqslant 0$ である．ここで数学とは関係ない話だが, [7] の著者は Hervé Jacquet, Chen Nan となっているので Nan が名字だと思われるが, 文献で引用される時には N. Chen となっていることもあり, Chen が名字のようにも見える．どちらが名字なのかご存知の方はお教え頂けると有難く存じます．

ので, [13] の $a_j(n)$ は $\frac{\lambda_\phi(n)}{\|\phi\|}\Gamma(\frac{1+\nu_\infty}{2})$ に対応している．この事情により [13] 内の保型 L 関数は我々のものとかなりズレているので, 我々の記号を用いて記述すると上記のようになる．

上の漸近公式の系として, F を固定する毎に, $L(1/2,\phi\times F)\neq 0$ となる ϕ が無限個存在することが分かる．我々の設定とは異なり, F は *Gelbart-Jacquet* リフト $\mathrm{Sym}^2(f)$ の形をしていなくても良い．なお, *Li* は漸近公式を導出する際に, GL_2 の *Kuznetsov* 跡公式, GL_3 の *Voronoi* 公式と, 近似関数等式を用いるという手法をとっている．

(2) *Reznikov* [19] は *2001* 年に, PGL_2 のスペクトル理論を用いることによって, $\phi\in L^2(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))^{\mathbf{K}}$(ここで $\mathbf{K}=\prod_v\mathbf{K}_v$ は $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の標準的な極大コンパクト部分群) に対して,

$$\phi^2=\sum_j c_j\phi_j$$

という展開を考察した．ここで $\{\phi_j\}_j$ は $L^2(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))^{\mathbf{K}}$ の正規直交基底とする．係数 c_j は $c_j=\langle\phi^2,\bar{\phi}_j\rangle_{L^2}$ と表せることに注意．ϕ_j に対する ν_∞ を ν_j と書くことにすると, *Reznikov* は, ある定数 $c>0$ があって

$$\sum_j|c_j|^2e^{\pi/2\times|\nu_j/2|}\times e^{-\epsilon|\nu_j/2|}\geqslant c|\log\epsilon|,\qquad \epsilon\to+0$$

となることを示し, 系として「無限個の j で $c_j\neq 0$」を与えた．この帰結として, *spherical* な ϕ を固定する毎に, $L(1/2,\phi\times\phi\times\bar{\phi}_j)=L(1/2,\phi_j)L(1/2,\phi_j\times\mathrm{Sym}^2(\phi))\neq 0$ なる ϕ_j が無限個存在することを導出した．この手法はスペクトル展開と $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の *class one* 表現の性質に着目しており, 跡公式の幾何サイドに相当するものは扱われていない．

(3) 上記 2 つの結果とは異なり, 我々の結果は「$L(1/2,\phi)\neq 0$ となる *Maass* 形式 ϕ を止める毎に, $L(1/2,\phi\times f\times\bar{f})=L(1/2,\phi)L(1/2,\phi\times\mathrm{Sym}^2(f))\neq 0$ なる正則な保型形式 f が無限個存在する」という双対的なものである．実際, *Li* の結果は「GL_3 上の保型形式 F を固定する毎に, $L(1/2,\phi)L(1/2,\phi\times F)\neq 0$ となる *Maass* 形式 ϕ が無限個存在する」であるし, *Reznikov* の結果は「*Maass* 形式 f を固定する毎に, $L(1/2,\phi\times f\times\bar{f})\neq 0$ となる *Maass* 形式 ϕ が無限個存在する」である．固定する保型形式が我々の設定と逆になっている．無限に存在するものが正則な保型形式なのか, それとも *Maass* 形式なのかという違いもある．

3. Sketch of Proof

Theorem 5 から Theorem 7, Theorem 8 を示すには, $\mathcal{O}_k^{\pm,(\nu_\infty)}$ の明示公式を用いれば良い．ここでは Theorem 5 の証明と「Theorem 8 ⇒ Corollary 9」の証明についてのみ考える．

まず「Theorem 8 ⇒ Corollary 9」についてだが, これは我々の 1st moment, Luo-Sarnak の 2nd moment, Waldspurger [28] の refinement に当たる Martin-Whitehouse [17] の公式

$$\frac{|\mathbb{P}_{-4n}(\phi)|^2}{\|\phi\|^2}=\frac{\sqrt{4n}}{4}\frac{L(1/2,\phi)L(1/2,\phi\otimes\chi_{-4n})}{L(1,\mathrm{Sym}^2(\phi))}$$

と, それから 3 重積の公式 (Watson [29], 市野 [6])

$$\frac{|\mu_f(\phi)|^2}{\|\phi\|^2}=C\,\frac{L(1/2,\phi)L(1/2,\phi\times\mathrm{Sym}^2(f))}{L(1,\mathrm{Sym}^2(\phi))L(1,\mathrm{Sym}^2(f))^2}\qquad(C\neq 0)$$

を用いれば分かる．ここで, 3 重積 L 関数の分解 $L(s,\phi\times f\times\bar{f})=L(s,\phi)L(s,\phi\times\mathrm{Sym}^2(f))$ を用いている．さて, $n\in X_\phi$ とすると, 我々の 1st moment の公式と Cauchy-Schwarz の不等

式より,

$$
\begin{aligned}
\frac{|\mathbb{P}_{-4n}(\phi)|}{\sqrt{4n}} &\ll \frac{2}{K}\left|\sum_{K\leqslant k<2K}(-1)^{k/2}\sum_{f\in H_k}\mu_f(\phi)\lambda_f(n)\right| \\
&\leqslant \frac{2}{K}\sqrt{\sum_{K\leqslant k<2K}\sum_{f\in H_k}|\mu_f(\phi)|^2}\sqrt{\sum_{K\leqslant k<2K}\sum_{\substack{f\in H_k\\ \mu_f(\phi)\lambda_f(n)\neq 0}}1}\; d(n)
\end{aligned}
$$

となり, 右辺の1つ目のルートの中身には2nd momentが現れ, 2つ目のルートの中身は$N_{\phi,n}(K)$になっている. implicit constant を書き下せばCorollary 9が得られる.

最後にTheorem 5の証明について触れる. 簡単のため$\lambda_f(n)$が出てこないように$n=1$とする. この時テスト関数$f=\otimes_v f_v\in C^\infty(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))$として, 無限素点成分$f_\infty$は極小$\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$タイプが$k$の$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$の離散系列表現$D_k$の行列係数になるようにとる; $f_\infty(g)=\langle D_k(g)u,u\rangle$. 有限素点$v=p$では, f_vが$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}_p)$の特性関数になるようにとる. この時, fはsmoothだが, $\mathrm{supp}(f)$はコンパクトではないので, 積分や無限和の収束性に注意する必要がある. fの取り方により, 右正則表現から誘導される$L^2(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))$への$f$の作用$R(f)$は$S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$への射影になっている. 特に積分核$K_f(g,h)$はカスプ形式である. 今, $\varphi:\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})\to\mathbb{C}$をすべての素点でsphericalなカスプ形式とすると,

$$
\int_{\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})}K_f(g,g)\varphi(g)dg
$$

という積分は収束する. $K_f(g,g)$のスペクトル展開と幾何的展開によってこの積分をバラバラにすることが可能であり, この一連の計算によって得られる公式は跡公式のvariantとみなせる. ここでは跡公式と呼んでしまおう. $K_f(g,g)$のスペクトル展開では連続スペクトルも留数スペクトルも寄与しないので, スペクトルサイドの計算で$\sum_{f\in H_k}\mu_f(\phi)$のような項が生じる. 一方で, 幾何的展開

$$
\int_{\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})}K_f(g,g)\varphi(g)dg=J_{\mathrm{id}}+J_{\mathrm{unip}}+J_{\mathrm{hyp}}+J_{\mathrm{ell}}
$$

において, 単位元と放物元の寄与$J_{\mathrm{id}}+J_{\mathrm{unip}}$はゼロになる. 実際, J_{id}はカスプ形式と定数関数の直交性によりゼロになるし, J_{unip}はφの定数項が出てくるからゼロになる.

J_{hyp}とJ_{ell}の計算について説明しておく. $\gamma\in\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$はhyperbolicまたはellipticとする. γの固有値で生成される$\mathbb{Q}$上の2次étale代数Eに対して, $T=E^\times$をGL_2の部分群とみなす. Waldspurgerの重複度1定理を用いると, $T\backslash\mathrm{PGL}_2/\mathbf{K}$に関する球関数$\Psi=\prod_v\Psi_v$を用いて, φの重みが付いたfの軌道積分は

$$
\begin{aligned}
&\int_{T(\mathbb{A}_\mathbb{Q})\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})}f(g^{-1}\gamma g)\{\int_{T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}_\mathbb{Q})}\varphi(tg)dt\}\,dg \\
&=\int_{T(\mathbb{A}_\mathbb{Q})\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})}f(g^{-1}\gamma g)\;\{\int_{T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}_\mathbb{Q})}\varphi(t)dt\times\Psi(g)\}\,dg \\
&=\{\int_{T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}_\mathbb{Q})}\varphi(t)dt\}\times\int_{T(\mathbb{A}_\mathbb{Q})\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})}f(g^{-1}\gamma g)\Psi(g)dg
\end{aligned}
$$

と表せる. φのTに沿った周期積分は, γがhyperbolicかellipticかに応じて本質的に$\frac{1}{2}\hat{L}(1/2,\phi)$か$\mathbb{P}_D(\phi)$に等しい. また, gに関する積分はEulerianなので, localな重み関数付き軌道積分の計算に帰着される. この手法はこれまでにない計算法である.

本研究の跡公式の導出は, φが実解析的Eisenstein級数の場合の跡公式の計算[26]がもとになっている. φが実解析的Eisenstein級数の時は, カスプ形式の場合と異なり, J_{id}, J_{unip}に相当する量は通常の跡公式と同様に生き残る. しかも普通に計算してしまうと$J_{\mathrm{id}}=\infty$となってうまくいかない. [26]ではpseudo Eisenstein級数のような変形が形式的な計算の正当化に必

要であった (実際には pseudo Eisenstein 級数ではなく, smoothed Eisenstein 級数を用いた[9]). φ がカスプ形式の時は上記の障害は起きず, $J_{\mathrm{id}} = J_{\mathrm{unip}} = 0$ となる．一方で $J_{\mathrm{hyp}}, J_{\mathrm{ell}}$ の扱いは local な積分に帰着されるので, φ がカスプ形式であるか否かに関わらず J_{hyp}, J_{ell} の公式 [26, §9] がそのまま適用可能である．

ここで重さに関する $k \geqslant 4$ という仮定についてコメントしておく．$k \geqslant 2$ が偶数の時, テスト関数 f の無限成分 f_∞ は, 定義により $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ 上で 2 乗可積分である．ここで, f のサポートがコンパクトでないので, 積分や和の収束性には気を付ける必要があり, 実際 f_∞ の可積分性が必要である．したがって, 上のアイディアでは $k = 2$ の場合は扱うことができない．$k = 2$ の時のこういった事情は [31] にも見られることに注意しておく．

Zagier [31], 高瀬 [27], Jacquet, Zagier [9] に見られるように, Hecke 作用素の核関数とレベル 1 の実解析的 Eisenstein 級数の積の積分を計算する際に, unfolding が幾何サイドの計算に必要であり, これが彼らの変数付き跡公式の幾何サイドの計算の骨子をなしている．このような global な手法では, 実解析的 Eisenstein 級数を even な Hecke 固有 Maass 波動形式に置き換えた場合に幾何サイドを計算することができない．しかし, 本研究ではアデール群の表現論の世界に状況をうつし, Waldspurger モデルの重複度 1 定理などを駆使することで, 明示的な計算を可能にした[10].

Remark 12. *2018* 年 *10* 月 *24* 日に *Han Wu* が *arXiv* にプレプリント [30] を公開した．この中で, *Jacquet* と *Zagier* が [9] で積み残していた連続スペクトルから生じる難しい計算 (*Jacquet-Zagier puzzle*) が完了し, *Jacquet-Zagier* 跡公式から *Selberg* 跡公式が復元できることがやっと証明された．

4. Appendix

この付録では, 我々の跡公式を応用して, ϕ のスタンダード L 関数の中心値 $L(1/2, \phi)$ と三重積 $\mu_f(\phi)$ の消滅の間の関係を, Watson [29], 市野 [6] の周期公式を使わずに証明する．

Theorem 13. ϕ をレベル 1 の *even Hecke-Maass* カスプ形式とする．以下は同値:

(1) $L(1/2, \phi) = 0$
(2) 任意の偶数 $k \geqslant 4$ と任意の正規化された *Hecke* 固有形式 $f \in B_k$ に対して, $\mu_f(\phi) = 0$.
(3) $2\mathbb{N}$ の任意の無限部分集合 $\mathcal{L}$ に対して, $k \in \mathcal{L}$ が存在して, 任意の $f \in B_k$ に対して $\mu_f(\phi) = 0$ が成り立つ．

「(2) ならば (3)」は自明である．また, 三重積に関する Watson, 市野の周期積分公式 [29], [6] を用いれば, $\mu_f(\phi)$ の非ゼロ性と $L(1/2, \phi)L(1/2, \phi \times \mathrm{Sym}^2(f))$ の非ゼロ性は同値であるから,「(1) ならば (2)」と「(1) ならば (3)」は Watson, 市野の公式より明らかである．また「(3) ならば (1)」は Luo-Sarnak の定理を用いれば直ちに対偶が示せる．ここで Luo-Sarnak の公式の main term に $L(1/2, \phi)$ が現れることの証明で, Watson, 市野の公式と Petersson 跡公式を本質的に用いていることに注意されたし．

上記の通り Watson, 市野の公式を用いれば上の定理はすぐに証明できるが, 本研究の跡公式を用いることによって, Watson, 市野の公式を用いずに (1), (2), (3) の同値性が示せる．

ここで,「(3) でないならば (1) でない」は以下のように記述される．

Corollary 14. レベル *1* の *even* な *Hecke* 固有 *Maass* カスプ形式 ϕ が $L(1/2, \phi) \neq 0$ を満たすとする．この時, ある無限集合 $\mathcal{L} = \{k_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset 2\mathbb{N}$ が存在し, 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対してある $f_j \in B_{k_j}$ が存在して, $\mu_{f_j}(\phi) \neq 0$ が成り立つ．

この系は Luo-Sarnak の漸近公式 (したがって Watson, 市野の公式) を使えば直ちに得られるので, 結果自体は新しくはないが, Watson, 市野の公式を使わずに証明できることがポイントである．また, この系を得た後で Watson, 市野の公式を初めて使用することで, $L(1/2, \phi) \neq 0$

---

[9][26] では Paley-Wiener 関数ではなく, $\beta(z) = z(z^2 - 1)^2 P(z) e^{z^2}$ (P は多項式関数) を用いた．それは [26] が正規化 Eisenstein 級数を扱っていることと, 積分路を虚軸 $i\mathbb{R}$ の右側だけでなく, 左側にもシフトさせたいことが起因している．おそらく pseudo Eisenstein 級数を用いても我々の手法は適用可能と思われる．

[10]Jacquet-Zagier 型跡公式の歴史, 応用などは拙著 [25] に詳細が説明されている．

を満たす ϕ を固定する毎に, $L(1/2, \phi \times \mathrm{Sym}^2(f)) \neq 0$ を満たす $f \in \bigcup_{k \geqslant 4} H_k$ が無限個存在することが示せる.

[証明]: 以下, Watson, 市野の公式を用いず (したがって Lou-Sarnak の公式も使わず) に Theorem 13 を証明してみよう. π_ϕ を ϕ のアデリックリフトが生成する $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の保型表現とする.

- 「(1) ならば (2)」は跡公式 (Theorem 5) を見れば直ちにわかる. 実際, (1) を仮定すれば, $L(1/2, \phi) = 0$ であり, 任意の基本判別式 D に対して, Waldspurger の公式 [28] を用いれば, $|\mathbb{P}_D(\phi)|^2 = C\, L(1/2, \pi_\phi) L(1/2, \pi_\phi \otimes \varepsilon_D) = 0$ (C は非ゼロ) であるから, 幾何サイドはすべての項がゼロとなる. よって, $a_{f_i}(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) の一次独立性から (2) が従う.
- 「(2) ならば (3)」は自明である.
- 最後に「(3) ならば (1)」を示すために, 対偶「(1) でないならば (3) でない」を証明する. まず, $L(1/2, \phi) \neq 0$ を仮定する. この時, 直接計算により, $\epsilon(1/2, \phi \otimes \chi_{-4}) = +1$ が分かる. この時, $L(1/2, \phi \otimes \chi_{-4}) \neq 0$ かどうかは分からないが, 4 で割って 1 余る自然数 n があって, χ_{-4n} のアデリックリフトを $\varepsilon_{-4n} : \mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times \to \{\pm 1\}$ と書くとき $L(1/2, \pi_\phi \otimes \varepsilon_{-4n}) \neq 0$ が成り立つ. ここで, $-4n$ が基本判別式であるように n をとることができる. これは Friedberg-Hoffstein の結果 [1] から従い, 実際, 上の性質を持つ n は無数に存在する. Waldspurger の公式により, $|\mathbb{P}_{-4n}(\phi)|^2 = C\, L(1/2, \phi) L(1/2, \phi \otimes \chi_{-4n}) \neq 0$. よって, Theorem 8 の公式の極限は非ゼロである. このことから, $\mu_f(\phi) \neq 0$ となる $f \in \bigcup_{k \geqslant 4} H_k$ が無限個ないと困る. これで「(1) でないならば (3) でない」も示せた.

以上の議論により, (1), (2), (3) の同値性が示された. 上の証明では, 我々の跡公式の他に Waldspurger の公式と Friedberg-Hoffstein の定理が使われている.

Acknowledgements

講演, 執筆の機会を与えて下さった世話人の若槻聡氏 (金沢大学), 山名俊介氏 (研究集会開催時は京都大学, 本原稿執筆時は大阪市立大学) にこの場を借りて感謝致します.

また本研究は JSPS 科研費 18H05835 (研究活動スタート支援) の助成を受けております. (2019 年度からの基金化に伴い, 執筆時の課題番号は 19K21025 に変わっております.)

References

[1] Friedberg, S., Hoffstein, J., *Nonvanishing theorems for automorphic L-functions on* GL(2), Ann. of Math. (2) **142** No.2 (1995), 385–423.

[2] Gelbart, S., Jacquet, H., *A relation between automorphic representations of* GL(2) *and* GL(3), Ann. Sci. Ecole Normale Sup. 4 série, **11** (1978), 471–552.

[3] Hassell, A., *What is quantum unique ergodicity ?*, Austral. Math. Soc. Gaz. **38** no. 3, 158–167, 2011.

[4] Hejhal, D., *The Selberg trace formula for* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, Vol. 2. Lecture Notes in Mathematics, 1001. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[5] Holowinsky, R., Soundararajan, K., *Mass equidistribution for Hecke eigenforms*, Ann. Math., **172** (2010), 1517–1528.

[6] Ichino, A., *Trilinear forms and the central values of triple product L-functions*, Duke Math. J. **145** No.2 (2008), 281–307.

[7] Jacquet, H., Chen, N., *Positivity of quadratic base change L-functions*, Bull. Soc. Math. France **129** (2001), 33–90.

[8] Jacquet, H., Piatetskii-Shapiro, I. I., Shalika, J. A., *Rankin-Selberg convolutions*, Amer. J. Math., **105**, No. 2, 367–464, 1983.

[9] Jacquet, H., Zagier, D., *Eisenstein series and the Selberg trace formula II*, Trans. Amer. Math. Soc. **300** No.1 (1987), 1–48.

[10] Katok, S., Sarnak, P., *Heegner points, cycles and Maass forms*, Israel J. Math., **84** (1993), 193–227.

[11] Kim, H., *Functoriality for the exterior square of* GL_4 *and symmetric fourth of* GL_2, with Appendix 1 by Dinakar Ramakrishnan and Appendix 2 by Kim and Peter Sarnak, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 1, 139–183.

[12] Kowalski, E., and Michel, P., *Zeros of families of automorphic L-functions close to 1*, Pacific J. of Math., **207** (2002), no. 2, 411–431.

[13] Li, X., *The central value of the Rankin-Selberg L-functions*, Geom. Funct. Anal. **18** (2009), 1660–1695.

[14] Lindenstrauss, E., *Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity*, Ann. of Math. (2) **163** (2006), no.1, 165–219.
[15] Luo, W., *Equidistribution of Hecke eigenforms on the modular surface*, Proc. Amer. Math. Soc. vol. **131** (2003), no. 1, 21–27.
[16] Luo, W., Sarnak, P., *Quantum variance for Hecke eigenforms*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **37** (2004), no. 5, 769–799.
[17] Martin, K., Whitehouse, D., *Central L-values and toric periods for* GL(2), Int. Math. Res. Not. IMRN **2009**, no.1, Art. ID rnn127, 141–191 (2008).
[18] Motohashi, Y., *Spectral mean values of Maass wave form L-functions*, J. Number Theory **42** (1992), no.3, 258–284.
[19] Reznikov, A., *Non-vanishing of periods of automorphic functions*, Forum Math. **13** (2001), 485–493.
[20] Roelcke, W., *Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art*, S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl. 1953/1955 (1953/1955), 159–267 (1956).
[21] Rudnick, Z., *On the asymptotic distribution of zeros of modular forms*, Int. Math. Res. Not., 2005, no. 34, 2059–2074.
[22] Rudnick, Z., Sarnak, P., *The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds*, Comm. Math. Phys., **161** no. 1, (1994), 195–213.
[23] Sarnak, P., *Recent progress on the quantum unique ergodicity conjecture*, Bull. Amer. Math. Soc., **48**, no. 2, (2011), 211–228.
[24] Sarnak, P., Zhao, P., *The quantum variance of the modular surface*, with Appendix by Michael Woodbury, preprint (2018). https://arxiv.org/abs/1303.6972
[25] 杉山真吾, Hilbert モジュラー形式に対する Jacquet-Zagier 型の跡公式, 第 11 回福岡数論研究集会報告集, 2018, 57–69.
[26] Sugiyama, S., Tsuzuki, M., *An explicit trace formula of Jacquet-Zagier type for Hilbert modular forms*, J. Funct. Anal., **275** (2018), no. 11, 2978–3064.
[27] Takase, K., *On the trace formula of the Hecke operators and the special values of the second L-functions attached to the Hilbert modular forms*, manuscripta math. **55**, 137–170, (1986).
[28] Waldspurger, J.-L., *Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symetrie*, Compos. Math. **54** (1985), 173–242.
[29] Watson, T., *Rankin triple products and quantum chaos*, Ph.D Thesis (Princeton, 2002). https://arxiv.org/abs/0810.0425
[30] Wu, H., *Rankin-Selberg trace formula for* GL_2*: geometric side*, preprint(Submitted on 20 Oct. 2018). https://arxiv.org/pdf/1810.09437.pdf
[31] Zagier, D., *Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields*, Lecture Notes in Math., **627**, 105–169, Springer, 1977.

Shingo Sugiyama
Department of Mathematics, College of Science and Technology, Nihon University, Suruga-Dai, Kanda, Chiyoda, Tokyo 101-8308, Japan
E-mail : `s-sugiyama@math.cst.nihon-u.ac.jp`