モジュラー対応の交点数

東北大学理学研究科数学専攻 修士 2 年 村上友哉
Yuya Murakami, Mathematical Institute, Tohoku University *

June 28, 2019

1　概要

本稿は，著者が研究集会「保型形式，保型表現とその周辺」において行なった講演の主結果をまとめたものであり，その内容は論文 [7] に基づく．

本稿で扱う対象は，モジュラー多項式と呼ばれる整数係数 2 変数多項式および，その零点集合であるモジュラー対応である．モジュラー多項式は楕円曲線の j 不変量を用いて定義される多項式である．モジュラー対応を 2 つ取るとき，その交点数は 2 次形式の類数に関する和で表せることが Hurwitz により示されている．本稿では j 不変量の代わりにレベル構造付き楕円曲線の不変量 (種数 0 のモジュラー曲線の関数体の生成元) を用いて定義される新たなモジュラー多項式を考察し，Hurwitz の公式の一般化となる交点数の公式を紹介する．また，この交点数が $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z})$ に関する次数 2 の Siegel Eisenstein series の Fourier 係数に関する和で書けることも紹介する．

本節の構成を述べる．2 節で先行研究および主結果を紹介する．3 節では本稿で中心的な役割を果たすモジュラー多項式について述べる．4 節では交点数を計算し，主定理の証明を与える．また，本稿では命題の証明は重要なもののみの紹介に留め，そうでないものの詳細は [7] に譲ることとする．

2　導入と主結果

主結果を述べる前に，まずこれまでに知られている結果について述べる．

正整数 N に対して，以下で定義される 2 変数複素関数を次数 N のモジュラー多項式と呼ぶ：

$$\Phi_N(j(E), j(E')) \coloneqq \prod_{[f, E_1']} (j(E) - j(E_1'))$$

ただしここで E, E' は $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線で，$[f, E_1']$ は組 (f, E_1') であって次数 N の同種写像 $f\colon E_1' \to E'$ を走る．モジュラー多項式 $\Phi_N(X, Y)$ はアプリオリには 2 変数複素関数だが，整数係数の対称多項式になることが知られている．そこでそれが定めるアファイン平面代数曲線を T_N と書き，モジュラー対応と呼ぶ．

* *E-mail address*: `yuya.murakami.s8@dc.tohoku.ac.jp`

[4] において，Hurwitz は 2 つの代数曲線 T_{N_1}, T_{N_2} の交点数を 2 次形式の類数に関する和で表示する公式を与えている．ただしここで T_{N_1}, T_{N_2} の交点数は以下のように定義される：

$$(T_{N_1}, T_{N_2}) \coloneqq \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[X,Y]/(\Phi_{N_1}, \Phi_{N_2}).$$

定理 2.1 (Hurwitz)**.** 曲線 T_{N_1}, T_{N_2} が intersect properly であるための必要十分条件は，自然数 N_1N_2 が平方数でないことである．更にこのとき，その交点数は

$$(T_{N_1} \cdot T_{N_2}) = \sum_{t^2 < 4N_1N_2} \sum_{d \mid (N_1, N_2, t)} d \cdot H\left(\frac{4N_1N_2 - t^2}{d^2}\right),$$

で与えられる．ただしここで $H(D)$ は判別式 D の $\mathbb{Z}$ 上の正定値二変数二次形式の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 同値類の数であって，$ex_1^2 + ex_2^2$ と $ex_1^2 + ex_1x_2 + ex_2^2$ に同値な形式はそれぞれ重複度 1/2 と 1/3 で計上したものである．

この定理の証明は [3] または [9]（[9] の証明では [2] の結果を用いる）を参照せよ．また，T_{N_1}, T_{N_2} を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上のサイクルとみなしカスプでの交叉重複度を計算することによる別証明が [5] で与えられている．

ここで，上の交点数は曲線 T_N をモジュラー曲線の積 $Y(1) \times Y(1) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ 上の代数的サイクルとみなしたときの交点数である．そこで，本稿ではモジュラー曲線 $Y(1)$ をレベル M のモジュラー曲線 $Y_0(M)$ に置き換えて同様のことを考える．ただし，$Y_0(M)$ のコンパクト化 $X_0(M)$ は種数 0 であることを仮定する．これはモジュラー多項式を定義する際に $X_0(M)$ の有理関数体を生成する関数 t（Hauptmodul と呼ばれる）を用いるためである（上の場合は j 関数が t の役割を果たす）．このとき $1 \leq M \leq 10$ または $M = 12, 13, 16, 18, 25$ である．$M = 1$ の場合は上で紹介した古典的なケースであるため，本稿では $M \neq 1$ を仮定する．このとき，$X_0(M)$ の有理関数体を生成する関数 t であって Fourier 展開

$$t(\tau) = q^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

をもち（ただし τ は上半平面 $\mathbb{H}$ を動く変数で，$q := e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ とする），それが定める $X_0(M)$ の因子が $\mathrm{div}(t) = (0) - (\infty)$ となるものを取る．このような t は一意に定まり，更に Dedekind エータ関数 $\eta(\tau)$ の積で明示的に書けることが知られている（表 1，[6] より）．この明示式から，全ての n に対し a_n が整数であることが分かる．

この t に対し，以下で定義する関数を合同部分群 $\Gamma_0(M)$ に対する次数 N のモジュラー多項式と呼ぶ：

$$\Phi_N^{\Gamma_0(M)}(t(E,C), t(E',C')) \coloneqq \prod_{[f, E_1', C_1']} (t(E,C) - t(E_1', C_1'))$$

ただしここで (E,C) は合同部分群 $\Gamma_0(M)$ に対するレベル構造付き楕円曲線とする．すなわち，C は E の位数 M の巡回部分群である．また $[f, E_1', C_1']$ は，合同部分群 $\Gamma_0(M)$ に対するレベル構造付き楕円曲線 (E_1', C_1') と，次数 N の同種写像 $f\colon E_1' \to E'$ であって $f(C_1') = C'$ なるものの組 (f, E_1') の同値類とする．ここ

Table 1: $\Gamma_0(M)$ に対する Hauptmodul t.

M	t	M	t
2	$\dfrac{\eta(\tau)^{24}}{\eta(2\tau)^{24}}$	9	$\dfrac{\eta(\tau)^{3}}{\eta(9\tau)^{3}}$
3	$\dfrac{\eta(\tau)^{12}}{\eta(3\tau)^{12}}$	10	$\dfrac{\eta(\tau)^{3}\eta(5\tau)}{\eta(2\tau)\eta(10\tau)^{3}}$
4	$\dfrac{\eta(\tau)^{8}}{\eta(4\tau)^{8}}$	12	$\dfrac{\eta(\tau)^{3}\eta(4\tau)\eta(6\tau)^{2}}{\eta(2\tau)^{2}\eta(3\tau)\eta(12\tau)^{3}}$
5	$\dfrac{\eta(\tau)^{6}}{\eta(5\tau)^{6}}$	13	$\dfrac{\eta(\tau)^{2}}{\eta(13\tau)^{2}}$
6	$\dfrac{\eta(\tau)^{5}\eta(3\tau)}{\eta(2\tau)\eta(6\tau)^{5}}$	16	$\dfrac{\eta(\tau)^{2}\eta(8\tau)}{\eta(2\tau)\eta(16\tau)^{2}}$
7	$\dfrac{\eta(\tau)^{4}}{\eta(7\tau)^{4}}$	18	$\dfrac{\eta(\tau)^{2}\eta(6\tau)\eta(9\tau)}{\eta(2\tau)\eta(3\tau)\eta(18\tau)^{2}}$
8	$\dfrac{\eta(\tau)^{4}\eta(4\tau)^{2}}{\eta(2\tau)^{2}\eta(8\tau)^{4}}$	25	$\dfrac{\eta(\tau)}{\eta(25\tau)}$

で，2 つの組 $(f_1,E_1,C_1),(f_2,E_2,C_2)$ が同値であるとは，ある同型 $g\colon E_1\to E_2$ であって $f_1=f_2\circ g, g(C_1)=C_2$ を満たすものが存在することとする．

この $\Phi_N^{\Gamma_0(M)}$ に対し，以下の定理が成立する：

定理 2.2 (M, 2018)**.** (i) N が M と互いに素なら，$\Phi_N^{\Gamma_0(M)}(X,t)$ は $\mathbb{Z}[X,t]$ 内の対称多項式である．そこで，このとき $\Phi_N^{\Gamma_0(M)}(X,t)$ が定める $t(Y_0(M))\times t(Y_0(M))$ 上の代数的サイクルを $T_N^{\Gamma_0(M)}$ と書く．

(ii) M と互いに素な正整数 N_1,N_2 に対し，2 つの代数的サイクル $T_{N_1}^{\Gamma_0(M)},T_{N_2}^{\Gamma_0(M)}$ が intersect properly になるための必要十分条件は，自然数 N_1N_2 が平方数でないことである．更にこのとき，$t(Y_0(M))\times t(Y_0(M))$ 上の交点数は

$$\begin{aligned}(T_{N_1}^{\Gamma_0(M)}\cdot T_{N_2}^{\Gamma_0(M)}) &\coloneqq \sum_{(x_0,y_0)\in t(Y_0(M))\times t(Y_0(M))}(T_{N_1}^{\Gamma_0(M)}\cdot T_{N_2}^{\Gamma_0(M)})_{(x_0,y_0)}\\ &=\sum_{x\in\mathbb{Z},\ x^2<4N_1N_2}\ \sum_{d\mid(N_1,N_2,x)} d\cdot H^M\left(\frac{4N_1N_2-x^2}{d^2}\right)\end{aligned}$$

と表される．ここで交叉重複度 $(T_{N_1}^{\Gamma_0(M)}\cdot T_{N_2}^{\Gamma_0(M)})_{(x_0,y_0)}$ は以下の式で定義される：

$$(T_{N_1}^{\Gamma_0(M)}\cdot T_{N_2}^{\Gamma_0(M)})_{(x_0,y_0)}\coloneqq \dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[[X-x_0,Y-y_0]]/(\Phi_{N_1}^{\Gamma_0(M)},\Phi_{N_2}^{\Gamma_0(M)})$$

また，類数 $H^M(D)$ は以下の式で定義される：

$$H^M(D)\coloneqq \sum_{[Q]_{\Gamma_0(M)}\text{ with }Q=[Ma,b,c],\ \operatorname{disc}Q=-D}\frac{1}{[\Gamma_0(M)_Q:\{\pm1\}]}.$$

ただし，$[Q]_{\Gamma_0(M)}$ は正定値二変数二次形式 Q の $\Gamma_0(M)$ 同値類を表し，$\Gamma_0(M)_Q$ は $\Gamma_0(M)$ の Q に関する固定部分群とする．

上の定理において，二次形式 $aX^2+bXY+cY^2$ を $[a,b,c]$ と書く記法を用いている．

この定理の証明は 4 節で与える．証明の大部分は定理 2.1 と同様だが，一部でレベル構造がある場合特有の計算も施す必要がある．

次に，この交点数を Siegel Eienstein 級数の Fourier 係数で表す公式を述べる．

$\mathbb{H}_2=\{Z=X+Y\sqrt{-1}\in M_2(\mathbb{C})\mid {}^tZ=Z,\ Y>0\}$ を 2 次の Siegel 上半空間とする．また，$E_2^{(2)}(Z,s)$ を $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z})\subset M_4(\mathbb{Z})$ に関する次数 2 の Siegel Eisenstein 級数とする．ただしここで s は複素数とする．

$E_2^{(2)}(Z,s)$ を定義する級数は $\mathrm{Re}(s)>\frac{1}{2}$ の範囲で広義一様収束し，s について全平面に解析接続される．また，$E_2^{(2)}(Z,0)$ は $\mathbb{H}_2$ 上の滑らかな関数で，Fourier 展開

$$E_2^{(2)}(Z,0)=\sum_{T\in\mathrm{Sym}_2^*(\mathbb{Z})}C(T,Y)e^{2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(TZ)},\ Z=X+Y\sqrt{-1}$$

を持つことが知られている（[8]）．ただしここで，$\mathrm{Sym}_2^*(\mathbb{Z})$ は半整数成分を持つ 2 次対称行列であってその対角成分が整数であるものの集合である．

更に，$\mathrm{Sym}_2^*(\mathbb{Z})_{>0}$ を $\mathrm{Sym}_2^*(\mathbb{Z})$ の元のうち正定値なものたちのなす集合とするとき，$T\in\mathrm{Sym}_2^*(\mathbb{Z})_{>0}$ に対する Fourier 係数 $C(T,Y)$ は Y によらないことが知られている（[8]）．そこでこのとき $C(T):=C(T,Y)$ とおく．

また，$T\in\mathrm{Sym}_2^*(\mathbb{Z})_{>0}$ に対し χ_T を虚二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-\det(2T)})$ の二次指標とする．

以上の設定の下で，交点数は以下のように表せる．

定理 2.3 (M, 2018)**.** 定理 2.2 の状況で，更に $M=p$ は素数であると仮定する．このとき，以下が成立する：

$$(T_{N_1}^{\Gamma_0(M)}\cdot T_{N_2}^{\Gamma_0(M)})=\frac{1}{288}\sum_{T\in\mathrm{Sym}_2^*(\mathbb{Z})_{>0},\ \mathrm{diag}(T)=(N_1,N_2)}A^p(\det(2T))C(T).$$

ただしここで，$\mathrm{diag}(T)$ は T の対角成分であり，

$$A^p(D):=\begin{cases}1+\chi_D(p) & \text{if } v:=\lfloor\frac{\mathrm{ord}_pD}{2}\rfloor=0\\ 1+\frac{p}{1+\frac{1}{p^v}\frac{1-p^v}{1-p}\left(1-\frac{\chi_D(p)}{p}\right)} & \text{if } v\geq 1\end{cases}$$

とする．

3 モジュラー多項式

この節では，モジュラー多項式 $\Phi_N^{\Gamma_0(M)}$ が実際に多項式になることと，モジュラー対応が intersect properly になるための必要十分条件を与える．そのために，$\Phi_N^{\Gamma_0(M)}$ の既約成分となる新たなモジュラー多項式を以下で定義する．

定義 3.1. 正整数 N に対し，

$$\Phi_N^{\Gamma_0(M)}(t(E,C),t(E',C')) \coloneqq \prod_{[f,E_1',C_1']}(t(E,C)-t(E_1',C_1'))$$

と定義する．ただしここで，$[f,E_1',C_1']$ は $\Phi_N^{\Gamma_0(M)}$ を定義する積に現れるもののうち，$\mathrm{Ker}\, f$ が巡回群であるものを走る．

この $\Psi_N^{\Gamma_0(M)}$ について，以下の補題が成り立つ．

命題 3.2. 正整数 N が M と互いに素であるとき，以下が成立する：

(i) $\Psi_N^{\Gamma_0(M)}(X,t(\tau)) = \displaystyle\prod_{ad=N,0\le b<d,\gcd(a,b,d)=1}\left(X-t\left(\frac{a\tau+b}{d}\right)\right).$

(ii) $\Psi_N^{\Gamma_0(M)}(X,t)\in\mathbb{Z}[X,t]$.

(iii) 多項式 $\Psi_N^{\Gamma_0(M)}(X,t)$ は $\mathbb{C}$ 上の一変数関数体 $\mathbb{C}(t)$ 上既約.

(iv) $\Phi_N^{\Gamma_0(M)}(X,t) = \displaystyle\prod_{N_1^2\mid N}\Psi_{N/N_1^2}^{\Gamma_0(M)}(X,t) = \prod_{ad=N,0\le b<d}\left(X-t\left(\frac{a\tau+b}{d}\right)\right).$

特に，$\Phi_N^{\Gamma_0(M)}(X,t)\in\mathbb{Z}[X,t]$ が成り立つ．また，$N_1^2\mid N$ なる正整数 N_1 に対し $\Psi_{N/N_1^2}^{\Gamma_0(M)}(X,t)$ は $\Phi_N^{\Gamma_0(M)}(X,t)$ の既約成分である．

証明は古典的な場合と同様なので省略するが，(ii) の証明は t の Fourier 係数が整数であることが効いている．

命題 3.2 (iv) より，定理 2.2 の一部である以下が従う．

系 3.3. M と互いに素な正整数 N_1,N_2 に対し，2 つの代数的サイクル $T_{N_1}^{\Gamma_0(M)},T_{N_2}^{\Gamma_0(M)}$ が intersect properly になるための必要十分条件は，自然数 N_1N_2 が平方数でないことである．

モジュラー多項式について分かる事実で，定理 2.2 の証明には用いられないものを紹介する．いずれも，証明の詳細は [7] に譲ることとする．

命題 3.4. 正整数 N が M と互いに素であるとき，以下が成立する：

(i) 二変数多項式 $\Phi_N^{\Gamma_0(M)}(X,t),\Psi_N^{\Gamma_0(M)}(X,t)$ は対称多項式である．

(ii) 二変数多項式 $\Phi_N^{\Gamma_0(M)}(X,t),\Psi_N^{\Gamma_0(M)}(X,t)$ の X,t に関する次数はどちらも $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}):\Gamma_0(M)]$ に等しい．

(iii) $t_N(\tau)\coloneqq t(N\tau)$ とおくと，$\mathbb{C}$ 上の 1 変数関数体 $\mathbb{C}(t,t_N)$ はモジュラー曲線 $X_0^0(M,N)\coloneqq\Gamma_0^0(M,N)\backslash\mathbb{H}\cup\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ の有理関数体に等しい．

命題 3.4 (ii) より，t の Fourier 係数の最初の項を用いることでモジュラー多項式を計算することができる．小さい M,N に対する計算結果を表 2 に示す．

Table 2: 小さい M, N に対するモジュラー多項式

M	N	$\Psi_N^{\Gamma_0(M)}$
2	3	$X^4 - X^3Y^3 - 72X^3Y^2 - 900X^3Y - 72X^2Y^3 + 28422X^2Y^2 - 294912X^2Y - 900XY^3 - 294912XY^2 - 16777216XY + Y^4$
2	5	$X^6 - X^5Y^5 - 226021320X^5Y^4 - 256122862563480X^5Y^3 - 31298355995833670720X^5Y^2 - 954325239073593568474830X^5Y + 480X^4Y^5 + 6409763520X^4Y^4 + 1506162672564480X^4Y^3 + 51392022681804939270X^4Y^2 + 512792264635738861076480X^4Y - 26280X^3Y^5 - 27297299520X^3Y^4 - 1142420172039180X^3Y^3 - 92538634602361651 20X^3Y^2 - 257821715265949060300 80X^3Y + 196480X^2Y^5 + 13441732620X^2Y^4 + 74539825889280X^2Y^3 + 10753798708396032 0X^2Y^2 + 62128267366320046080X^2Y - 90630XY^5 - 201195520XY^4 - 73484206080XY^3 - 8246337208320XY^2 - 281474976710656XY + Y^6$
3	2	$X^3 - X^2Y^2 - 24X^2Y - 24XY^2 - 729XY + Y^3$
4	3	$X^4 - X^3Y^3 - 24X^3Y^2 - 132X^3Y - 24X^2Y^3 - 762X^2Y^2 - 6144X^2Y - 132XY^3 - 6144XY^2 - 65536XY + Y^4$
5	2	$X^3 - X^2Y^2 - 12X^2Y - 12XY^2 - 125XY + Y^3$
5	3	$X^4 - X^3Y^3 - 18X^3Y^2 - 81X^3Y - 18X^2Y^3 - 414X^2Y^2 - 2250X^2Y - 81XY^3 - 2250XY^2 - 15625XY + Y^4$

4　交点数

命題 4.1. 正整数 N_1, N_2 は M と互いに素であって，自然数 N_1N_2 は平方数でないとする．このとき，2 つのモジュラー対応の交点 $(t(\tau_0), t(\tau_0')) = (t(E,C), t(E',C')) \in T_{N_1}^{\Gamma_0(M)} \cap T_{N_2}^{\Gamma_0(M)}$ に対し以下が成立する：

(i) 楕円曲線 E, E' は虚数乗法を持つ．

(ii) 正則関数 $t\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ の τ_0 での分岐指数を e_{τ_0} とおくとき，$(t(\tau_0), t(\tau_0'))$ での交叉重複度は以下のように表される：

$$(T_{N_1}^{\Gamma_0(M)} \cdot T_{N_2}^{\Gamma_0(M)})_{(t(\tau_0),t(\tau_0'))}$$
$$= \frac{e_{\tau_0}}{e_{\tau_0'}} \#\{(f_1, f_2) \mid f_i\colon E \to E' \text{ is an isogeny of degree } N_i, f_i(C) = C'\}/\sim .$$

ただしここで $(f_1, f_2) \sim (f_1', f_2')$ であるとは，同型 $g\colon E \to E$ であって $f_1 \circ g = f_1', f_2 \circ g = f_2', g(C) = C$ を満たすことと定義する．

この命題も古典的な場合と同様に証明されるが，重要な命題なので証明を与える．

証明． (i)．このとき，モジュラー多項式の定義式より次数がそれぞれ N_1, N_2 の同種写像 $f_1, f_2\colon E \to E'$ が存在する．f_2 の双対同種写像を $\hat{f}_2$ と書くとき，E の

自己準同型 $\hat{f}_2 \circ f_1$ の次数 N_1N_2 は仮定より平方数でない．従って $\hat{f}_2 \circ f_1$ は整数倍写像ではないので，E は虚数乗法を持つ．E' についても同様である．

(ii)．分岐指数の定義より，交叉重複度は

$$\begin{aligned}&(T_{N_1}^{\Gamma_0(M)} \cdot T_{N_2}^{\Gamma_0(M)})_{(t(\tau_0),t(\tau_0'))} \\ &= \frac{e_{\tau_0}}{e_{\tau_0'}} \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[X - t(\tau_0), \tau - \tau_0']]/(\Phi_{N_1}^{\Gamma_0(M)}, \Phi_{N_2}^{\Gamma_0(M)})\end{aligned}$$

と表される．命題 (iv) より，この値は

$$\frac{1}{e_{\tau_0'}} \sum_{\substack{a_id_i=N_i, 0\le b_i<d_i, \\ t(\tau_0)=t\left(\frac{a_i\tau_0'+b_i}{d_i}\right)}} \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[X-t(\tau_0), \tau-\tau_0']]/\left(X - t\left(\frac{a_1\tau+b_1}{d_1}\right), X - t\left(\frac{a_2\tau+b_2}{d_2}\right)\right)$$

に等しい．$i = 1, 2$ に対し $t(\tau_0) = t(\frac{a_i\tau_0'+b_i}{d_i})$ が成り立つとき，

$$t\left(\frac{a_1\tau+b_1}{d_1}\right) - t(\tau_0), \quad t\left(\frac{a_2\tau+b_2}{d_2}\right) - t(\tau_0)$$

の $\tau = \tau_0'$ での零点の位数はそれぞれ $\frac{a_1}{d_1}, \frac{a_2}{d_2}$ であるが，仮定より N_1N_2 は平方数でないので，$\frac{a_1}{d_1} \neq \frac{a_2}{d_2}$ である．従って交叉重複度は

$$\frac{1}{e_{\tau_0'}} \sum_{\substack{a_id_i=N_i, 0\le b_i<d_i, \\ t(\tau_0)=t\left(\frac{a_i\tau_0'+b_i}{d_i}\right)}} \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[\tau - \tau_0']]/\left(t\left(\frac{a_1\tau+b_1}{d_1}\right) - t\left(\frac{a_2\tau+b_2}{d_2}\right)\right)$$

に等しく，この値は命題の右辺に等しい． □

定理 2.2 (ii) の証明．正整数 N_1, N_2 は M と互いに素で，積 N_1N_2 は平方数でないと仮定する．

$\tau \in \mathbb{H}$ が代表する $Y_0(M)$ の元を $[\tau]$ と書き，合同部分群 $\Gamma_0(M)$ に対するレベル構造付き楕円曲線 (E, C) の同値類を $[E, C]$ と書くこととする．また，定理 2.2 (ii) の主張中で述べたように，$[Q]_{\Gamma_0(M)}$ で正定値二変数二次形式 Q の $\Gamma_0(M)$ 同値類を表すこととする．以上の記号の下で，以下の 3 つの間には一対一対応がある：

- $[\tau_0] \in Y_0(M)$ であって，τ_0 が虚二次無理数であるもの
- $[E, C]$ であって，楕円曲線 E が虚数乗法を持つようなもの
- $[Q]_{\Gamma_0(M)}$ であって，正定値二変数二次形式 Q が primitive（すなわち，$Q = [a, b, c]$ と書いたときに a, b, c の最大公約数が 1）なもの

また，この対応により $[\tau_0], [E, C], [Q]_{\Gamma_0(M)}$ が対応するとき，

$$e_{\tau_0} = \frac{1}{2}\#\operatorname{Aut}(E, C) = \frac{1}{2}\#\Gamma_0(M)_Q, \quad \operatorname{disc}\tau_0 = \operatorname{disc} Q$$

が成り立つ.

このとき，命題 4.1 により交点数は次の値に等しい（計算の詳細は省略するが，古典的な場合と同様である）:

$$
\begin{aligned}
&(T_{N_1}^{\Gamma_0(M)} \cdot T_{N_2}^{\Gamma_0(M)}) \\
&= \sum_{\substack{x\in\mathbb{Z},\\ x^2<4N_1N_2}} \sum_{\substack{g\in\mathbb{Z}_{>0},\\ g^2\mid 4N_1N_2-x^2}} \sum_{\substack{[Q]_{\Gamma_0(M)},\\ Q=[a,b,c]\ \text{は primitive},\\ \operatorname{disc} Q=-\left(\frac{\gcd(a,M)}{M}\right)^2\frac{4N_1N_2-x^2}{g^2}}} \sum_{\substack{d\in\mathbb{Z}_{>0},\\ d\mid\gcd(N_1,N_2,x,g)}} d\cdot\frac{2}{\#\Gamma_0(M)_Q}.
\end{aligned}
$$

この和が定理 2.2 の右辺に等しいことは以下の補題から従う. □

補題 4.2. 上の状況で $e \coloneqq \gcd(N_1, N_2, x), D \coloneqq 4N_1N_2 - x^2$ とおくと，和に現れた $(g, [Q]_{\Gamma_0(M)}, d)$ のなす集合と

$$\left\{([Q]_{\Gamma_0(M)}, d) \;\middle|\; Q = [Ma, b, c], \operatorname{disc} Q = -\frac{D}{g^2}, d \mid e\right\}$$

に対し，$(g, [[a, b, c]]_{\Gamma_0(M)}, d)$ を $(\frac{M}{\gcd(a,M)}\frac{g}{d}[a, b, c], d)$ に送り，$([[Ma, b, c]]_{\Gamma_0(M)}, d)$ を $(\gcd(a, b, c)d, \frac{1}{\gcd(Ma,b,c)}[Ma, b, c], d)$ に送る写像は全単射を与える.

この補題は古典的な場合（$M = 1$ の場合）には不要で，レベル付きの場合に初めて必要となるものである.

定理 2.3 を証明するために補題を準備する.

正整数 D に対し，

$$H(D) \coloneqq \sum_{[Q]_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}, \operatorname{disc} Q=-D} \frac{1}{[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_Q : \{\pm 1\}]},$$

$$h(D) \coloneqq \sum_{[Q]_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}, \operatorname{disc} Q=-D, Q \text{ primitive}} \frac{1}{[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_Q : \{\pm 1\}]}$$

と定義する.

以下，M は素数 p に等しいと仮定する．このとき $p = 2, 3, 5, 7, 13$ である.

定理 4.3 ([1], Lemma 3.2)**.** 正整数 D に対し，

$$H^p(D) = H(D) + p \cdot H\left(\frac{D}{p^2}\right) \cdot \#\{h \bmod 2p \mid h^2 \equiv -D \bmod 4p\}$$

が成り立つ．ただし，$p^2 \nmid D$ のときは $H\left(\frac{D}{p^2}\right) \coloneqq 0$ と定義する.

補題 4.4. 正整数 D, v に対し，$p^{2v} \mid D$ なら，

$$h\left(\frac{D}{p^{2v}}\right) = \left(1 - \frac{\chi_D(p)}{p}\right)^{-1} \frac{1}{p^v} h(D)$$

が成り立つ．ただしここで，χ_D は虚二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ の二次指標である.

上 2 つの命題より次が従う．

命題 4.5. 正整数 e, D に対し，

$$\sum_{d|e,\ d^2|D} d \cdot H^p\left(\frac{D}{d^2}\right) = A^p(D) \sum_{d|e,\ d^2|D} d \cdot H\left(\frac{D}{d^2}\right)$$

が成り立つ．

また，Siegel Eienstein 級数の Fourier 係数と類数の関係として，以下の定理が知られている．

定理 4.6 ([8],Theorem 2.1.1)**.** $T \in \mathrm{Sym}_2^*(\mathbb{Z})_{>0}$ に対し，

$$C(T) = 288 \sum_{d|T} d \cdot H\left(\frac{\det(2T)}{d^2}\right)$$

が成り立つ．

以上の命題と定理 2.2 から，直接計算により定理 2.3 が従う．

5 謝辞

指導教官である山内卓也先生には研究に関して大変お世話になりました．また，研究集会「保型形式，保型表現とその周辺」を主催して頂いた若槻聡先生と山名俊介先生には大変お世話になりました．伊吹山知義先生には筆者の講演に関してアドバイスを頂きました．ここに感謝いたします．

References

[1] Soyoung Choi and Chang Heon Kim. Some remarks on Hurwitz-Kronecker class numbers and traces of singular moduli. *Ramanujan Journal*, 38:579–596, 2015.

[2] Ulrich Görtz. A sum of representation numbers. *Astérisque*, 312:9–14, 2007.

[3] Benedict H. Gross and Kevin Keating. On the intersection of modular correspondences. *Invent.math.*, 112:225–245, 1993.

[4] Adolf Hurwitz. Über relationen zwischen klassenanzahlen binärer quadratischer formen von negativer determinante. *Math. Ann.*, 25:157–196, 1885. reprinted in Mathematische Werke, Bd. I1, pp. 8-50. Basel: Birkhaüser 1933.

[5] Jie Ling. Intersection of modular polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 137(5):1543–1549, 2009.

[6] Robert S. Maier. On rationally parametrized modular equations. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 24:1–73, 2009.

[7] Yuya Murakami. Intersection numbers of modular correspondences for genus zero modular curves. arXiv:1806.01751, 2018.

[8] Shoyu Nagaoka. A note on the Siegel-Eisenstein series of weight 2 on $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z})$. *Manuscripta Math.*, 77:71–88, 1992.

[9] Gunther Vogel. Modular polynomials. *Astérisque*, 312:1–7, 2007.