ON AN AVERAGE OF CRITICAL VALUES OF RANKIN-SELBERG L-FUNCTIONS

森山　知則　（大阪大学）
Tomonori Moriyama (Osaka University)

初めに（役割分担）

本稿では, 筆者（=森山) の指導の下に書かれた太田旭光氏の修士論文 [O](2015) およびそれを発展させた八木政樹氏の修士論文 [Y](2018) の結果 (Rankin-Selberg L 函数の特殊値に関するもの）について述べる。なお, これらの結果の証明の計算にはかなり面倒な式変形が含まれていたが, 源嶋孝太氏によってこれらの計算の一部はいくつかの点で簡易化された。また D. Lanphier による先行研究との違いについての表現論的な考察も述べる。詳しい計算は共著論文 [OYGM] を参照のこと。

§1 結果.

重さ k の $\Gamma := SL(2,\mathbf{Z})$ に関する正則カスプ形式の空間を $S_k \equiv S_k(SL(2,\mathbf{Z}))$ で表す。重さ k のカスプ形式 $f(z) \in S_k(SL(2,\mathbf{Z}))$ および 重さ l のカスプ形式 $g(z) \in S_l(SL(2,\mathbf{Z}))$ についてそのフーリエ展開を

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) q^n, \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_g(n) q^n, \quad q := e^{2\pi\sqrt{-1}z}$$

で表す。このとき組 (f,g) に対する Rankin-Selberg L 級数 $D(s, f\times g)$ を

$$D(s, f\times g) := \zeta(2s-k-l+2) \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_f(n)} a_g(n) n^{-s}$$

で定義する。この級数の解析的性質として次が知られている：

命題 1 (i) $\mathrm{Re}(s) > (k+l)/2$ で絶対収束してそこで正則函数を定める。
(ii)

$$D^*(s, f\times g) := \Gamma_{\mathbf{C}}(s)\Gamma_{\mathbf{C}}(s-l+1) D(s, f\times g)$$

と置くと, これは全 s 平面上有理型に解析接続され函数等式

$$D^*(k+l-1-s, f\times g) = D^*(s, f\times g)$$

を満たす。

(i) は, f, g のフーリエ級数の評価からわかる。(ii) は積分表示理論（いわゆる Rankin-Selberg 積分) から証明される。上の函数等式に両辺に表れるガンマ函数たちの極でないような整数を, L 級数 $D(s, f\times g)$ の critical points と呼ぼう。

注意： この L-級数は, f, g が Hecke 同時固有函数であるとき, オイラー積表示を持ち, Rankin-Selberg L 函数と呼ばれる。critical points は, このようなオイラー積に対して定義されるのが通例だと思うが, ここでは, 必ずしもオイラー積表示を持たない場合にもこれらの用語（Rankin-Selberg L 函数, critical points) を流用することにする。

定理 A $S_k(SL(2,\mathbf{Z}))$ の Petersson 内積に関する直交基底 B_k を任意に取って固定する。このとき次の等式が成立する:

$$\sum_{f\in B_k}\frac{a_1(f)D(\frac{k+l}{2},f\otimes g)}{||f||^2}$$
$$=a_1(g)\times\frac{2^{2k-3}\{(k-l)(k+l-2)-48\}}{3(k-l)(k+l-2)(k-2)!}\times\pi^{k+1}.$$

これは, 次の D. Lanphier による先行研究の結果を補完することに注意しよう。

定理 B (D. Lanphier, 2008) $m\in[\frac{k+l}{2}+1,k-1]\cap\mathbf{Z}$ に対して, 次が成立する：

$$\sum_{f\in B_k}\frac{a_1(f)D(m,f\otimes g)}{||f||^2}=a_1(g)\times\frac{2^{2k-3}\zeta(2m-k-l+2)}{(k-2)!}\pi^{k-1}.$$

いくつか注意を述べる。まず, 定理 B において, $k-l=2$ の場合には

$$[\frac{k+l}{2}+1,k-1]\cap\mathbf{Z}=\emptyset$$

であるので何も主張していないことに注意する。定理 A で, 函数等式の中心 $s=\frac{k+l-1}{2}$ に最も近い critical points のうち右半分にあるものに関する結果を与えている。他方, 先行研究である定理 B では, 残りの critical points に関する結果を与えている。定理 B において, 形式的に $m=\dfrac{k+l}{2}$ と置くと, $\zeta(2)=\pi^2/6$ より

$$a_1(g)\times\frac{2^{2k-1}}{3(k-2)!}\times\pi^{k+1}$$

となって定理 A の右辺とは一致しない。この（見かけ上の）不整合は, Rankin-Selberg 積分に表れる Eisenstein 級数の性質によって説明される（§3)。

§2 証明の概略

定理 A（および定理 B(Lanphier)）の証明は, Rankin-selberg L 函数の特殊値の有理性に関する G.Shimura の有名な論文 [S1] による方法に従ってなされる。[S1] では, 例えば, $(f,g)\in S_k\times S_l$ $(k>l)$ を正規化された Hecke 同時固有形式とし,

$\mathbf{Q}(f) := \mathbf{Q}(a_n(f) \mid n \geq 1)$, $\mathbf{Q}(g) := \mathbf{Q}(a_n(g) \mid n \geq 1)$ は f 及び g の Hecke 体とするとき

$$\frac{D(m, f \otimes g)}{\pi^{k+1}||f||^2} \in \mathbf{Q}(f) \cdot \mathbf{Q}(g)$$

が成立することが示されている。このような定性的な結果（有理性）を, 定理 A や定理 B のように定量的にするためにやや面倒な計算を実行する必要がある。

さて Rankin-Selberg L 函数は, 次の積分表示を持つ。

$$(\sharp): \qquad \langle f, E_{k-l,s} \cdot g \rangle = \gamma(s+k-1) D(s+k-1, f \otimes g)$$

ここに表れる記号を順に説明しよう。まず, $\gamma(s)$ はガンマ函数を含む簡単な有理型函数である。また, $\varphi_i : \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ $(i = 1, 2)$ を

$$(cz+d)^{-k} \varphi_i(\frac{az+b}{cz+d}) = \varphi_i(z), \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

を満たす二つの C^∞-級函数とするとき, それらの Petterson 内積を

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle := \int_{\Gamma\backslash\mathbf{H}} \overline{\varphi_1(z)} \varphi_2(z) y^k \frac{dxdy}{y^2}$$

で（右辺の積分が絶対収束するときに）定める (第一成分に関して半線形, 第二成分に関して線形とする)。また, $(h, s) \in 2\mathbf{Z} \times \mathbf{C}$ に対して, 実解析的 Eisenstein 級数を

$$\begin{aligned} E_{h,s}(z) &\equiv E_h(z, s) \\ &:= 2\zeta(2s+h) \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \frac{\mathrm{Im}(\frac{az+b}{cz+d})^s}{(cz+d)^h}, \qquad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で (絶対収束するときに) 定める。これは, $\mathrm{Re}(s) > 1 - h/2$ で絶対収束し, 全 s-平面に有理型に解析接続される。

特殊値 $D(m, f \otimes g)$ を調べるために, $h = k - l$, $s = m + 1 - k$ の場合の実解析的 Eisenstein 級数に関する次の命題を用いる。

命題 2. 任意の $m \in [\frac{k+l}{2}, k-1] \cap \mathbf{Z}$ に対して $g_j \equiv g_j^{[m]} \in S_{l+2j}$ $(0 \leq j \leq h/2)$ たちが一意的に存在して

$$(\natural): \qquad E_h(z, m+1-k) g(z) = \sum_{j=0}^{h/2} (\delta_{l+2j}^{h/2-j} g_j)(z)$$

と書ける。ここで, $\delta_{l+2j}^{h/2-j}$ は $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & -1 \end{pmatrix}^{\otimes(h/2-j)} \in U(\mathfrak{g})$ $(\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}))$ が定める重さを $(h-2j)$ 上げる微分作用素（Maass-Shimura 微分作用素）である。

この命題 2 は, 左辺が ϵ^h で消されることから従う。ここで $\epsilon = -y^2\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}$ は $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$ が定める重さを 2 下げる微分作用素である。

さて, 上の命題の式 ($\natural$) を積分表示式 ($\sharp$) に代入して,

$$\begin{aligned}\gamma(m)D(m, f\otimes g) =& \langle f, \sum_{j=0}^{h/2} \delta_{l+2j}^{h/2-j} g_j^{[m]}\rangle \\ =& \sum_{j=0}^{h/2}\langle \epsilon^{h/2-j} f, g_j^{[m]}\rangle \\ =& \langle f, g_{h/2}^{[m]}\rangle\end{aligned}$$

が成立する。$g_{h/2}^{[m]} \in S_k$ を $E_{h,k+1-m}\cdot g$ の正則射影 (holomorphic projection) と呼ぶ。これより,

$$(\star): \qquad \frac{a_1(f)D(m, f\otimes g)}{||f||^2} = \gamma(m)^{-1}a_1(g_{h/2}^{[m]})$$

を得る。これを $f \in B_k$ について足し上げれば,

$$(\bigstar): \qquad \sum_{f\in B_k}\frac{a_1(f)D(m, f\otimes g)}{||f||^2} = \gamma(m)^{-1}a_1(g_{h/2}^{[m]})$$

を得るので, あとは $g_{h/2}^{[m]}$ の一番目の Fourier 係数を決定すればよいことになる。この計算には, 実解析的 Eisenstein 級数のフーリエ展開が必要となる。実解析的 Eisenstein 級数のフーリエ展開の最も簡単な場合は, 次のよく知られた式である：

$$E_2(z, 0) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi}{y} - 8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n$$

このような式を用いて $a_1(g_{h/2}^{[m]}) = a_1(g)\times C$ を満たす定数 C を決定することで定理 A（および定理 B(Lanphier)) を得る。この計算が, 証明の主要な部分であるが実行はそれなりに大変である。例えば定理 A の証明には, 次のような等式

$$\sum_{n=0}^{j}\frac{(-1)^n\{nl+(n-4)(n+3)\}(l+n-2)!}{(l+2n-2)!(l+2n)_{j-n}}\binom{j}{n} = 0$$

を証明して用いた (この等式の証明ははじめ帰納法によるかなり長いものだったが, 源嶋氏によって単純な証明に置き換えられた)。

§3 定理 A と定理 B の比較 (Eisenstein 級数の生成する $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$-加群)

我々の定理 A の証明の方針と Lanphier による定理 B の証明と大筋において同じである。しかし実際の計算は, これら 2 つの場合に分けて行う必要があり (それゆえ, Lanphier の論文では除外されていた), また定理 B での結果で形式的に $m = \frac{k+l}{2}$ としたものとは異なっている。この節では, この違いを実解析的な Eisenstein 級数の生成

する $\mathfrak{g}$-加群の構造から説明（もしくは解釈）してみよう。$(k,l)\in\mathbf{Z}^2$ で $k>l(\geq 12)$ に対して, $h=k-l$ とする。整数 $m\in\mathbf{Z}$ に対して, $\pi_m=U(\mathfrak{g})E_{h,m+1-k}$ を実解析的な Eisenstein 級数 $E_{h,m+1-k}$（の $SL(2,\mathbf{R})$ への持ち上げ）が生成する $\mathfrak{g}$-加群とする。このとき次の命題が成立する。

命題 3 (A): $m=\frac{k+l}{2}$ とする。$\pi_m=U(\mathfrak{g})E_{2,0}$ であり次の分裂しない完全列が存在する:

$$0\to\mathbf{C}\to\pi_{(k+l)/2}\to D_2^+\to 0.$$

ここで, D_2^+ は最低ウェイト 2 の最低ウエイト $\mathfrak{g}$-加群である。

(B): $m\in[\frac{k+l}{2},k-1]\cap\mathbf{Z}$ とする。このとき,

$$\pi_m=U(\mathfrak{g})E_{h',0}\cong D_{h'}^+$$

が成立する $(h'=2m+2-k-l(\geq 4))$。

命題 3（B) は考えている実解析的 Eisenstein 級数が絶対収束域にあるので Eisenstein 級数を定める写像が $SL(2,\mathbf{R})$ の主系列表現から保型形式の空間への intertwiner であることから容易に従う。命題 3 （B) は $E_{2,0},E_{4,-1},E_{6,-2},\cdots$ のフーリエ展開から従う（つまり計算が必要)。

命題 3 から次が比較的容易に示せる：

系 4 (A): $m=\frac{k+l}{2}$ とする。このとき, $\pi_m\otimes D_l^+\cong\oplus_{t\geq 0}D_{l+2t}^+$ が成立する。
(B): $m\in[\frac{k+l}{2},k-1]\cap\mathbf{Z}$ とする。このとき, $\pi_m\otimes D_l^+\cong\oplus_{t\geq 0}D_{h'+l+2t}^+$ が成立する。

正則射影 $g_{h/2}^{[m]}\in D_k^+$ は, 系 4 の直和分解が導く射影子

$$\pi_m\otimes D_l^+\to D_k^+$$

による $E_{h,m+1-k}\otimes g\in\pi_m\otimes D_l^+$ の像である。(A) の場合の射影子は, π_m の可約性（ほとんど同じことだが, 重さ 2 の Eisenstein 級数 $E_{2,0}$ の非正則性）によって, (B) の場合の射影子の形式的な置き換えでは得られない。これが §1 の末尾で述べた定理 A と定理 B の間の「不整合」の一つの解釈である。

References

[L] D. Lanphier, *Combinatorics of Maass–Shimura operators*, J. Number Theory **128** (2008), 2467-2487.

[O] A. Ohta, *Special values of the Rankin–Selberg L-function and their numerical calculation (in Japanese)*, Master's Thesis (Osaka University), (2015).

[OYGM] A. Ohta, M. Yagi, K. Gejima, T. Moriyama, *On an average of critical values of Rnakin-Selberg L-functions*, prerpint (2018).

[S1] G. Shimura, *The special values of the zeta functions associated with cusp forms*, Comm. Pure Appl. Math. **29** (1976), 783-804.

[S2] G. Shimura, *Elementary Dirichlet Series and Modular Forms*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, (2007).

[Y] M. Yagi, *On an average of special values of the Rankin–Selberg L-function (in Japanese)*, Master's Thesis (Osaka University), (2018).

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Machikaneyama-cho 1-1, Toyonaka, Osaka, 560-0043, Japan

E-mail address: `moriyama[at]math.sci.osaka-u.ac.jp`