多重調和弱 Maass 形式の Fourier 係数 (survey article)

九州大学数理学研究院 / 松坂 俊輝
Faculty of Mathematics, Kyushu University / Toshiki Matsusaka
日本学術振興会特別研究員（PD）

1 前半

1.1 古典的な結果

整数係数の二元二次形式

$$Q(X,Y) = aX^2 + bXY + cY^2$$

を考える．Gauss はその著書 "Disquisitiones Arithmeticae (1801)" において，二次形式の類別をはじめとする数多くの研究を行なった．その後 Kronecker[Kro60, Kro75] は判別式が負の場合について様々な類別を考えており，それぞれの類の個数を $E(n), F(n), G(n)$ などと置くときに，その間にある関係式をいくつも与えている．特に [Kro75] において $H(n) := G(n) - F(n)$ として導入されたこの値は，その後 Hurwitz [Hur85] によって以下のように解釈されており，現在では Kronecker-Hurwitz 類数として知られている．

負の判別式 $d \equiv 0, 1 \pmod 4$ に対し，$d = b^2 - 4ac$ を満たすような二次形式 $Q(X,Y) = [a,b,c] = aX^2 + bXY + cY^2$ で正定値（つまり $a > 0$）なもの全体の集合を $\mathcal{Q}_d$ と書くことにする．このときモジュラー群 $\Gamma := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の $\mathcal{Q}_d$ への右作用が $(Q \circ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix})(X,Y) := Q(aX+bY, cX+dY)$ によって定まっており，特に同値類 $\mathcal{Q}_d/\Gamma$ は有限集合になることが知られている[1]．さらに Γ_Q を Q の固定部分群とすると，その位数は $Q \overset{\Gamma}{\sim} [a,a,a], [a,0,a], \text{otherwise}$ に応じて $|\Gamma_Q| = 6, 4, 2$ で与えられる．このとき $n = -d > 0$ に対し，Kronecker-Hurwitz 類数 $H(n)$ は

$$H(n) = H(-d) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_d/\Gamma} \frac{2}{|\Gamma_Q|} \tag{1.1}$$

で与えられる．特に基本判別式 d に対して，同値類の個数 $h(d) := |\mathcal{Q}_d/\Gamma|$ はいわゆる二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の類数[2] と呼ばれるものであり，Dirichlet の類数公式を用いるなら，

$$L(1, \chi_d) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{\pi}{\sqrt{|d|}} \frac{2h(d)}{|\Gamma_Q|} = \frac{\pi}{\sqrt{|d|}} H(-d) \tag{1.2}$$

が成り立つことがわかる．ここで $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ は Kronecker 記号である．さて Hurwitz[Hur85] が示したことの一つは，この類数 $H(n)$ が次の非常に簡明な等式を満たすというものである．

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}} H(4n - r^2) = \sum_{d|n} \max(d, \frac{n}{d}). \tag{1.3}$$

[1] 例えば [AIK14, Chapter 6] には d が基本判別式に限らず詳細が載っている．

[2] 類数の記号として h がよく使われる．例えば Gauss は [Gau01, Art. 291] において，"si h designet multitudinem classium in genere principali, ..." の通り，ある種の類の個数として記号 h をあてている．どちらにせよ，a から g までのアルファベットを使い，その続きとして用いられた記号のように見えるが，どうなのであろうか？

ここで $H(0) = -\dfrac{1}{12}$ とおき，$n < 0$ に対しては $H(n) = 0$ と定めているため，左辺の和は有限和である．その後の研究も含めこの類数 $H(n)$ の満たす関係式は多く知られており，[Dic52, Chapter IV] に集められている．例えば，他に知られている等式

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}} (n - r^2) H(4n - r^2) = \sum_{d|n} \min(d, \frac{n}{d})^3$$

と合わせれば，$H(n)$ の定義を知らなくても漸化的に値を計算できることは，金子 [Kan01] の記す通りである．

1.2　21 世紀の進展（その 1）

以上は 100 年以上前の数学であるが，この方向性の研究というのは今なお古びることなく盛んに進められている．一つに 2002 年 Zagier[Zag02] は楕円モジュラー j 関数に対し，(1.1) の類似を考察している．正の整数 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，$j_m(z)$ を $j(z)$ の多項式で $q^{-m} + O(q)$ の形の Fourier 展開を持つものとする．最初の数個を例示するなら，

$$\begin{aligned} j_1(z) &= j(z) - 744 = q^{-1} + 196884q + 21493760q^2 + \cdots, \\ j_2(z) &= j(z)^2 - 1488j(z) + 159768 = q^{-2} + 42987520q + 40491909396q^2 + \cdots \end{aligned}$$

である．これは j 関数に Hecke 作用素 T_m を作用させたときに得られる関数である．これに対し Zagier は次のトレース関数を定義した．

$$\mathrm{Tr}_d(j_m) := \sum_{Q \in \mathcal{Q}_d/\Gamma} \frac{2}{|\Gamma_Q|} j_m(\alpha_Q) \qquad (d < 0). \tag{1.4}$$

ここで $\alpha_Q \in \mathbb{H}$ は $Q(\alpha_Q, 1) = 0$ となる上半平面 $\mathbb{H}$ 上の元としている[3]．このとき Zagier が示すには，任意の負の判別式 $d < 0$ に対し，$\mathrm{Tr}_d(j_m)$ は整数であり，母関数

$$g_m(z) := \sum_{\substack{d<0 \\ d \equiv 0,1(4)}} \mathrm{Tr}_d(j_m) q^{-d} + 2\sigma_1(m) - \sum_{k|m} k q^{-k^2} \tag{1.5}$$

は $\Gamma_0(4)$ に関する重さ 3/2 の弱正則モジュラー形式となる．(ここで $\sigma_1(n) := \sum_{d|n} d$ である）．さらにそこから Hurwitz の結果 (1.3) の類似関係式，例えば

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}} \mathrm{Tr}_{r^2-4n}(j_1) = 0$$

を得ている．ここで (1.5) に従い補完的に $\mathrm{Tr}_0(j_1) = 2, \mathrm{Tr}_1(j_1) = -1$ としている．他にも時代は前後するが，1996 年[4] に金子 [Kan96] は $j(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} c_n q^n$ と Fourier 展開を表すときに，$n > 0$ に対し，

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{n} \Big\{ \sum_{r \in \mathbb{Z}} \mathrm{Tr}_{r^2-n}(j_1) + \sum_{r \geq 1, \mathrm{odd}} \big((-1)^n \mathrm{Tr}_{r^2-4n}(j_1) - \mathrm{Tr}_{r^2-16n}(j_1) \big) \Big\}, \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{r \in \mathbb{Z}} \mathrm{Tr}_{r^2-4n}(j_2) \end{aligned} \tag{1.6}$$

などを示している．この等式について金子は [Kan01, KO07] において，

[3] $j(\alpha_Q)$ は特異モジュライと呼ばれ，代数的数になることが知られている．
[4] Zagier [Zag02] の結果は既にこのとき存在していた．

- 「問題のひとつとして考えられるのは，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を他の種数 0 の群にして，そこでの $j(\tau)$ にあたるもの（“Hauptmodul”）の係数の公式を問うことであろう.」

- （レベル $N = 2, 3, 4$ に対して類似公式を求めた際）「... 式を実験的に見つけ出す．... これは至って発見的なやり方で，一般性がない」

- 「今のところこれといった応用がない」

などのコメントを残しているが，これについてはここ 5 年程度でいくつか進展があるため，簡単にまとめておく．まず上の二つのコメントについて，大田 [Oht09], 長内 [MO17] は金子の実験的手法に従い，$\Gamma_0(N)$（但し $N = 2, 3, 4, 5$）に対しその回答を与えている．その後，著者 [Mat17] は Bruinier-Funke[BF06] による Zagier の結果の拡張を用いることで，より一般の群に対して実験的でないごく自然な証明を与えた．アイデアだけ述べると，Bruinier-Funke によって，f を重さ 0 の弱正則モジュラー形式とするとき，$\mathrm{Tr}_d(f)$ を係数に持つような重さ 3/2 のベクトル値モジュラー形式[5] が構成されている．ここからテータ分解によって弱正則 Jacobi 形式を構成し，適切に特殊化することで，$2j'(z) = ((g_2\theta)|U_4)(z)$ のような形の等式を一般に示すことができる．ここで，$' := \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d}{dz}, \theta(z) := \displaystyle\sum_{r\in\mathbb{Z}} q^{r^2}, U_4 : \sum a_n q^n \mapsto \sum a_{4n} q^n$ としている．また応用については 2016 年 Murty-Sampath [MS16] が，c_n の漸近公式 $c_n \sim \dfrac{e^{4\pi\sqrt{n}}}{\sqrt{2}n^{3/4}}$ $(n \to \infty)$ を金子の公式 (1.6) から求めることに成功している．これは従来の circle 法を用いない別証明を与えている．

一方で $j_0(z) = 1$ と見るなら，その定義から $\mathrm{Tr}_d(1) = H(-d)$ である．(1.5) と同様に母関数

$$g_0(z) := -\frac{1}{12} + \sum_{\substack{d<0 \\ d\equiv 0,1(4)}} \mathrm{Tr}_d(1) q^{-d} \tag{1.7}$$

を考えると，これ自体はモジュラー形式とはならないが，Zagier [Zag75] はこの母関数が $\Gamma_0(4)$ に関する重さ 3/2 のモックモジュラー形式になることを示した．上記の金子の結果を見ると，この保型性から逆に Hurwitz の式 (1.3) を得られることが期待されるが，これは実際に Mertens [Mer14] によって実現されている．アイデアを簡単に述べると，[IRR14] で用いられた正則射影の手法を拡張することで，

$$g_0(z)\theta(z) + \sum_{r=1}^{\infty}\Biggl(\sum_{\substack{d|r \\ d\equiv r/d(2), d<\sqrt{r}}} d\Biggr) q^r + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty} r q^{r^2}$$

が $\Gamma_0(4)$ に関する重さ 2 の準保型形式 (quasi-modular form) になることがわかる．ここで [KZ95] によると，そのような関数は $E_2(z) := 1 - 24\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n$ および $M_2(\Gamma_0(4))$ の生成元である $\theta(z)^4$ と $F(z) := \displaystyle\sum_{n\geq 1,\ \mathrm{odd}} \sigma_1(n) q^n$ の線形和で表せるため，具体的に最初の数項を確認することで

$$g_0(z)\theta(z) + \sum_{r=1}^{\infty}\Biggl(\sum_{\substack{d|r \\ d\equiv r/d(2), d<\sqrt{r}}} d\Biggr) q^r + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty} r q^{r^2} = -\frac{1}{48}E_2(z) + \frac{1}{3}F(z) - \frac{1}{16}\theta(z)^4$$

という等式が得られる．後は U_4 を作用させて両辺の係数を比較する（もしくは単に $4n$ 番目の係数を比較する）ことで，(1.3) の式が得られるという仕組みである．

[5] ここでいうベクトル値モジュラー形式とは，[Bru02] で扱われているような関数 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}[L'/L]$ で Weil 表現 ρ_L に付随する保型性を持つものである．

1.3 21 世紀の進展（その 2）

ここまでは $d<0$ に関する話であったが，一方で判別式 $d>0$ についても様々なことがわかってきた．正の判別式 $d\equiv 0,1 \pmod 4$ に対し，$b^2-4ac=d$ なる整数係数二元二次形式 $Q(X,Y)=[a,b,c]$ 全体の集合を，改めて $\mathcal{Q}_d$ とおくことにする．このときは先頭係数 a に符号の条件はつけないことに注意する．このとき d が平方数でないとして[6]，(1.4) と同様の量を考えようとすると，$Q(z,1)=0$ の根 w_Q, w'_Q は実二次無理数となり $j(z)$ に直接代入することはできない．この問題に対して金子 [Kan09] は特異モジュライ $j(\alpha_Q)$ の代わりに，サイクル積分

$$j(w_Q) := \int_{C_Q} j(z)ds \tag{1.8}$$

を考察し，特異モジュライの実二次類似物と解釈している[7]．ここで S_Q を w_Q, w'_Q をつなぐ上半平面 $\mathbb{H}$ 上の測地線としたとき，$C_Q := \Gamma_Q\backslash S_Q$ はリーマン面 $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ 上の閉測地線を定めており，また $ds^2 := \dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$ は Poincaré 計量である．このとき $j_m(w_Q)$ も同様に定義したとして，

$$\mathrm{Tr}_d(j_m) := \frac{1}{2\pi}\sum_{Q\in\mathcal{Q}_d/\Gamma} j_m(w_Q) \qquad (d>0, d \text{ は平方数でない}),$$

(d が平方数の場合も適切な正規化 $\mathrm{Tr}_d^{\mathrm{reg}}(j_m)$ を定義できる) を考えるとき，(1.5) と同様の母関数

$$\sum_{\substack{0<d\neq\square\\ d\equiv 0,1(4)}} d^{-1/2}\mathrm{Tr}_d(j_m)q^d + \sum_{0<d=\square} d^{-1/2}\mathrm{Tr}_d^{\mathrm{reg}}(j_m)q^d$$

が $\Gamma_0(4)$ に関する重さ $1/2$ のモックモジュラー形式となることが Duke-Imamoḡlu-Tóth [DIT11] によって示された．さらにモックモジュラー形式には “シャドー” と呼ばれる対となる正則モジュラー形式が存在するのだが（定義については後で正確に述べる），このモックモジュラー形式に対するシャドーが (1.5) の定数倍で与えられることもわかっており，そういう意味でもこの $j(w_Q)$ が特異モジュライ $j(\alpha_Q)$ の実二次類似物だと考えられる．ここで定義の中に現れる $1/2\pi$ の正規化項についてコメントしておく．先と同様に $j_0=1$ とし，d を特に基本判別式とするとき，$\mathrm{length}(C_Q)=2\log\varepsilon_d$ であることから，(1.2) と同様の関係式

$$\mathrm{Tr}_d(1) = \frac{1}{2\pi}\sum_{Q\in\mathcal{Q}_d/\Gamma}\int_{C_Q} ds = \frac{h(d)\log\varepsilon_d}{\pi} = \frac{\sqrt{d}}{\pi}L(1,\chi_d)$$

が得られる．但し，$h(d)$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の狭義類数であり，$\varepsilon_d>1$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の極大整環 $\mathcal{O}_d$ におけるノルム 1 なる最小の単数としている．$d<0$ のときも $m=0$ と $m>0$ の場合で状況が異なったように，その母関数

$$\sum_{\substack{0<d\neq\square\\ d\equiv 0,1(4)}} d^{-\frac{1}{2}}\mathrm{Tr}_d(1)q^d + \sum_{0<d=\square} d^{-\frac{1}{2}}\mathrm{Tr}_d^{\mathrm{reg}}(1)q^d \tag{1.9}$$

はもはやモックモジュラー形式にもならないのであるが，Duke ら [DIT11] が示すにはこれは重さ 1/2，深さ 3/2 の多重調和 Maass 形式の正則部分[8] となる．このサイクル積分については，この報告書の最後にもう少し詳しい説明をまとめることにする．

[6] d が平方数のときはサイクル積分が発散してしまうため正規化が必要になる．詳しくは [BFI15, Theorem 1.1].

[7] ここでは記号の乱用ではあるが，j 関数の $z=w_Q$ における「値」という気持ちを込めて $j(w_Q)$ とおいている．また正確には，金子 [Kan09] は閉測地線 C_Q の長さで正規化した $\mathrm{val}(w_Q) := j(w_Q)/\mathrm{length}(C_Q)$ を考察している．

[8] Duke らの論文にはこの名前は登場しておらず，彼らは単に “generalized mock modular form” と呼んでいる．

1.4　やりたいこと

再度古典的な話に戻ると，指標で捻ったトレースというものも考察されていることがわかる．任意の判別式 d と基本判別式 D もしくは $D=1$ に対し，$\mathcal{Q}_{dD}/\Gamma$ 上の実指標 χ_D を

$$\chi_D(Q) := \begin{cases} \left(\frac{D}{r}\right) & \text{if } (a,b,c,D)=1, (r,D)=1, \\ 0 & \text{if } (a,b,c,D)>1, \end{cases}$$

で定める[9]．ここで r は Q が表現する任意の整数，つまりある整数の組 $x,y\in\mathbb{Z}$ が存在して $Q(x,y)=r$ となるもので $(r,D)=1$ を満たすものとしている．このとき $\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ $2k\in 2\mathbb{Z}$ の（正則とは限らない）実解析的モジュラー形式 f に対して，捻れトレースを $dD<0$ のとき

$$\mathrm{Tr}_{d,D}(f) := \sum_{Q\in\mathcal{Q}_{dD}/\Gamma} \frac{2}{|\Gamma_Q|}\chi_D(Q)\times \begin{cases} (R_{2k}^{|k|}f)(\alpha_Q) & \text{if } k<0, \\ f(\alpha_Q) & \text{if } k=0, \\ (L_{2k}^{k}f)(\alpha_Q) & \text{if } k>0, \end{cases} \tag{1.10}$$

$dD>0$ で平方数でないとき

$$\mathrm{Tr}_{d,D}(f) := \frac{1}{2\pi}\sum_{Q\in\mathcal{Q}_{dD}/\Gamma}\chi_D(Q)\int_{C_Q} f(z)Q(z,1)^k ds \tag{1.11}$$

で定めることにする．ここで R_{2k}, L_{2k} は Maass の昇降作用素である．（この定義については後で述べることにする）．

例えば重さ 0 の実解析的モジュラー形式の古典的かつ重要な例として $-\log(y|\eta(z)|^4)$ がある．ここで $\eta(z):=q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ は Dedekind エータ関数である．これは Kronecker の第一極限公式に現れる関数であり，例えば Kronecker 自身の論文を見ると [Kro85, X, p.383] において，d,D が互いに素な基本判別式で，$dD<0$ のとき，

$$\mathrm{Tr}_{d,D}(-\log(y|\eta(z)|^4)) = \pi\mathrm{Tr}_{d,1}(1)\mathrm{Tr}_{D,1}(1) \tag{1.12}$$

が成り立つことを示していることがわかる．一方で d,D が同様に互いに素な基本判別式で $d>0, D>0$ かつ dD が平方数でないときについても，Siegel[Sie61, II-§3, Proposition 13] によって，全く同じ形の等式

$$\mathrm{Tr}_{d,D}(-\log(y|\eta(z)|^4)) = \pi\mathrm{Tr}_{d,1}(1)\mathrm{Tr}_{D,1}(1) \tag{1.13}$$

が得られていることが確認できる[10]．

長くなったが本研究の素朴なモチベーションは，この捻れトレース $\mathrm{Tr}_{d,D}(-\log(y|\eta(z)|^4))$ についても (1.5) のような母関数の保型性を示すことで，Kronecker や Siegel の古典的な結果に新しい解釈を与えたい，というところにある．ところでこの関数 $-\log(y|\eta(z)|^4)$ は 2016 年の Lagarias-Rhoades [LR16] の仕事によれば，多重調和 Maass 形式の具体例である．そこでまず多重調和 Maass 形式について理解することから始める．

---

[9] 種の指標と呼ばれる．より詳しいことは [GKZ87, Section I-2] を見るとよい．

[10] この関数 $-\log(y|\eta(z)|^4)$ については，さらに様々な結果が知られている．これについては近年 Duke らが [DIT18] にまとめている．

2 後半

2.1 多重調和弱 Maass 形式

多重調和弱 Maass 形式とは，従来の調和 Maass 形式[11] の一つの拡張であり，[Mat19+] において導入された．2002 年の Zwegers の博士論文 [Zwe02] 以降，Ramanujan のモックテータ関数に由来する “モックモジュラー形式”の理論の研究が数多くなされてきた．これについての歴史的な背景や最近の研究については，例えば Ono の記事 [Ono10] や Bringmann らのテキスト [BFOR17] などに詳しくまとめられている．また本セクションの内容は [Mat19b] の概説であるので，証明等はそちらに譲ることにする．まずは本報告集に必要な分だけ定義を記しておく．

まず $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ が整数か半整数かに応じて $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ または $\Gamma = \Gamma_0(4)$ としておく．このとき $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$ に対して保型因子 $j_k(\gamma, z)$ を

$$j_k(\gamma, z) := \begin{cases} \sqrt{cz+d} & \text{if } k \in \mathbb{Z}, \\ \left(\frac{c}{d}\right)\epsilon_d^{-1}\sqrt{cz+d} & \text{if } k \in \mathbb{Z}+1/2 \end{cases}$$

と定めておく．ここで $\arg(\sqrt{z}) \in (-\pi/2, \pi/2]$ としており，$d \equiv 1 \pmod 4$ なら $\epsilon_d = 1$，$d \equiv 3 \pmod 4$ なら $\epsilon_d = i$ としてる．さらに重さ k のスラッシュ作用素を $(f|_k\gamma)(z) := j_k(\gamma, z)^{-2k} f(\gamma z)$ とする．

定義 2.1. 実解析的関数 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ が以下の 3 条件を満たすとき，f は Γ に関する重さ k，深さ $r \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} > 0$ の多重調和弱 Maass 形式であるという．

1. 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対し $f|_k\gamma = f$ が成り立つ．
2. 微分作用素 $\xi_k f := 2iy^k \overline{\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}}$ に対し，$\xi_* \circ \cdots \circ \xi_k \circ \xi_{2-k} \circ \xi_k f(z) = 0$ が成り立つ．ここで ξ の個数は $2r$ 個であり，添字は k と $2-k$ を繰り返す．
3. 正の定数 $\alpha > 0$ が存在して，$f(x+iy) = O(e^{\alpha y})$ as $x + iy \to i\infty$ の増大度を持つ．(他のカスプについても同様)．

またこれら全体の集合を $H_k^{r,!} = H_k^{r,!}(\Gamma)$ とおくと，これは $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間になる．

注意 2.2. 定義について，いくつかコメントをしておく．

- この作用素 ξ_k は $-\xi_{2-k} \circ \xi_k = -y^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + iky\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right) =: \Delta_k$ を満たす．この Δ_k は重さ k の双曲 Laplace 作用素と呼ばれるものであり，ゆえに Maass 形式と名前がついている．深さは本来 Δ_k の作用の回数を表すものであり，この関係式から ξ_k を Δ_k の半分と数えるのが妥当であろう，というのは Lagarias-Rhoades[LR16] のアイデアである．特に $\xi_k : H_k^{r,!} \to H_{2-k}^{r-1/2,!}$ を満たすことに注意する．
- トレース $\mathrm{Tr}_{d,D}(f)$ の母関数の保型性を調べるだけなら，半整数重さの場合は Kohnen のプラス条件を課した部分空間を考えれば十分である．つまり，$f(x+iy) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(y) e^{2\pi i n x}$ と Fourier 展開するとき,「$(-1)^{k-1/2} n \equiv 0, 1 \pmod 4$ でなければ $a_n(y) = 0$」という条件を加える．このとき，定義の条件 3 のカスプ条件は $i\infty$ だけ調べれば十分である[12]．この報告集でも常にこのプラス条件を課しておく．

[11] 調和 Maass 形式は [BF04] において定義された．

[12] 例えば [Kan01, 補題 5.1.2] などに証明のアイデアが書かれている．

- 深さ $r=1/2$ は f が $\bar{z}$ の微分で消えることを意味するので，つまり $H_k^{1/2,!}$ は弱正則モジュラー形式の空間となる．また深さ $r=1$ のときが Buinier-Funke [BF04] において導入された調和 Maass 形式である．深さ $r=3/2$ の場合は $-\log(y|\eta(z)|^4)$ の例だけでなく，Duke らの (1.9) の例や [BDR13, JKK14] などにも現れている．

さて定義の条件 2 より，多重調和弱 Maass 形式 $f \in H_k^{r,!}$（但し $r \in \mathbb{Z}_{>0}$）は次の形の Fourier 展開を持つことがわかる．

$$f(x+iy) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{r-1} \left(c_{n,j}^{+} u_{k,n}^{[j],+}(y) + c_{n,j}^{-} u_{k,n}^{[j],-}(y) \right) e^{2\pi i n x}. \tag{2.1}$$

ここで $c_{n,j}^{\pm} \in \mathbb{C}$ は複素定数であり，有限個の指数組 (n,j) を除いて $c_{n,j}^{+}=0$ である．また $u_{k,n}^{[j],\pm}(y)$ は W-Whittaker 関数[13] を用いて，

$$u_{k,n}^{[j],-}(y) := \begin{cases} y^{-\frac{k}{2}} \dfrac{\partial^j}{\partial s^j} W_{\mathrm{sgn}(n)\frac{k}{2}, s-\frac{1}{2}}(4\pi|n|y) \Big|_{s=\frac{k}{2}} & \text{if } n \neq 0, \\ (-1)^j (\log y)^j y^{1-k} & \text{if } n = 0, \end{cases}$$

$$u_{k,n}^{[j],+}(y) := \begin{cases} y^{-\frac{k}{2}} \dfrac{\partial^j}{\partial s^j} W_{-\mathrm{sgn}(n)\frac{k}{2}, s-\frac{1}{2}}(4\pi|n|y e^{\pi i}) \Big|_{s=\frac{k}{2}} & \text{if } n \neq 0, \\ (\log y)^j & \text{if } n = 0, \end{cases}$$

で定義される関数である．このとき簡単な計算から

$$\xi_k(u_{k,n}^{[j],-}(y)e^{2\pi i n x}) = \begin{cases} j(1-k)u_{2-k,-n}^{[j-1],-}(y)e^{-2\pi i n x} - j(j-1)u_{2-k,-n}^{[j-2],-}(y)e^{-2\pi i n x} & \text{if } n > 0, \\ -u_{2-k,-n}^{[j],-}(y)e^{-2\pi i n x} & \text{if } n < 0, \\ (-1)^j \left(j u_{2-k,0}^{[j-1],+}(y) + (1-k) u_{2-k,0}^{[j],+}(y) \right) & \text{if } n = 0 \end{cases}$$

のような関係式（$+$ の方も同様）や，

$$\begin{aligned} u_{k,n}^{[0],-}(y)e^{2\pi i n x} &= (4\pi n)^{\frac{k}{2}} q^n & \text{if } n > 0, \\ u_{k,n}^{[0],+}(y)e^{2\pi i n x} &= (4\pi|n|e^{\pi i})^{\frac{k}{2}} q^n & \text{if } n < 0 \end{aligned}$$

がわかるので，もし $c_{n,r-1}^{-}=0$（$n \le 0$）かつ $c_{n,r-1}^{+}=0$（$n>0$）が成り立てば，特に $f \in H_k^{r-1/2,!}$ である．このとき Fourier 展開 (2.1) において，部分和

$$\sum_{-\infty \ll n \le 0} c_{n,0}^{+} u_{k,n}^{[0],+}(y)e^{2\pi i n x} + \sum_{n>0} c_{n,0}^{-} u_{k,n}^{[0],-}(y)e^{2\pi i n x}$$

は正則な関数を定める．これを $f(z)$ の正則部分[14] と呼ぶことにする．特に $f \in H_k^{1,!}$ のとき，この正則部分をモックモジュラー形式と呼び，$\xi_k f \in H_{2-k}^{1/2,!}$ のことをモックモジュラー形式のシャドー[15] と呼ぶ．

[13] これらの特殊関数については [WW62] に詳しく，また多くの公式たちも [GR00, MOS66] などに集められている．また技術的なことについては [Ibu97] など．

[14] 正則部分の定め方は Fourier 展開の形に依存する．例えば Duke ら [DIT11] は $r=3/2$ の場合の Fourier 展開を特殊関数 $\alpha(y)$ や $\beta(y)$ というものを用いて記述しているが，これは上記の $u_{k,n}^{[j],\pm}(y)$ とは異なるため，伴って正則部分の定義も異なっている．

[15] シャドーという名前は [Zag09] に登場する．

2.2　構成について

構成には Maass-Poincaré 級数を用いる．これは Niebur [Nie73] によって考察された重さ 0 の Poincaré 級数の拡張で，Fay の論文 [Fay77, Theorem 3.1] に登場する．詳しい性質は例えば [Bru02] にも記されている．$k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ と $m \in \mathbb{Z}$ に対し，関数

$$\varphi_{k,m}(y,s) := \begin{cases} \Gamma(2s)^{-1}(4\pi|m|y)^{-\frac{k}{2}} M_{\mathrm{sgn}(m)\frac{k}{2}, s-\frac{1}{2}}(4\pi|m|y) & \text{if } m \neq 0, \\ y^{s-\frac{k}{2}} & \text{if } m = 0 \end{cases}$$

を考える．ここで $M_{\mu,\nu}(z)$ は M-Whittaker 関数である．このとき Maass-Poincaré 級数は次で定義される関数である．

$$P_{k,m}(z,s) := \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \left(\varphi_{k,m}(y,s)e^{2\pi imx}\right)\Big|_k \gamma.$$

この級数は $\mathrm{Re}(s) > 1$ の範囲で絶対局所一様収束しており，また微分方程式

$$\Delta_k P_{k,m}(z,s) = \left(s - \frac{k}{2}\right)\left(1 - \frac{k}{2} - s\right) P_{k,m}(z,s)$$

を満たす．さらに [JKK13] や [DIT16] などに計算の詳細が記されているが，この級数の Fourier 展開を与えることにより，$\mathrm{Re}(s) > 3/4$ まで有理型解析接続することができる．これにより，例えば $m > 0$ に対し

$$P_{0,-m}(z,1) = j_m(z) + 24\sigma_1(m)$$

などが得られ，より一般に整数重さ $k \in 2\mathbb{Z}$ については

$$P_{k,m}(z,s) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} F_{k,m,\ell}(z)\left(s + \frac{k}{2} - 1\right)^{\ell} & \text{if } k < 1, \\ \displaystyle\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} G_{k,m,\ell}(z)\left(s - \frac{k}{2}\right)^{\ell} & \text{if } k > 1 \end{cases}$$

と Laurent 展開[16] するとき，多重調和弱 Maass 形式の空間 $\bigcup_{r \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} H_k^{r,!}$ は $\{F_{k,m,\ell}(z), G_{k,m,\ell}(z) \mid m \in \mathbb{Z}, \ell \in \mathbb{Z}\}$ で張ることができる．半整数重さ $k \in \mathbb{Z} + 1/2$ については Kohnen のプラス条件を課したものを考えたかったので，[Koh85, p.250] で導入されている射影作用素 pr_k^+ を用いることにする．これは重さ $k = \lambda_k + 1/2$（$\lambda_k \in \mathbb{Z}$）に対して，

$$\mathrm{pr}_k^+(g) := (-1)^{\lfloor \frac{\lambda_k+1}{2} \rfloor} \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\sum_{\nu \pmod 4} (g|_k A)|_k B_\nu \right) + \frac{1}{2} g$$

で定まる作用素である．ここで，$g|_k(\gamma, \phi(z)) := \phi(z)^{-2k} g(\gamma z)$ とし，

$$A := \left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, e^{\frac{\pi i}{4}} \right), \quad B_\nu := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4\nu & 1 \end{bmatrix}$$

である．これによりプラス条件を満たす Poincaré 級数 $P_{k,m}^+(z,s) := \mathrm{pr}_k^+(P_{k,m}(z,s))$ が得られる．上と同様の議論を行おうとすると，$k = 1/2, 3/2$ のときに $s = 3/4$ まわりで Laurent 展開をする必要が出てくるため解析接続をより左へ伸ばす必要が出てくるが，これは可能である．([Mat19b, Section 2.3] にまとめている)．実は任意の $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ に対し，空間 $H_k^{r,!}$ の基底を明示的に記述することもできる．([Mat19+, Theorem 1.4], [Mat19a, Theorem 1.1])．

[16] 実際は $F_{0,0,-1}(z) = 3/\pi$ を除いて，任意の $\ell < 0$ に対して $F_{k,m,\ell}(z) = G_{k,m,\ell}(z) = 0$ である．

2.3 トレースの母関数の保型性

整数 $k \in \mathbb{Z}$ に対し，多重調和弱 Maass 形式 $f \in H_{2k}^{r,!}$ の捻れトレース (1.10), (1.11) を考える．ここで Maass の昇降作用素は $z = x + iy$ とするとき，

$$R_k := 2i\frac{\partial}{\partial z} + \frac{k}{y},$$
$$L_k := -2iy^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

で定まる微分作用素である．詳細については例えば [BFOR17, Chapter 5] にまとめてあり，ここでは性質

- 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対し，$R_k(f|_k\gamma) = R_k(f)|_{k+2}\gamma, \quad L_k(f|_k\gamma) = L_k(f)|_{k-2}\gamma$.
- $\Delta_k f = \lambda f$ のとき，$\Delta_{k+2}(R_k(f)) = (\lambda + k)R_k(f), \quad \Delta_{k-2}(L_k(f)) = (\lambda - k + 2)L_k(f)$.

を紹介するにとどめておく．つまり，$R_{2k}^{|k|}f := R_{-2} \circ R_{-4} \circ \cdots \circ R_{2k}f$ は重さ 0 の保型性を持つ．

このとき $\mathrm{Tr}_{d,D}(f)$ の母関数が (1.5) と類似の保型性を持つことを示そう．前節の通り，$P_{2k,m}(z,s)$ の Laurent 係数を用いて $H_{2k}^{r,!}$ の空間を張れるので，$\mathrm{Tr}_{d,D}(P_{2k,m}(z,s))$ を考えればよいことがわかる．Duke-Imamoḡlu-Tóth [DIT11] が $k = 0$ の場合にこれを計算していることを参考に，一般の $k \in \mathbb{Z}$ に対してこの値を計算すると，次が得られる．

命題 2.3. 判別式 d，および基本判別式 D または $D = 1$ に対し，$dD < 0$ ならば，

$$\mathrm{Tr}_{d,D}(P_{2k,m}(z,s)) = (4\pi|m|)^{-k}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-|k|)} \times \begin{cases} \Gamma(s)^{-1}\sum_{0<n|m}\left(\frac{D}{n}\right)b_{\frac{1}{2},d}\left(\frac{m^2D}{n^2}, \frac{s}{2}+\frac{1}{4}\right) & \textit{if } m \neq 0, \\ 2^{s-1}\pi^{-\frac{s+1}{2}}|D|^{\frac{s}{2}}L(s,\chi_D)b_{\frac{1}{2},d}\left(0, \frac{s}{2}+\frac{1}{4}\right) & \textit{if } m = 0, \end{cases}$$

となり，$dD > 0$ が平方数でなく $(-1)^kD > 0$ ならば，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{d,D}(P_{2k,m}(z,s)) &= (-1)^k\frac{2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s-k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right)}{\pi\Gamma(s-k)\Gamma(s+k)} \\ &\quad \times \begin{cases} (4\pi|m|)^{-k}(dD)^{\frac{k}{2}}\sum_{0<n|m}\left(\frac{D}{n}\right)b_{\frac{1}{2},d}\left(\frac{m^2D}{n^2}, \frac{s}{2}+\frac{1}{4}\right) & \textit{if } m \neq 0, \\ \Gamma(s)2^{s-1}\pi^{-\frac{s+1}{2}}|d|^{\frac{k}{2}}|D|^{\frac{s+k}{2}}L(s,\chi_D)b_{\frac{1}{2},d}\left(0, \frac{s}{2}+\frac{1}{4}\right) & \textit{if } m = 0, \end{cases}\end{aligned}$$

最後に $dD > 0$ が平方数でなく $(-1)^kD < 0$ ならば，$\mathrm{Tr}_{d,D}(P_{2k,m}(z,s)) = 0$ となる．ここで，$b_{\frac{1}{2},m}(n,s)$ は $P_{k,m}^+(z,s)$ の *Fourier* 展開

$$P_{k,m}^+(z,s) = \varphi_{k,m}(y,s)e^{2\pi imx} + \sum_{(-1)^{\lambda_k}n\equiv 0,1(4)} b_{k,m}(n,s)\mathcal{W}_{k,n}(y,s)e^{2\pi inx}$$

に現れる係数であり，$\mathcal{W}_{k,n}(y,s)$ は

$$\mathcal{W}_{k,n}(y,s) := \begin{cases} \Gamma(s+\mathrm{sgn}(n)\frac{k}{2})^{-1}|n|^{k-1}(4\pi|n|y)^{-\frac{k}{2}}W_{\mathrm{sgn}(n)\frac{k}{2},s-\frac{1}{2}}(4\pi|n|y) & \textit{if } n \neq 0, \\ \dfrac{(4\pi)^{1-k}y^{1-s-\frac{k}{2}}}{(2s-1)\Gamma(s-k/2)\Gamma(s+k/2)} & \textit{if } n = 0 \end{cases}$$

で定まる関数である．

こうして $\mathrm{Tr}_{d,D}(P_{2k,m}(z,s))$ と半整数重さの Maass-Poincaré 級数の Fourier 係数の間に直接的な関係式が得られるわけである．後は $b_{\lambda_k+\frac{1}{2},m}(n,s)$ と $b_{\frac{1}{2},m}(n,s)$ の間の関係式 [Mat19b, Lemma2.3.7] を用いることで，次の主張が得られる．（ここに明示的な式を与えることは出来ないが，必要であれば [Mat19b, Theorem 4.1.6, 4.1.7, 4.2.3, 4.2.4] を見よ）．

定理 2.4. 上記の記号のもと，母関数

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_d \mathrm{Tr}^{\mathrm{add}}_{d,D}(f)q^d + \sum_{\substack{-\operatorname{sgn}(D)d\equiv 0,1(4)\\ d>0}} d^{-\frac{k}{2}}\mathrm{Tr}_{-\operatorname{sgn}(D)d,D}(f)q^d & \textit{if } (-1)^kD>0,\\ \displaystyle\sum_d \mathrm{Tr}^{\mathrm{add}}_{d,D}(f)q^d + \sum_{\substack{-\operatorname{sgn}(D)d\equiv 0,1(4)\\ d>0}} d^{\frac{k-1}{2}}\mathrm{Tr}_{-\operatorname{sgn}(D)d,D}(f)q^d & \textit{if } (-1)^kD<0,\\ \displaystyle\sum_d \mathrm{Tr}^{\mathrm{add}}_{d,D}(f)q^d + \sum_{\substack{\operatorname{sgn}(D)d\equiv 0,1(4)\\ d>0, d|D|=\square}} d^{-\frac{1}{2}}\mathrm{Tr}^{\mathrm{reg}}_{\operatorname{sgn}(D)d,D}(f)q^d & \\ \displaystyle\qquad\qquad + \sum_{\substack{\operatorname{sgn}(D)d\equiv 0,1(4)\\ d>0, d|D|\neq\square}} d^{-\frac{1}{2}}\mathrm{Tr}_{\operatorname{sgn}(D)d,D}(f)q^d & \textit{if } (-1)^kD>0 \end{cases}$$

はそれぞれ $\Gamma_0(4)$ に関する重さ $3/2-k, k+1/2, k+1/2$ の多重調和弱 *Maass* 形式の正則部分になっている．ここで，$\sum_d \mathrm{Tr}^{\mathrm{add}}_{d,D}(f)q^d$ は $d\in\mathbb{Z}$ に関する補完的な有限和で，$\mathrm{Tr}^{\mathrm{reg}}_{d,D}(f)$ は $d|D|=\square$ のときに定まる適切な正規化項である．それぞれ明示的に記述することができる．

例えば $k=0, D=1, f=1$ として 1 つ目の母関数を考えれば，これは (1.7) の結果を復元することになる．またこのとき補完的な項としては $\mathrm{Tr}^{\mathrm{add}}_{0,1}(1)=-1/12$ のみが必要となる．

注意 2.5. いくつかのコメントをしておく．

- このようなトレースの母関数の保型性について，f が調和 Maass 形式のときには既に多くのことが知られている．ここでは [ANS18, ANS18-pre, BFI15] などを例として挙げておく．上記の 3 つの母関数の形はそれぞれ Kudla-Millson リフト，Millson リフト，Shintani リフトとして知られているものであり，本定理では重さの符号条件を無くし（例えばこれまで知られていた Millson リフトは $k\le 0$ に対してのみ），一般の多重調和弱 Maass 形式まで拡張した．
- 定理の主張における非正則な残りの部分についても明示的に記述することができる．これにより 3 つのリフトの間の明示的な関係がわかり，特にシャドーにあたる非正則部分の ξ-像の正則部分もまたトレースの母関数になっていることがわかる．[Mat19b, Theorem 4.2.5]．これは [ANS18, Theorem 1.1] や [ANS18-pre, Proposition 1.3] の一般化を与える．

最後にモチベーションにあった式 (1.12)，(1.13) について考察しておく．まず $d>0, D\neq 1$ で d も dD も平方数でないとするとき，$\mathrm{Tr}_{d,D}(-\log(y|\eta(z)|^4))$ について考える．Kronecker の第一極限公式より，定数 $C=\dfrac{6}{\pi}\left(\gamma-\log 2-\dfrac{6\zeta'(2)}{\pi^2}\right)$ を用いて

$$\lim_{s\to 1}\left[P_{0,0}(z,s)-\frac{3/\pi}{s-1}\right] = -\frac{3}{\pi}\log(y|\eta(z)|^4)+C$$

とかけることを思い出すと，命題 2.3の明示式，$d\neq\square$ のとき $\mathrm{Tr}_{d,D}(1)=0$ となる事実，および $b_{k,m}(n,s)=b_{k,n}(m,s)$ の対称性から，上の定理の帰結として，（ある定数 $\alpha\in\mathbb{C}$ を用いて）

$$\begin{aligned}&\left[d^{-\frac{1}{2}}\mathrm{Tr}_{d,D}(-\log(y|\eta(z)|^4)) \text{ の母関数}\right] + (\text{非正則部分})\\ &\qquad = \alpha\theta(z) + \frac{|D|^{\frac{1}{2}}L(1,\chi_D)}{3}\left[P^+_{\frac{1}{2},0}(z,s) \text{ の } s=3/4 \text{ における定数項}\right] \in H^{3/2,!}_{1/2}\end{aligned}$$

と書けることがわかる[17]．一方で Duke ら [DIT11, (5.4)] も示しているように，

$$\begin{aligned}\left[d^{-\frac{1}{2}}\mathrm{Tr}_{d,D}(1)\text{ の母関数}\right] &+ (\text{非正則部分}) \\ &= \alpha'\theta(z)+\frac{1}{3}\left[P^{+}_{\frac{1}{2},0}(z,s)\text{ の }s=3/4\text{ における定数項}\right]\end{aligned}$$

となることも上の定理からすぐにわかるので，正則部分の d 番目の Fourier 係数を比較することで，次を得る．

系 2.6. $D\neq 1$ を基本判別式とし，$d>0$ を平方数でない判別式で dD も平方数でないとする．このとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{d,D}(-\log(y|\eta(z)|^4)) &= \sqrt{|D|}L(1,\chi_D)\mathrm{Tr}_{d,1}(1) \\ &= \pi\mathrm{Tr}_{d,1}(1)\mathrm{Tr}_{D,1}(1)\end{aligned}$$

が成り立つ．

この系において d,D が互いに素であるとか，d が基本判別式であるとかの仮定は必要なく，これは (1.12) や (1.13) の自然な拡張を与えている．

3　補足：サイクル積分

整数係数二元二次形式 $Q(X,Y)=aX^2+bXY+cY^2$ に対し，その判別式 $d=b^2-4ac$ が平方数でない正の整数であるとする．また $w_Q=\dfrac{-b+\sqrt{d}}{2a}, w'_Q=\dfrac{-b-\sqrt{d}}{2a}$ とし，S_Q を w_Q から w'_Q へ向かう上半平面 $\mathbb{H}$ 上の測地線とする．このとき S_Q 上において

$$ds=\frac{\sqrt{d}dz}{Q(z,1)}$$

が成り立つ．これは例えば測地線 S_Q を $\theta\in(0,\pi)$ を用いて，$z=\dfrac{-b}{2a}+\mathrm{sgn}(a)e^{\mathrm{sgn}(a)i\theta}\dfrac{\sqrt{d}}{2|a|}$ とパラメトライズすれば良い．次に Pell 方程式 $x^2-dy^2=4$ を考える．詳細は [Sar82] などを見れば良いが，この方程式の正整数の最小解を $(x,y)=(x_0,y_0)$ とおくとき，行列

$$\gamma_Q:=\begin{bmatrix}\frac{x_0+by_0}{2} & cy_0\\ -ay_0 & \frac{x_0-by_0}{2}\end{bmatrix}\in\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

は固定部分群 Γ_Q の生成元を与える．つまり，$\Gamma_Q=\{\pm\gamma_Q^n\mid n\in\mathbb{Z}\}$ が成り立つ．（但し $\gamma_Q^{\pm1}$ のどちらを生成元として選ぶかは，S_Q の向きによる）．以上から，(1.8) の式は次の表示を持つ．

$$j(w_Q):=\int_{C_Q}j(z)ds=\int_{z_0}^{\gamma_Q z_0}j(z)\frac{\sqrt{d}dz}{Q(z,1)}. \tag{3.1}$$

ここでこの値は $z_0\in S_Q$ の取り方によらず（但し積分路は S_Q に属するように取る），特に $j(z)$ は $\mathbb{H}$ 上で正則なので，$z_0\in\mathbb{H}$ や積分路を任意に取っても値は変わらない．ここで $\varepsilon_d>1$ を（極大整環と

[17] この左辺が深さ 3/2 になることや，d 番目の係数に $\mathrm{Tr}^{\mathrm{add}}_{d,D}$ が現れないことは，定理 2.4の具体的な表示から直ぐにわかる．また重さ 1/2，深さ 3/2 多重調和 Maass 形式でカスプで多項式増大しか持たないもの全体の部分空間が 2 次元になるのは [Mat19a, Theorem 4.1] の結果である．

は限らない）整環 $\mathcal{O}_d$ の単数で，ノルムが 1 となるような最小のものとするとき，$\varepsilon_d = \dfrac{x_0 + y_0\sqrt{d}}{2}$，および，

$$\mathrm{length}(C_Q) = \int_{z_0}^{\gamma_Q z_0} \frac{\sqrt{d}dz}{Q(z,1)} = 2\log\varepsilon_d$$

が成り立つことに注意する．

サイクル積分を次のように解釈することもできる．原始的かつ双曲的な元 $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$（つまり $\gamma = \pm\tilde{\gamma}^n (n > 1)$ の形で書けず，$|\mathrm{tr}(\gamma)| > 2$）に対し，二次形式 $Q_\gamma(X,Y) := cX^2 + (d-a)XY - bY^2$ を対応させ，積分

$$I_\gamma(j) := \int_{z_0}^{\gamma z_0} j(z)\frac{dz}{Q_\gamma(z,1)}$$

を考えよう．簡単な計算により，$d_\gamma = (a+d)^2 - 4$ とおくとき，$I_\gamma(j) = \dfrac{-\operatorname{sgn}(\mathrm{tr}(\gamma))}{\sqrt{d_\gamma}} j(w_{Q_\gamma})$ がわかる．さて，これを放物元 $\gamma = T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ に対して実行すれば，$I_\gamma(j) = -744$ となる． これは（符号の差を除き）j 関数の Fourier 展開の定数項である．この積分 $I_\gamma(j)$ を $\langle\gamma\rangle\backslash\mathbb{H}$ のサイクル上の積分と見るなら，楕円元については，より一般に虚二次無理数 $w \in \mathbb{H}$ に対して，C_w を w を内部に持つ $\mathbb{H}$ 内の円とし，$Q_w(z,1)$ を w の整数係数最小多項式とするときに，

$$I_w(j) := \frac{2}{|\Gamma_w|}\int_{C_w} j(z)\frac{dz}{Q_w(z,1)}$$

を考えるのが筋が良いであろう．このとき留数定理により，$I_w(j) = \dfrac{4\pi}{|\Gamma_w|\sqrt{|d_w|}} j(w)$ となることがわかる．ここで d_w は $Q_w(z,1)$ の判別式である．この意味でも，サイクル積分は特異モジュライの実二次類似と見ることができる．特に j を 1 に取り替え，現れる判別式 d_γ, d_w たちが基本判別式なら，（符号の差を除いて）$I_\gamma(1) = \dfrac{2\log\varepsilon_{d_\gamma}}{\sqrt{d_\gamma}} = \dfrac{2L(1,\chi_{d_\gamma})}{h(d_\gamma)}, I_w(1) = \dfrac{2L(1,\chi_{d_w})}{h(d_w)}$ と統一的に表せることがわかる[18]．実はここで述べた積分は Petersson [Pet41] によって導入された双曲的・放物的・楕円的 Fourier 展開の定数項になっている．（[IO09] なども参照）．

参考文献

[ANS18] C. Alfes-Neumann, M. Schwagenscheidt, **On a theta lift related to the Shintani lift**, Adv. Math., 328, (2018), 858–889.

[ANS18-pre] C. Alfes-Neumann, M. Schwagenscheidt, **Shintani theta lifts of harmonic Maass forms**, arXiv:1712.04491.

[AIK14] T. Arakawa, T. Ibukiyama, M. Kaneko, **Bernoulli Numbers and Zeta Functions**, Springer Monographs in Math., Springer, Tokyo, 2014, with an appendix by Don Zagier.

[BDR13] K. Bringmann, N. Diamantis, M. Raum, **Mock period functions, sesquiharmonic Maass forms, and non-critical values of L-functions**, Adv. Math., 233, (2013), 115–134.

[18] このような統一的な積分表示は Kronecker [Kro85, p.374, $(\mathfrak{N}')$] にもその原型が見られる

[BFOR17] K. Bringmann, A. Folsom, K. Ono, L. Rolen, **Harmonic Maass forms and mock modular forms: theory and applications**, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., 64. Amer. Math. Soc., Prov, RI, 2017. xv+391 pp.

[Bru02] J. H. Bruinier, **Borcherds products on $O(2,l)$ and Chern classes of Heegner divisors**, Lecture Notes in Mathematics, 1780. Springer-Verlag, Berlin, 2002. viii+152 pp.

[BF04] J. H. Bruinier, J. Funke, **On two geometric theta lifts**, Duke Math. J., 125, (2004), 45–90.

[BF06] J. H. Bruinier, J. Funke, **Traces of CM values of modular functions**, J. reine angew Math., 594, (2006), 1–33.

[BFI15] J. H. Bruinier, J. Funke, Ö. Imamoḡlu, **Regularized theta liftings and periods of modular functions**, J. Reine Angew. Math., 703, (2015), 43–93.

[Dic52] L. E. Dickson, **History of the theory of numbers, III**, Chelsea Publishing Company, New York, (1952).

[DIT11] W. Duke, Ö. Imamoḡlu, Á. Tóth, **Cycle integrals of the j-function and mock modular forms**, Annals of Math., 173, (2011), 947–981.

[DIT16] W. Duke, Ö. Imamoḡlu, Á. Tóth, **Regularized inner products of modular functions**, Ramanujan J., 41, (2016), 13–29.

[DIT18] W. Duke, Ö. Imamoḡlu, Á. Tóth, **Kronecker's first limit formula, revisited**, Res. Math. Sci., 5, no. 2, (2018), 1–21.

[Fay77] J. Fay, **Fourier coefficients of the resolvent for a Fuchsian group**, J. Reine Angew. Math., 294, (1977), 143–203.

[Gau01] C. F. Gauss, **Disquisitiones Arithmeticae**, 1801.

[GR00] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, **Table of integrals, series, and products**, Translated from the Russian. Sixth edition. Translation edited and with a preface by Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger. Academic Press, Inc., San Diego, CA, (2000), xlvii+1163 pp.

[GKZ87] B. Gross, W. Kohnen, D. Zagier, **Heegner points and Derivatives of L-series, II**, Math. Ann., 278, (1987), 497–562.

[Hur85] A. Hurwitz, **Über Relationen zwischen Klassenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante**, Math. Annal., 25, (1885), 157–196.

[Ibu97] T. Ibukiyama, **A survey on the new proof of Saito-Kurokawa lifting after Duke and Imamoglu**, 第5回整数論サマースクール報告集, (1997), 134–176.

[IO09] Ö. Imamoḡlu, C. O'Sullivan, **Parabolic, hyperbolic and elliptic Poincaré series**, Acta Arith., 139, (2009), 199–228.

[IRR14] Ö. Imamoḡlu, M. Raum, O. K. Richter, **Holomorphic projections and Ramanujan's mock theta functions**, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 111, (2014), 3961–3967.

[JKK13] D. Jeon, S.-Y. Kang, C. H. Kim, **Weak Maass-Poincaré series and weight 3/2 mock modular forms**, J. Number Theory, 133, (2013), 2567–2587.

[JKK14] D. Jeon, S.-Y. Kang, C. H. Kim, **Cycle integrals of a sesqui-harmonic Maass form of weight zero**, J. Number Theory, 141, (2014), 92–108.

[Kan96] M. Kaneko, **The Fourier coefficients and the singular moduli of the elliptic modular function** $j(\tau)$, Mem. Fac. Engrg. Design Kyoto Inst. Tech. Ser. Sci. Tech., 44, (1996), 1–5.

[Kan01] M. Kaneko, **楕円モジュラー関数** $j(\tau)$ **のフーリエ係数**, 神戸大学集中講義講義録, (2001).

[Kan09] M. Kaneko, **Observations on the 'values' of the elliptic modular function** $j(\tau)$ **at real quadratics**, Kyushu J. Math., vol. 63-2, (2009), 353–364.

[KO07] M. Kaneko, K. Ohta, **いくつかの種数 0 モジュラー関数のフーリエ係数公式**, 早稲田大学整数論研究集会 (2007) 報告集.

[KZ95] M. Kaneko, D. Zagier, **A generalized Jacobi theta function and quasimodular forms**, "The Moduli Space of Curves", Progress in Math., 129, Birkhauser, (1995), 165–172.

[Koh85] W. Kohnen, **Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight**, Math. Ann., 271, (1985), 237–268.

[Kro60] L. Kronecker, **Über die Anzahl der verschiedenen Classen quadratischer Formen von negativer Determinante**, Werke, Bd. IV, (1860), 185–195.

[Kro75] L. Kronecker, **Über quadratische Formen von negativer Determinante**, Werke, Bd. IV, (1875), 245–259.

[Kro85] L. Kronecker, **Zur Theorie der Elliptischen Functionen, VI–X**, Werke, Bd. IV, (1885), 363–389.

[LR16] J. C. Lagarias, R. C. Rhoades, **Polyharmonic Maass forms for** $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, Ramanujan J., 41, (2016), 191–232.

[MOS66] W. Magnus, F. Oberhettinger, R. Soni, **Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics**, Third enlarged edition. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 52 Springer-Verlag New York, Inc., New York, (1966), viii+508 pp.

[MO17] T. Matsusaka, R. Osanai, **Arithmetic formulas for the Fourier coefficients of Hauptmoduln of level 2, 3, and 5**, Proc. Amer. Math. Soc., 145, (2017), 1383–1392.

[Mat17] T. Matsusaka, **The Fourier coefficients of the McKay-Thompson series and the traces of CM values**, Res. Number Theory 3, (2017), 1–16.

[Mat19+] T. Matsusaka, **Polyharmonic weak Maass forms of higher depth for** $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, Ramanujan Journal, to appear.

[Mat19a] T. Matsusaka, **Traces of CM values and cycle integrals of polyharmonic Maass forms**, Res. Number Theory, 5, (1), (2019), 1–25.

[Mat19b] T. Matsusaka, **Fourier coefficients of polyharmonic weak Maass forms**, Ph.D. Thesis, Kyushu University, 2019.

[Mer14] M. H. Mertens, **Mock modular forms and class numbers of quadratic forms**, Ph.D. Thesis, Universität zu Köln, 2014.

[MS16] M. R. Murty, K. Sampath, **On the asymptotic formula for the Fourier coefficients of the j-function**, Kyushu J. Math., 70, (2016), 83–91.

[Nie73] D. Niebur, **A class of nonanalytic automorphic functions**, Nagoya Math. J., 52, (1973), 133-145.

[Oht09] K. Ohta, **Formulas for the Fourier coefficients of some genus zero modular functions**, Kyushu J. Math., 63, (2009), 1–15.

[Ono10] K. Ono, **The last words of a genius**, Notice Amer. Math. Soc., 57, (11), (2010), 1410–1419.

[Pet41] H. Petersson, **Einheitliche Begründung der Vollständigkeitssätze für die Poincaréschen Reihen von reeller Dimension bei beliebigen Grenzkreisgruppen von erster Art**, Abh. Math. Sem. Hansische Univ., 14, (1941), 22–60.

[Sar82] P. Sarnak, **Class numbers of indefinite binary quadratic forms**, J. Number Theory, 15, (1982), 229–247.

[Sie61] C. L. Siegel, **Lectures on advanced analytic number theory**, Notes by S. Raghavan. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1961, 331 pp.

[WW62] E. T. Whittaker, G. N. Watson, **A course of modern analysis**, An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions. Fourth edition. Reprinted Cambridge University Press, New York, 1962, vii+608 pp.

[Zag75] D. Zagier, **Nombres de classes et formes modulaires de poids** $3/2$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér., A-B 281, (1975), no. 21, Ai, 883–886.

[Zag02] D. Zagier, **Traces of singular moduli**, Motives, polylogarithms and Hodge theory, Part I (Irvine, CA, 1998), Int. Press Lect. Ser., 3, Int. Press. Somerville MA, (2002), 211–244.

[Zag09] D. Zagier, **Ramanujan's mock theta functions and their applications [d'apres Zwegers and Bringmann-Ono]**, Seminaire Bourbaki, 60eme annee, 2007–2008, no. 986, Astérisque 326, Soc. Math. de France, (2009), 143–164.

[Zwe02] S. P. Zwegers, **Mock Theta Functions**, Ph.D. Thesis, Utrecht University, 2002.

Faculty of Mathematics, Kyushu University, Motooka 744, Nishi-ku Fukuoka 819-0395, Japan
e-mail: `t-matsusaka@math.kyushu-u.ac.jp`