On the discrete spectrum of a certain non-sharp locally anti-de Sitter space

東京大学数理科学研究科 甘中一輝 *
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

Abstract

本稿では, 小林・Kassel[KK16] による, 非リーマンの場合の局所半単純対称空間 $\Gamma\backslash G/H$ 上の大域解析の理論を局所反ド･ジッター空間 $\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{diag}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ に限る事で初等的に解説し, この定理を出発点として筆者の結果が得られることを説明する. 筆者の研究の詳細については RIMS 講究録 2103 番の記事に書いたので, そちらを参照されたい.

1 はじめに

本稿では以下の問題を扱う. 未定義の言葉については後の節で徐々に説明していく.

問題 1.1. 非 *Riemann* 局所半単純対称空間 $\Gamma\backslash G/H$ の離散スペクトラム $\mathrm{Spec_d}(\Gamma\backslash G/H)$ はいつ無限集合になるか.

後でより厳密に定義を行うが, 離散スペクトラムについて大雑把に説明すると, 局所半単純対称空間にはその擬 Riemann 構造から Laplace 作用素が定義されるが, Laplace 作用素の L^2 固有値全体の集合の事を大体離散スペクトラムと呼んでいる. さて, 問題 1.1に関して完全な解答が与えられているわけでは無いが, 小林・Kassel[KK16] によって初めて問題 1.1が定式化され, 特別な局所半単純対称空間に対しては, 無限個の離散スペクトラムを Poincare 級数の方法で具体的に構成した. さらに彼らは Γ の変形で安定な離散スペクトラム (“universal discrete spectrum”) を非 Riemann の場合を考えることによって初めて見出した. 本稿では彼らが [KK16] の中で暗に証明した, 後述の定理 5.1を

$$(G, H) = (\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \mathrm{diag}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))),$$

の場合に限って初等的に証明する事を主な目的とする. 本稿が [KK16] の理解への一助となれば幸いである.

全体を通して, 半単純群は簡単のため連結かつ中心有限, さらに非コンパクト因子のみを持つとする. また, 実 Lie 群 G の Lie 環は $\mathfrak{g}$ という様にドイツ小文字を対応させ, 実ベクトル空間 V の複素化は $V_{\mathbb{C}}$ という様に $\mathbb{C}$ を下に添えて書く.

2 半単純対称空間とその離散系列表現

この節では半単純対称空間の定義を思い出し, その離散系列表現の存在に関する Flensted-Jensen[FJ80] と松木・大島 [MO84] による定理を簡単に説明する.

実半単純群 G に対してある対合 σ が存在して, H が $G^\sigma = \{g \in G \mid \sigma(g) = g\}$ の開部分群である時, (G, H, σ) を半単純対称対, $X = G/H$ を半単純対称空間と呼ぶ. 代表例を 2 つ挙げておこう.

*本研究は日本学術振興会特別研究員奨励費 (研究番号 18J20157) 及び数物フロンティア・リーディング大学院プログラムからの助成を受けたものである.

例 2.1. *(1)* 実半単純群 G と, その *Cartan* 対合 θ に対して, $K = G^\theta$ は G の極大コンパクト部分群であり, 対称空間 G/K は非コンパクト型の *Riemann* 対称空間と呼ばれる.

(2) 実半単純群 G' に対して, $G = G' \times G'$ の対合 σ を $(x, y) \mapsto (y, x)$ で定めると, $H := G^\sigma = \mathrm{diag}(G') \subset G$ であり, 対称空間 G/H は自然に群多様体 G' と見なせる.

半単純対称空間 X における G 不変な微分作用素全体のなす環 $\mathbb{D}_G(X)$ は可換である事が知られている. 以下ではより簡明な環構造を持つ事を証明なしで説明する. 記号をいくつか導入しよう. Lie 環 $\mathfrak{g}$ の σ の微分による固有空間分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q} = \mathfrak{g}^{d\sigma} + \mathfrak{g}^{-d\sigma},$$

とする. 複素化 $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$ の半単純元からなる可換部分空間で極大なものを $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$ と書き, ルート系 $\Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$ の Weyl 群を W と書く. [Hel00, Chap.II, Thm. 5.17] と Flensted-Jensen 双対 ([FJ80] を見よ) により,

$$\mathbb{D}_G(X) \cong S(\mathfrak{j}_{\mathbb{C}})^W,$$

が成立する. なお, $\mathrm{rank}(G/H) := \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$ とし, 対称空間 $X = G/H$ の rank と呼ぶ.

さて, 半単純対称空間 G/H には G 不変測度がスカラー倍を除いてただ一つ定まるから, $L^2(G/H)$ を考えることで G のユニタリ表現が定まるが, この既約部分表現を G/H の離散系列表現と呼ぶ ([FJ80]). K を σ で安定な G の極大コンパクト部分群として,

$$\mathrm{rank}(G/H) = \mathrm{rank}(K/H \cap K), \tag{2.1}$$

が成立する時に [FJ80] は $X = G/H$ の離散系列表現を無限個構成した. さらに, 松木-大島 [MO84] により X には Flensted-Jensen が構成したものしか離散系列表現はない, 特に $\mathrm{rank}(G/H) = \mathrm{rank}(K/H \cap K)$ が成立しない時は G/H の離散系列表現は存在しない, 事が示された. X の離散系列表現の元は Schur の補題により, $\mathbb{D}_G(X)$ の L^2 同時固有関数になるが, 逆に $\mathbb{D}_G(X)$ の (一つの指標を固定した時の)L^2 同時固有関数空間は X の離散系列表現の有限個の直和になる事も知られている. より詳しい説明については [KK16, Sect. 5.3] を参照せよ.

3 局所半単純対称空間の離散スペクトラム

この節では, 半単純対称空間の不連続群, またその商として定義される空間の離散スペクトラムの概念を思い出す. 以下では, 離散群は高々可算集合であるとする.

定義 3.1. 離散群 Γ が局所コンパクト *Hausdorff* 空間 X へ作用しているとし, X の部分集合 S に対して,

$$\Gamma_S := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma S \cap S \neq \emptyset\},$$

とする.

- 任意の $x \in X$ に対して $\Gamma_{\{x\}} = \{e\}$ となる時, 作用は自由であると言う.
- 任意のコンパクト集合 $S \subset X$ に対して Γ_S が有限集合となる時, 作用は固有不連続であると言う.
- 作用が自由かつ固有不連続の時, Γ は X の不連続群であると言う.

Γ が X の不連続群ならば, 商写像 $X \to \Gamma\backslash X$ は被覆写像となる. X が多様体ならば, $\Gamma\backslash X$ は多様体であり, この被覆は局所微分同相写像となる. 固有不連続性より一般の概念である固有性も定義しておく.

定義 3.2. *局所コンパクト Hausdorff 群 L が局所コンパクト Hausdorff 空間 X へ作用しているとし, X の部分集合 S に対して,*

$$L_S := \{l \in L \mid lS \cap S \neq \emptyset\} \subset L,$$

が相対コンパクトである時, L の作用は固有であるという.

離散群が固有に作用するならば固有不連続に作用する事に注意しておく.

X が半単純対称空間 G/H の場合を考えよう. G の離散部分群 Γ で $X = G/H$ に固有不連続かつ自由に作用するものを考え, $X_\Gamma = \Gamma\backslash X$ の事を局所半単純対称空間と呼ぶ. ここで Riemann 対称空間の場合とは違い, G の任意の離散部分群 Γ が半単純対称空間 G/H に固有不連続に作用するわけでは無いことに注意したい. 固有不連続に作用するものとしないものの例をそれぞれ挙げておく.

例 3.3. *(1) (Moore のエルゴード定理 [Moo66]) G が非コンパクト単純群の有限個の直積であり H が非コンパクトの場合, Γ を G の格子, つまり $\Gamma\backslash G$ が体積有限となるならば, Γ は G/H に*固有不連続には作用せず, *$\Gamma\backslash G/H$ は非 Hausdorff 空間となる.*

*(2) (standard Clifford-Klein form, 詳しくは [KK16, Ch. 2] を参照せよ.) 簡約部分群 $L \subset G$ で G/H に固有に作用するものがあるとする. この時, L の任意の離散部分群 Γ は G/H に*固有不連続に作用する. *上記の条件を満たす (G, H, L) の組としては例えば $(\mathrm{SO}_0(2n+2,2), \mathrm{SO}_0(2n+2,1), \mathrm{SU}(n+1,1))$ がある.*

簡約部分群 $L \subset G$ の簡約型等質空間 G/H への作用の固有性に関しての判定法は [Kob89] により発見され, その後 [Ben96],[Kob96] によって, L, H の簡約性を課さない形へと一般化されている. [Ben96] は L, H が G の閉部分群である事を仮定しているのに対し, [Kob96] は L, H が G のただの部分集合の場合 (もはや G/H は定義できない) に拡張した事に注意しておく.

局所半単純対称空間 $\Gamma\backslash G/H$ の G/H における基本領域として, 次のものが取れる事を注意しておこう.

事実 3.4 ([KK16, Def-Lem. 4.20])**.** *半単純対称空間 G/H の不連続群 Γ に対して,*

$$\mathcal{D}_{\Gamma\backslash G/H} := \{x \in G/H \mid \forall\gamma \in \Gamma, \|\nu_X(\gamma x)\| \geq \|\nu_X(x)\|\},$$

は G/H への Γ の作用に関する基本領域である (ν_X については 4 節を見よ).

最後に, 局所半単純対称空間 X_Γ の離散スペクトラムの [KK16] による定義を思い出しておこう. 被覆 $X \to X_\Gamma = \Gamma\backslash X$ によって, X_Γ 上の微分作用素全体のなす環 $\mathbb{D}(X_\Gamma)$ への単射準同形 $\pi_\Gamma\colon S(\mathfrak{j}_\mathbb{C})^W \cong \mathbb{D}_G(X) \hookrightarrow \mathbb{D}(X_\Gamma)$ が自然に定まる.

定義 3.5 ([KK16])**.** *半単純対称空間 $X = G/H$ とその不連続群 $\Gamma \subset G$ に対して,*

$$\mathrm{Spec}_\mathrm{d}(X_\Gamma) := \{\lambda \in \mathfrak{j}_\mathbb{C}^*/W \mid \exists f \in L^2(X) \setminus \{0\}\ s.t.\ \forall P \in S(\mathfrak{j}_\mathbb{C})^W, \pi_\Gamma(P)f = \lambda(P)f.\},$$

を局所半単純対称空間 X_Γ の離散スペクトラムと呼ぶ. 微分演算は超関数の意味で定義される.

局所リーマン対称空間の場合にその離散スペクトラムが様々な人に研究されている事は言うまでもない事であろう.

4　一般化 Cartan 分解と対称空間の "擬球"

この節では, 半単純対称対 (G,H,σ) に対する一般化 Cartan 分解 $G=K\exp(\mathfrak{a}^+)H$ を証明無しで思い出しておく．記号として, θ を σ と可換な Cartan 対合, $K=G^\theta$ を θ に付随して定まる G の極大コンパクト部分群とする．Lie 環 $\mathfrak{g}$ の θ,σ の微分による固有空間分解を

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}(=\mathfrak{g}^{d\theta}+\mathfrak{g}^{-d\theta}),\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{q}(=\mathfrak{g}^{d\sigma}+\mathfrak{g}^{-d\sigma}),$$

とする．

$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ の極大可換部分空間とすると, $\mathfrak{g}$ の Killing 形式の $\mathfrak{a}$ への制限は正定値であり, 自然に $\mathfrak{a}\cong\mathfrak{a}^*$ である．そこで制限ルート系 $\Sigma(\mathfrak{g}^{d(\sigma\theta)},\mathfrak{a})$ の Weyl Chamber の閉包を一つ選び, この同型で移したものを $\mathfrak{a}^+$ とする．この時, 次が成立する．

事実 4.1 (例えば [Sch84, Prop. 7.1.3])**.** 積

$$K\times\exp(\mathfrak{a}^+)\times H\to G$$

は全射であり, $g\in G$ に対して, $g=k_ge^{a_g}h_g$, $(k_g\in K,a_g\in\mathfrak{a}^+,h_g\in H)$ と書いたとき, a_g は g に対して一意に定まる．

そこで, 一般化 Cartan 射影 $\nu_G:=G\to\mathfrak{a}^+$ を $g\mapsto a_g$ により定める．例 2.1の場合, 一般化 Cartan 分解は以下の様になる．

例 4.2. *(1) (例 2.1(1) の場合)* $\mathfrak{h}=\mathfrak{k},\mathfrak{q}=\mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間, $\mathfrak{a}^+$ は制限ルート系 $\Sigma(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ の一つの *Weyl chamber* の閉包であり, この場合の一般化 *Cartan* 分解 *(*射影*)* は G の *Cartan* 分解 *(*射影*)* である．

(2) (例 2.1(2) の場合) θ' を G' の *Cartan* 対合, $K'=G'^\theta$, $\mathfrak{p}'=\mathfrak{g}'^{-d\theta}$, $\mathfrak{a}'$ を $\mathfrak{p}'$ の極大可換部分空間, $\mathfrak{a}'^+$ を $\Sigma(\mathfrak{g}',\mathfrak{a}')$ の一つの *Weyl chamber* の閉包とする．この時, $\mathfrak{a}=\mathrm{diag}^a\mathfrak{a}':=\{(a',-a')\mid a'\in\mathfrak{a}'\}\subset\mathfrak{g}=\mathfrak{g}'\oplus\mathfrak{g}'$ であり, $\mathfrak{a}^+$ の一つの取り方として $\mathrm{diag}^a\mathfrak{a}'^+$ がある．$\theta=\theta'\times\theta'$ は σ と可換だから, $K=K'\times K'$ とすることで, G の一般化 *Cartan* 分解 $G=(K'\times K')\exp(\mathrm{diag}^a\mathfrak{a}'^+)\mathrm{diag}G'$ を得る．一般化 *Cartan* 射影 $\nu_G\colon G\to\mathfrak{a}^+=\mathrm{diag}^a\mathfrak{a}'^+$ について, $\mathrm{pr}_1\circ\nu_G(g_1',g_2')=\mu_{G'}(g_1'g_2'^{-1})/2$, *(*$\mu_{G'}$ は G' の *Cartan* 射影*)* が成立する．

一般化 Cartan 射影 ν_G の右 H 不変性から自然に定まる $\nu_X\colon X=G/H\to\mathfrak{a}^+$ を用いて,

$$B_X(R):=\{x\in X\mid\|\nu_X(x)\|\leq R\},$$

を対称空間 X 上の半径 R の "擬球" とみなす．ここで, $\mathfrak{a}$ への $\mathfrak{g}$ の Killing 形式の制限は正定値の内積なので, この内積が定める $\mathfrak{a}$ 上のノルムを $\|\cdot\|$ とした．K のコンパクト性から ν_X の固有性が直ちに従い, よって $B_X(R)$ はコンパクトである．非コンパクト型 Riemann 対称空間 $X=G/K$ の場合は, d_X を X の Riemann 多様体としての構造から定まる自然な距離, x_0 を原点 eK として,

$$\|\nu_X(x)\|=d_X(x,x_0),$$

が成立し, "擬球" は普通の意味での原点中心の球であることに注意しておきたい．

注意 4.3. 対称空間が群多様体 G' の場合, 例*4.2(2)* の様に一般化 *Cartan* 射影は計算されるが, 個人的な理由により, この場合には擬球を

$$B_{G'}(R):=\{x\in G'\mid\|\mu_{G'}(x)\|/2\leq R\},$$

で定義して, 後の議論に用いる．本来の擬球と若干異なる事に注意されたい．

5 離散スペクトラムの構成

この節では, 小林・Kassel により暗に示されていた次の定理を

$$(G,H)=(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}),\mathrm{diag}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))),X=G/H\cong\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}),$$

の場合に限って証明する.

定理 5.1 ([KK16])**.** *$X=G/H$ を条件 (2.1) を満たす半単純対称空間, $\Gamma\subset G$ を X の不連続群とする. 数え上げの条件*

$$\exists A,a>0,\forall x\in X,\forall R>0,N_\Gamma(x,R)<Ae^{aR}, \tag{5.1}$$

が成立するならば, $\#\mathrm{Spec}_{\mathrm{d}}(\Gamma\backslash G/H)=\infty$.

定理の $(G,H)=(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}),\mathrm{diag}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})))$ の場合における証明は以降の小節で行う事として, その前に一般の G,H,Γ での証明の方針と $N_\Gamma(x,R)$ の定義を述べよう. 議論の出発点となるアイデアは, 条件 (2.1) から, $X=G/H$ には離散系列表現が無限個存在し (2 節参照), 従って $\mathbb{D}_G(X)$ の固有値 λ を持つ同時 L^2 固有関数 φ_λ が無限個の $\lambda\in\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}^*/W$ に対して存在するが, これらの関数 φ_λ に対して, 一般化された Poincare 級数

$$\varphi_\lambda^\Gamma(\Gamma x)=\sum_{\gamma\in\Gamma}\varphi_\lambda(\gamma^{-1}x),$$

を考えることで, $\Gamma\backslash G/H$ 上の同時 L^2 固有関数を構成する, というものである. もちろん, φ_λ^Γ の収束性, さらにはより難しい問題として φ_λ^Γ が非零である事については議論しなければならない. この為に [KK16] では, φ_λ の一般化 Cartan 射影方向の漸近挙動を [Osh88] を用いる事で評価した. さらに, X の不連続群 Γ の各軌道 $\Gamma x,(x\in X)$ の分布を定量的に測る為に, [KK16] は 4 節で定義された「擬球」$B_X(R)$ での「数え上げ」

$$N_\Gamma(x,R):=\#(\Gamma x\cap B_X(R)),$$

を導入した. 漸近挙動と定理 5.1の数え上げの仮定を用いる事で φ_λ^Γ の収束性の処理は, 後述の証明を見てもらえれば分かる様に比較的簡単に出来る.

注意 5.2. *[KK16] は不連続群の「強不連続性」なる概念を導入し, 強不連続群 Γ については数え上げの条件 (5.1) が成立する事を Riemann 幾何を用いて証明した.*

以降では $(G,H)=(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}),\mathrm{diag}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})))$ の場合に限る. この理由の一つは, 上記の漸近挙動の考察を初等的に行いたいためである. さて, $(G,H)=(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}),\mathrm{diag}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})))$ の場合, $\Box_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の Casimir 元から定まる $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 上の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 不変な微分作用素とすると, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ が rank 1 の群である事から,

$$\mathbb{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))=\mathbb{C}[\Box_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}],$$

であり,

$$\mathrm{Spec}_{\mathrm{d}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\exists f\in L^2(X)\setminus\{0\}\text{ s.t. }\Box_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}f=\lambda f.\},$$

である.

またこの場合, 定理 5.1の rank に関する条件は満たされるので, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の離散系列表現が存在するわけだが, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ については次の事実が成立する.

事実 5.3.

$$\mathrm{Spec_d}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})) = \{\ell(\ell-2) \mid \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 2}\}.$$

注意 5.4. *5.2 節で $\ell(\ell-2)$ の固有値を持つ L^2 固有関数 ψ_ℓ を構成する.*

さて, $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ に対して, g で左移動してから Poincare 級数を取る射

$$S_{\Gamma,g,\ell}\colon \begin{array}{ccc} \ell_g^* L^2_{\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}),\ell(\ell-2)}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})) & \longrightarrow & L^2_{\ell(\ell-2)}(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})) \\ \ell_g^*\varphi_\ell & \longmapsto & (\ell_g^*\varphi_\ell)^\Gamma \end{array},$$

を考える. ただし, この射が well-defined かはまだ議論されていない.

ここで, $L^2_{\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}),\ell(\ell-2)}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ を $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ 有限な $\square_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ の固有値 $\ell(\ell-2)$ の L^2 固有関数全体の集合, $L^2_{\ell(\ell-2)}(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ を $\square_{\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ の固有値 $\ell(\ell-2)$ の固有関数全体の集合とし, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 上の関数 f に対して, $\ell_g^* f(x) := f(g^{-1}x)$, $(g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ の様に $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の作用を定めた.

以下では定理 5.1より強い, 次の主張を証明する.

定理 5.5 ([KK16]). $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の不連続群とする. 数え上げの条件 *(5.1)* が成立するならば, 任意の g に対してある $\ell_g \in \mathbb{N}$ が存在し, 整数 $\ell \geq \ell_g$ については $S_{\Gamma,g,\ell}$ は *well-defined* である. さらに, ある $g_\Gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \ell_\Gamma \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の偶数 $\ell \geq \ell_\Gamma$ に対して $S_{\Gamma,g_\Gamma,\ell}$ は非零になる.

5.1 $\square_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ の $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ 有限な固有関数 φ_ℓ の漸近挙動

この小節では常微分方程式の確定特異点の理論を用いて, $\square_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ の $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ 有限な固有関数の漸近挙動に関する次の事実を示す.

命題 5.6. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 上の $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ 有限な関数 φ_ℓ で, 超関数の意味で $\square_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}\varphi_\ell = \ell(\ell-2)\varphi_\ell, (\ell \in \mathbb{C})$ を満たすものについて, ある $C > 0$ が存在して,

$$|\varphi_\ell(x)| \underset{\|x\|\to\infty}{\sim} C(\cosh\|x\|)^{-\mathrm{Re}\frac{\ell}{2}} \text{ もしくは } C(\cosh\|x\|)^{\mathrm{Re}\frac{\ell}{2}-1},$$

が成立. ここで $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の *Cartan* 射影 $\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ を用いて, $x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ に対して $\|x\| = \frac{1}{2}\left|\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}(x)\right|$ とした *(注意4.3参照)*.

事実 5.3と組み合わせて, 次を得る.

系 5.7. 命題 *5.6*の仮定を満たす L^2 固有関数 φ_ℓ に対しては, ある $C > 0$ が存在して,

$$|\varphi_\ell(x)| \underset{\|x\|\to\infty}{\sim} C(\cosh\|x\|)^{-\frac{\ell}{2}},$$

が成立.

Proof. Cartan 分解 $x = k(\frac{\theta_1-\theta_2}{2})a(t)k(\frac{\theta_1+\theta_2}{2})$ を用いて $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ に座標を定め, $\square_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ のその座標での表示を計算する. ここで, 変数は $-\pi \leq \theta_i < \pi, (i = 1, 2)$, $t \geq 0$ を動き,

$$k(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, a(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix},$$

である．ここで, $\|x\|=2t$ である事を注意しておく．さて, この座標で $\square_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ の表示を計算すると,

$$\square_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\coth 2t\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{\cosh^2 t}\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}+\frac{1}{\sinh^2 t}\frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2},$$

となる．さらに．$u=(\cosh 2t)^{-1}$ で変換すると,

$$\square_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}=4\left(\left(u\frac{\partial}{\partial u}\right)^2-u\frac{\partial}{\partial u}\right)-4u^2\left(\left(u\frac{\partial}{\partial u}\right)^2+u\frac{\partial}{\partial u}\right)-\frac{2u}{u+1}\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}-\frac{2u}{u-1}\frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2},$$

となり, $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ 相対不変（つまり, $\frac{\partial}{\partial\theta_1},\frac{\partial}{\partial\theta_2}$ がスカラーで作用する）な $\square_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ の固有値 $\ell(\ell-2)$ の固有関数が満たす $u=(\cosh 2t)^{-1}=(\cosh\|x\|)^{-1}$ についての常微分方程式は $u=0$ を確定特異点に持ち, その特性方程式は $4(\rho^2-\rho)=\ell(\ell-2)$, よって特性指数 ρ は $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ の指標に依らず $\frac{\ell}{2},-\frac{\ell}{2}+1$ となる．従って, $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ 相対不変な関数については示すべき主張が得られ, よって一般の $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ 有限な関数についても命題の主張が正しいと分かる． $\square$

注意 5.8. $g_1,g_2,x\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ に対して成立する不等式 $\|g_1xg_2^{-1}\|\leq\|x\|+(\|g_1\|+\|g_2\|)$ から, 任意の $g=(g_1,g_2)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ に対して $gB_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}(r)\subset B_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}(r+(\|g_1\|+\|g_2\|))$ が成立するが, この事実と命題 5.6 から, φ_ℓ を $\ell_g^*\varphi_\ell$ に置き換えても命題 5.6 と同じ主張が成立する．

5.2 定理 5.5の証明

この小節では定理 5.5の証明を後で証明する命題 5.10を認めたうえで完結させる．まず, $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ 有限な $\square_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ の固有値 $\ell(\ell-2)$ の固有関数 φ_ℓ に対して ℓ が十分大きい時は Poincare 級数 φ_ℓ^Γ が絶対一様収束する事を示す．

$$\begin{aligned}
|\varphi_\ell^\Gamma(\Gamma x)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ n-1\leq\|\gamma^{-1}x\|<n}}|\varphi_\ell(\gamma^{-1}x)|\\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ n-1\leq\|\gamma^{-1}x\|<n}}B\left(\cosh\|\gamma^{-1}x\|\right)^{-\ell/2}\quad(\text{系 5.7によりこのような } B \text{ が存在する})\\
&\leq B\sum_{n=1}^{\infty}N_\Gamma(x,n)\left(\cosh(n-1)\right)^{-\ell/2}\\
&\leq AB\sum_{n=1}^{\infty}e^{an}\left(\cosh(n-1)\right)^{-\ell/2}.
\end{aligned}\tag{5.2}$$

最後の不等式で定理 5.3の仮定を用いた．最後の級数は ℓ が十分大きい (これは φ_ℓ に依存しない) と絶対収束するから, φ_ℓ^Γ は連続かつ有界である．事実 3.4により得られる $\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の基本領域 $\mathcal{D}_{\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ を用いて, 自然な同型 $L^p(\mathcal{D}_{\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})})\cong L^p(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$, $(1\leq p\leq\infty)$ が得られるが, 系 5.7により, $\ell>2$ の時には $\varphi_\ell\in L^1(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ となるから, Poincare 級数 $\sum_{\gamma\in\Gamma}\ell_\gamma^*\varphi_\ell$ が $L^1(\mathcal{D}_{\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})})$ で収束する事は明らかである．不等式 $\|f\|_{L^2}\leq\sqrt{\|f\|_{L^1}\|f\|_{L^\infty}}$ によって, この級数は $L^2(\mathcal{D}_{\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})})$ で収束する．さらに,

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}\square_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}\ell_\gamma^*\varphi_\ell=\sum_{\gamma\in\Gamma}\ell(\ell-2)\ell_\gamma^*\varphi_\ell$$

も $\ell(\ell-2)\varphi_\ell^\Gamma$ に $L^2(\mathcal{D}_{\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})})$ で収束する事が分かる．したがって, $L^2(\mathcal{D}_{\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})})$ において,

$$\Box_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}\varphi_\ell^\Gamma = \ell(\ell-2)\varphi_\ell^\Gamma,$$

が分かる．注意 5.8により, 上記の議論は φ_ℓ を $\ell_g^*\varphi_\ell$, $(g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ に置き換えても成立するから, $S_{\Gamma,g,\ell}$ は (g に依存した) 十分大きい ℓ で well-defined であると分かる．

次に非零性を示そう．その為に任意の $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対して,

$$\psi_\ell(x) = (x_1+\sqrt{-1}x_2)^{-\ell} \text{ for } x = \begin{pmatrix} x_1+x_4 & x_2+x_3 \\ -x_2+x_3 & x_1-x_4 \end{pmatrix},$$

なる関数を導入する．

注意 5.9. 関数 ψ_ℓ は *[KK16, Ch. 9]* では ψ_ℓ^+ として導入されている．

ψ_ℓ は $L^2(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ であり, $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ 不変な $\Box_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ の固有値 $\ell(\ell-2)$ の固有関数であることが確かめられる．$E \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ を単位行列として,

$$\begin{aligned}(\ell_g^*\psi_\ell)^\Gamma(\Gamma g E) &= \sum_{\gamma \in g^{-1}\Gamma g} \psi_\ell(\gamma^{-1}E) \\ &= \sum_{\substack{\gamma \in g^{-1}\Gamma g \\ \|\gamma^{-1}E\|=0}} \psi_\ell(\gamma^{-1}E) + \sum_{\substack{\gamma \in g^{-1}\Gamma g \\ \|\gamma^{-1}E\|>0}} \psi_\ell(\gamma^{-1}E).\end{aligned}$$

を得る．また, $c_g := \inf\{\|\gamma^{-1}E\| \mid \gamma \in g^{-1}\Gamma g \text{ s.t. } \|\gamma^{-1}E\| > 0\}$ とする．これは Γ の固有不連続性から非零であるが, 不等式 (5.2) の証明と同様にして,

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{\substack{\gamma \in g^{-1}\Gamma g \\ \|\gamma^{-1}E\|>0}} \psi_\ell(\gamma^{-1}E)\Big| &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\substack{\gamma \in g^{-1}\Gamma g \\ c_g(n-1) \leq \|\gamma^{-1}E\| < c_g n}} |\psi_\ell(\gamma^{-1}E)| \\ &\leq AB\sum_{n=2}^{\infty} e^{ac_g n}\left(\cosh c_g \frac{(n-1)}{2}\right)^{-\ell}.\end{aligned}$$

を得る．よって各 $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ に対してある $\nu_g \in \mathbb{Z}_{\geq \nu}$ が存在して, $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq \nu_g}$ に対して,

$$\Big|\sum_{\substack{\gamma \in g^{-1}\Gamma g \\ \|\gamma^{-1}E\|>0}} \psi_\ell(\gamma^{-1}E)\Big| < 1.$$

となる事が分かる．よって, 後は

$$\sum_{\substack{\gamma \in g^{-1}\Gamma g \\ \|\gamma^{-1}E\|=0}} \psi_\ell(\gamma^{-1}E) \geq 1,$$

を示せば $(\ell_g^*\psi_\ell)^\Gamma \neq 0$ が分かる．下の命題 5.10によって, ある $g_\Gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ が存在して $\displaystyle\sum_{\substack{\gamma \in g_\Gamma^{-1}\Gamma g_\Gamma \\ \|\gamma^{-1}E\|=0}} \psi_\ell(\gamma^{-1}E)$ の和に出る項は偶数 ℓ に対しては全て $\psi_\ell(\pm E) = (\pm 1)^{-\ell} = 1$ となる．以上によって $S_{\Gamma,g_\Gamma,\ell}$ の (偶数 ℓ が十分大きい時の) 非零性も分かり, これで証明が完結した．

5.3 命題5.10の証明

この小節では最後に残った次の命題を証明することを目標とする.

命題 5.10 ([KK16, Prop. 8.9]). G' を中心が有限な連結半単純群でコンパクト因子を持たないもの, $S \subset G := G' \times G'$ を可算部分集合とすると, ある G の元 g が存在して, 任意の $s \in S \setminus Z(G)$ に対して, $\nu_G(g^{-1}sg) \neq 0$.

小林・Kassel[KK16] ではより一般の設定で Fact 5.10を証明しており, その証明は (少なくとも筆者にとっては) 難しいが, 上記の設定では初等的に証明することが出来るので, ここではその証明を載せておく. なお, [KK16, Prop. 8.9] では S が G/H の不連続群であることを課していたのに対し, 上記の主張は S の可算性のみを課せば十分であることに注意しておきたい. この点についてはより一般の場合でも同様である.

証明の前に次の補題を証明しておく.

補題 5.11. K' を G' の極大コンパクト部分群とすると $C' = \bigcap_{g' \in G'} g'^{-1}K'g'$ は G' の中心 $Z(G')$ に含まれる.

Proof. C' は G' の閉正規部分群であり, その Lie 環は G' がコンパクト因子を持たない事から 0 の為, C' は G' の離散部分群である. 任意の $c' \in C'$ に対して $\{g'c'g'^{-1}\}_{g' \in G'}$ は C' の部分集合なので G' で離散となる一方, G' の連結性により連結でもあるから, 一点集合 $\{c'\}$ となる. これは $C' \subset Z(G')$ を意味する. □

命題 5.10の証明. $g = (g'_1, g'_2), s = (s'_1, s'_2)$ として, $\nu_G(g^{-1}sg) \neq 0$ は $g_1'^{-1}s'_1g'_1g_2'^{-1}s_2'^{-1}g'_2 \notin K'$ と同値である. まず $\#S = 1$ の場合を証明する. $S = \{(s'_1, s'_2)\}$ として,

(i) $s'_1s_2'^{-1} \notin Z(G')$,

(ii) $s'_1s_2'^{-1} \in Z(G')$,

の場合に分けて証明する.

(i) の場合, $s'_1s_2'^{-1} \notin C'$ だから, 補題からある $g' \in G'$ であって, $g'^{-1}s'_1s_2'^{-1}g' \notin K'$ となる. そこで $g = (g', g')$ とすればよい.

(ii) の場合, $s_1 \notin Z(G')$ だから, G' の連結性から $\mathrm{Ad}(s_1) \neq \mathrm{id}$. よってある $g' \in G'$ が存在して $s'_1g's_1'^{-1}g'^{-1} \notin Z(G')$, 仮定により $s'_1g's_2'^{-1}g'^{-1} \notin Z(G')$ を得る. よって, 補題によりある $g'' \in G'$ が存在して $g''^{-1}s'_1g's_2'^{-1}g'^{-1}g'' \notin K'$ となる. $g'_1 = g'', g'_2 = g'^{-1}g''$ として, $g = (g'_1, g'_2)$ とすればよい.

次に S が可算部分集合の時に示す. $s \in S \setminus Z(G)$ に対して, 解析的な写像 $f_s \colon G \to G$ を $g \mapsto g^{-1}sg$ で定める. また, $Y = \{g \in G : \nu_G(g) = 0.\} = \{g = (g'_1, g'_2) \in G \mid g'_1g_2'^{-1} \in K'.\}$ が解析集合であることから, $f_s^{-1}(Y)$ も G の解析集合. 一方, $\#S = 1$ の場合には正しいことから $f_s^{-1}(Y)$ は G 全体ではない. 解析関数の一致の原理と G の連結性により $f_s^{-1}(Y)$ は内点を持たない. さらに Baire のカテゴリー定理から, $\bigcup_{s \in S \setminus Z(G)} f_s^{-1}(Y)$ も内点を持たない. そこで $g \in G \setminus \bigcup_{s \in S \setminus Z(G)} f_s^{-1}(Y)$ を取ればよい.

□

6 主結果

この節では主結果を簡単に説明する．冒頭で述べた様に，詳細については RIMS 講究録 2103 番の記事を参照されたい．定理の説明のために記号を定義なしに導入しておこう．筆者は Guéritaud-Kassel [GK17, Sect 10.1]) のアイデアを基にして，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ に固有不連続に作用する無限生成の自由群

$$\Gamma_\nu(a_1,a_2,r,R) \equiv \Gamma_\nu(\{a_1(k)\}_{k\in\mathbb{N}},\{a_2(k)\}_{k\in\mathbb{N}},\{r(k)\}_{k\in\mathbb{N}},\{R(k)\}_{k\in\mathbb{N}})$$

を，$\nu \in \mathbb{N}$ と実数列

$$\{a_1(k)\}_{k\in\mathbb{N}},\{a_2(k)\}_{k\in\mathbb{N}},\{r(k)\}_{k\in\mathbb{N}},\{R(k)\}_{k\in\mathbb{N}},$$

で，とある条件群を満たすものに対して構成した．RIMS 講究録 2103 番の記事では，$\Gamma_N^{j,\rho}$ と書いたものである．

さて，注意 5.2で述べた様に，数え上げ条件 (5.1) は Γ が強不連続なる条件を満たす際には満たされる．しかし，強不連続でない Γ についてを数え上げ条件 (5.1) を満たすことがあるかという疑問については次の様に肯定的な結果を得た．

定理 6.1.

$$a_1(k) = e^{e^k}, a_2(k) = e^{e^k+\frac{1}{2}}, r(k) = 1, R(k) = e^k,$$

とする．十分大きい $\nu \in \mathbb{N}$ に対して次が成立．

(1) $\Gamma_\nu(a_1,a_2,r,R)$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の不連続群だが，強不連続群ではない．

(2) 任意の $x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ と $R > 0$ に対して，$N_{\Gamma_\nu(a_1,a_2,r,R)}(x,R) \leq 2^{2R+16}$ が成立．

(3) 離散スペクトラム $\mathrm{Spec}_{\mathrm{d}}(\square_{\Gamma_\nu(a_1,a_2,r,R)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})})$ は無限集合．

逆に数え上げの条件 (5.1) を満たさないものが存在するか，という疑問について筆者は次の結果を得た．

定理 6.2. 関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \to \infty$ で $f(x) \to \infty$ となる，滑らかで下に真に凸な狭義単調増加関数とすると，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の不連続群 Γ_f が存在して，

$$\lim_{R\to\infty} \frac{N_{\Gamma_f}(E,R)}{f(R)} = \infty$$

となる．ここで，E は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の単位行列．

このような現象は Riemann 幾何においてはあり得なかった事には注意しておきたい．

引用文献

[Ben96] Y. Benoist. *Actions propres sur les espaces homogènes réductifs. Ann. of Math.*, 144:315–347, 1996.

[FJ80] M. Flensted-Jensen. *Discrete series for semisimple symmetric spaces. Ann. of Math.*, 111:253–311, 1980.

[GK17] F. Guéritaud and F. Kassel. *Maximally stretched laminations on geometrically finite hyperbolic manifolds. Geom. Topol.*, 21:693–840, 2017.

[Hel00] S. Helgason. Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions, volume 83 of Mathematical Surveys and Monographs. *American Mathematical Society*, 2000.

[KK16] F. Kassel and T. Kobayashi. *Poincaré series for non-Riemannian locally symmetric spaces. Adv. Math.*, 287:123–236, 2016.

[Kob89] T. Kobayashi. *Proper action on a homogeneous space of reductive type. Math. Ann.*, 285:249–263, 1989.

[Kob96] T. Kobayashi. *Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups. J. Lie Theory*, 6:147–163, 1996.

[MO84] T. Matsuki and T. Oshima. *A description of discrete series for semisimple symmetric spaces. Advanced Studies in Pure Mathematics.*, 4:331–390, 1984.

[Moo66] C. C. Moore. *Ergodicity of flows on homogeneous spaces. Amer. J. Math.*, 88:154–178, 1966.

[Osh88] T. Oshima. *Asymptotic Behavior of Spherical Functions on Semisimple Symmetric Spaces. Advanced Studies in Pure Mathematics.*, 14:561–601, 1988.

[Sch84] H. Schlichtkrull. Hyperfunctions and Harmonic Analysis on Symmetric Spaces., volume 49 of Progress in Mathematics. *Birkhäuser Basel*, 1984.

Graduate School of Mathematical Sciences
The University of Tokyo
3-8-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8914
JAPAN
E-mail address: `kannaka@ms.u-tokyo.ac.jp`