Formula Simplification for Real Quantifier Elimination Using Geometric Invariance

岩根 秀直

Hidenao Iwane

(株) 富士通研究所 / 国立情報学研究所

Fujitsu Laboratories Ltd / National Institute of Informatics *

穴井 宏和

Hirokazu Anai

(株) 富士通研究所 / 九州大学 / 国立情報学研究所

Fujitsu Laboratories Ltd / Kyushu University / National Institute of Informatics †

Abstract

Formulating a simple and adequate quantified first-order formula is crucial for applying real quantifier elimination (QE) efficiently. In general, generating simple formulas or simplifying formulas for efficient QE involves human interaction. In this paper, we present simplification algorithms for quantified first-order formulas over the real numbers to speed up QE. We present experimental results for more than 10,000 benchmark problems to examine the effectiveness of our simplification algorithms.

1 はじめに

実閉体上の限量子消去（quantifier elimination; QE） [14] は入力と等価で限量子のない論理式を求めるアルゴリズムである．広い応用があり，多くの研究がなされているが，その最悪計算量の下限は 2 重指数的であることが示されている．計算量の問題を回避するため，特別な入力に限定した QE [4] や，消去順序などのアルゴリズムの適用方法を工夫する方法 [6] などが提案されている．また，論理式の簡単化は，QE の計算や後処理での実行可能領域の描画などの効率化で重要なため多くの研究がなされている [5, 3, 13, 2, 8].

本研究は，ロボットは東大に入れるかプロジェクトにおける数学問題のソルバーへの適用を目的としている．自然言語処理によって導出された論理式は非常に冗長であるため，その簡単化は計算効率の面で非常に重要である．たとえば,「正三角形のひとつの角 A の余弦を求めよ」という問題に対して，開発中のシステムは，三角形のすべての頂点の座標を変数において論理式を導出する．ここで，幾何的な等価性を利用して，いくつかの変数は固定できる．つまり，**平行移動**しても良いことを利用すると，ひとつの頂点を原点に移動でき，**回転**しても良いことを利用すると，別の頂点の x 軸上に移動でき，**拡大縮小**しても良いことを利用すると，辺の長さを 1 にできる．これにより，残りの頂点のみを変数においた等価な問題が構築できることがわかる．

*iwane@fujitsu.com

†anai@fujitsu.com

本稿では，上記の例のように入力の限量子付きの論理式を幾何的な等価性を利用して，それと等価で変数の数が少ない論理式への変換を考える．QE の計算量のうち変数の数が支配的であるため，QE 計算の効率化に寄与すると考えられる．擬似コードなどより詳細な説明は [7] を参照されたい．

2　拡大縮小

本節では，拡大縮小を利用した簡単化手法について紹介する．本稿では，原子論理式は $f\rho 0$（$\rho \in \{=, \neq, <, \leq, >, \geq\}$）に正規化されていると仮定する．論理式 φ の自由変数 x に y を代入することを $\varphi(x \to y)$ で表記する．

定義 1
$M = cx_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n} \in \mathbb{R}[y_1, \ldots, y_m][x_1, \ldots, x_n]$ を単項とする．$x_1, \ldots, x_n$ に関する M の総次数を $\sum_{i=1}^n d_i$ で定義する．また，多項式 f に属するすべての単項の $x_1, \ldots, x_n$ に関する総次数が等しいとき, f は $x_1, \ldots, x_n$ に関して斉次であるという．

定義 2
$\boldsymbol{x}$ を φ 上の変数の組とする．一階述語論理式 φ が次の条件をみたすとき，$\boldsymbol{x}$ に関して斉次であるという．

1. φ が原子論理式 $f\rho 0$ であり，f が $\boldsymbol{x}$ に関して斉次である，または，
2. すべての φ の原子論理式が $\boldsymbol{x}$ に関して斉次である．

次の定理は拡大縮小を利用した斉次論理式の簡単化であり，元の論理式よりも変数の数が少ない QE 問題に変換する．

定理 3
φ を一階述語論理式とし，p と $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ をその自由変数（の一部），$\boldsymbol{y}$ を束縛変数（の一部）とする．また，$\boldsymbol{x}' = (x_1', \ldots, x_n')$ を別の新しい変数とする．このとき，φ が $(p, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ について斉次であれば，φ は次の論理式と等価である．

$$\exists x_1' \cdots \exists x_n' (p > 0 \wedge \varphi(p \to 1, \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}') \wedge p\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}) \quad \vee \tag{1a}$$
$$(p = 0 \wedge \varphi(p \to 0)) \quad \vee \tag{1b}$$
$$\exists x_1' \cdots \exists x_n' (p < 0 \wedge \varphi(p \to -1, \boldsymbol{x} \to -\boldsymbol{x}') \wedge p\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}) \tag{1c}$$

ここで，$p\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$ は $\wedge_{i=1}^n (px_i' = x_i)$ を表す．

証明　$p = 0$ のとき，(1b) が得られる．$p > 0$ のときを考えると，多項式 $f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}$ に関して斉次で，その総次数を d とすると，$r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して，$f(r\boldsymbol{x}) = r^d f(\boldsymbol{x})$ が成立する．このことから，p を正の数に固定すると，冠頭標準形に変形した φ の限量子を含まない部分（quantifier-free part）を ψ とすると，ψ は，$\psi(p \to 1, \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}/p, \boldsymbol{y} \to \boldsymbol{y}/p)$ と等価である．すべての $i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}$ に対して $x_i' = x_i/p$，$y_j' = y_j/p$ とすれば (1a) が得られる．ここで，束縛変数 y_j は消去されるため，置き換えの必要がないことに注意する．

同様にして，$p < 0$ の場合には (1c) が得られる． ∎

上の定理は，p が自由変数であることと，$\boldsymbol{x}$ や $\boldsymbol{y}$ が空でも成立することに注意する．本稿では上の定理の p を**主変数**とよぶ．元の問題 φ と比較して，定理 3 によって得られる 3 つの部分問題は p が消去された 1 変数少ない問題になっている．一方で，新しい変数 $\boldsymbol{x}'$ が増えており，これらの変数を別途消去する必要があるが，$\boldsymbol{x}'$ は次の手順で容易に消去できる．(1) x_i' に x_i/p を代入し，(2) p の符号に注意しながら分母を消去する．

例 1
QE の例としてよく利用される $\varphi \equiv \exists x(ax^2+bx+c>0)$ を考える．φ は (a,b,c) に関して斉次であるので，a を主変数として定理 3 を適用すると，(x,b,c) のみを変数とする部分問題で QE が実現できる．

$$
\begin{aligned}
\varphi \equiv & \exists b'\exists c' && (a>0 \wedge \varphi(a\to 1, b\to b', c\to c') \wedge ab'=b \wedge ac'=c) \vee \\
& && (a=0 \wedge \varphi(a\to 0)) \vee \\
& \exists b'\exists c' && (a<0 \wedge \varphi(a\to -1, b\to -b', c\to -c') \wedge ab'=b \wedge ac'=c) \\
\equiv & \exists b'\exists c' && (a>0 \wedge (\exists x(x^2+b'x+c'>0)) \wedge ab'=b \wedge ac'=c) \vee \\
& && (a=0 \wedge (\exists x(bx+c))) \vee \\
& \exists b'\exists c' && (a<0 \wedge (\exists x(-x^2+b'x+c'>0)) \wedge ab'=b \wedge ac'=c) \\
\equiv & \exists b'\exists c' && (a>0 \wedge (0=0) \wedge ab'=b \wedge ac'=c) \vee \\
& && (a=0 \wedge (b\neq 0 \vee c>0)) \vee \\
& \exists b'\exists c' && (a<0 \wedge b'^2-4c'>0 \wedge ab'=b \wedge ac'=c) \\
\equiv & && (a>0) \vee \\
& && (a=0 \wedge (b\neq 0 \vee c>0)) \vee \\
& && (a<0 \wedge (b/a)^2-4(c/a)>0) \\
\equiv & && (a>0) \vee \\
& && (a=0 \wedge (b\neq 0 \vee c>0)) \vee \\
& && (a<0 \wedge b^2-4ac>0),
\end{aligned}
$$

主変数も束縛されている場合には，次の系が利用できる．

系 4
φ を一階述語論理式とし，p をその自由変数のひとつ，$\boldsymbol{y}$ を束縛変数（の一部）とする．このとき，φ が $(p,\boldsymbol{y})$ に関して斉次であれば，次の関係が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\exists p\,(\varphi) &\equiv \varphi(p\to 1) \vee \varphi(p\to 0) \vee \varphi(p\to -1), \\
\forall p\,(\varphi) &\equiv \varphi(p\to 1) \wedge \varphi(p\to 0) \wedge \varphi(p\to -1).
\end{aligned}
$$

例 2
$x=a$ は (x,a) に関して斉次なので，系 4 から次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\exists a\exists x(x=a) &\equiv \exists x(x=1) \vee \exists x(x=0) \vee \exists x(-x=-1) \\
\forall a\exists x(x=a) &\equiv \exists x(x=1) \wedge \exists x(x=0) \wedge \exists x(-x=-1) \\
\exists a\forall x(x=a) &\equiv \forall x(x=1) \vee \forall x(x=0) \vee \forall x(-x=-1) \\
\forall a\forall x(x=a) &\equiv \forall x(x=1) \wedge \forall x(x=0) \wedge \forall x(-x=-1)
\end{aligned}
$$

例 2 の各論理式の最初と最後の部分問題は等価である．次の命題はその必要条件を与える．

命題 5
φ が $(p,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ に関して斉次とする．ここで，$p,\boldsymbol{x}$ は自由変数，$\boldsymbol{y}$ は束縛変数とする．このとき，もし，φ に属するすべての原子論理式 $f\rho 0$ が次の条件をみたすとき，$\varphi(p\to 1, \boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x})$ は $\varphi(p\to -1, \boldsymbol{x}\to -\boldsymbol{x})$ と等価である．

1. $(p, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に関する総次数が偶数である，または

2. 原子論理式が $f = 0$ または $f \neq 0$ である．

3 平行移動

本節では，平行移動を利用した簡単化手法について述べる．最初に，移動不変論理式を定義する．

定義 6
φ を一階述語論理式とし，$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ を φ の変数（の一部）とする．ある $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n_{\neq 0}$ が存在し，すべての実数 h と φ に属するすべての原子論理式 ψ に対して

$$\psi \equiv \psi(x_1 \to x_1 - k_1 h, \ldots, x_n \to x_n - k_n h)$$

が成り立つとき，φ は $\boldsymbol{x}$ に関して移動不変であると定義する．

φ が移動不変であるとき，幾何的には平行移動しても問題が変化しないことを表す．したがって，一般性を失うことなくひとつの変数を固定できる．任意の値でいいが，本定理では 0 に固定している．

定理 7
φ を一階述語論理式とし，p と $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ をその自由変数（の一部），$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ を束縛変数（の一部）とする．また，$\boldsymbol{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ を別の新しい変数とする．このとき， φ が $(p, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ について移動不変であれば，ある $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ が存在し，

$$\exists x'_1 \cdots \exists x'_n (\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - p\boldsymbol{k} \wedge \varphi(p \to 0, \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}'))$$

が成立する．ここで，$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - p\boldsymbol{k}$ は $\wedge_{i=1}^n (x'_i = x_i - pk_i)$ を表す．

証明 $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ とする．φ が移動不変であることから，ある実数の組 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n_{\neq 0}$ と $\boldsymbol{k}_y \in \mathbb{R}^m_{\neq 0}$ が存在し，すべての $h \in \mathbb{R}$ と φ に属する原子論理式 ψ に対して，

$$\psi \equiv \psi(p \to p - h, \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} - h\boldsymbol{k}, \boldsymbol{y} \to \boldsymbol{y} - h\boldsymbol{k}_y)$$

が成立する．$h = p, \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - h\boldsymbol{k}$ とすると，定理 3 の証明と同様にして本定理の主張の成立を確認できる．∎
上の定理の p を**主変数**とよぶ．また，本定理が $\boldsymbol{x}$ や $\boldsymbol{y}$ が空であっても成立することに注意する．定理 7 で得られる論理式に対して QE を適用する場合，φ の p に 0 を代入して得られる φ よりも簡単な論理式に対する QE と新しい変数 $\boldsymbol{x}'$ の消去が必要となる．$\boldsymbol{x}'$ の消去は，単に x'_i に $x_i - pk_i$ を代入するだけで実現できる．

拡大縮小の場合と同様に主変数が束縛されている場合には，次の系が利用できる．

系 8
φ を一階述語論理式とし， p を自由変数のひとつ，$\boldsymbol{y}$ を束縛変数の一部とする．φ が $(p, \boldsymbol{y})$ に関して移動不変である場合，次が成立する．

$$\exists p\,(\varphi) \equiv \forall p\,(\varphi) \equiv \varphi(p \to 0).$$

4　回転

最後に，回転操作に対して問題が不変な場合に変数をひとつ固定できることを示す．本節では，2 次元用の手法を示しているが，より高次元の場合には本節の手法を再帰的に適用して変数を固定できる．

定義 9
φ を一階述語論理式とし，$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ を φ の変数（の一部）とする．φ に属するすべての原子論理式 ψ が $c^2 + s^2 = 1$ を満足するすべての実数 c, s に対して，

$$\psi \equiv \psi(x_1 \to cx_1 - sx_2, x_2 \to sx_1 + cx_2, \ldots, x_{2n-1} \to cx_{2n-1} - sx_{2n}, x_{2n} \to sx_{2n-1} + cx_{2n})$$

が成立するとき， φ は 回転不変であると定義する．

$c^2 + s^2 = 1$ を満足する実数 c, s に対して，行列 $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$ は 2 次元の回転行列とみなせる．したがって，幾何的に解釈すると，$i \in \{1, \ldots, n\}$ について，点 (x_{2i-1}, x_{2i}) は原点を中心とする回転操作に対して不変である．そのため，1 点を固定できる．

定理 10
φ を一階述語論理式とし，p_1, p_2 と $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{2n})$ をその自由変数（の一部），$\boldsymbol{y}$ を束縛変数（の一部）とする．また，p'_2 と $\boldsymbol{x}' = (x'_1, \ldots, x'_{2n})$ を別の新しい変数とする．もし，φ が $(p_1, p_2, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に関して回転不変であれば，φ は

$$\begin{aligned}
&\exists c \exists s \exists p'_2 \exists x'_1 \cdots \exists x'_{2n} (c^2 + s^2 = 1 \wedge \\
&\quad \varphi(p_1 \to 0, p_2 \to p'_2, \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}') \wedge \\
&\quad (0 = cp_1 - sp_2 \wedge p'_2 = sp_1 + cp_2) \wedge \\
&\quad \wedge_{i=1}^{n} ((x'_{2i-1} = cx_{2i-1} - sx_{2i} \wedge x'_{2i} = sx_{2i-1} + cx_{2i})))
\end{aligned}$$

と等価である．

証明　任意の実数 p_1 と p_2 に対して，$c^2 + s^2 = 1 \wedge 0 = cp_1 - sp_2$ を満たすような実数 c, s が存在する．したがって，定理 7 の証明と同様にして，定義 9 から示される． ∎

また，本定理が $\boldsymbol{x}$ や $\boldsymbol{y}$ が空であっても成立することに注意する．本定理によって，与えられた回転不変な論理式は，変数 p_1 を消去した元の問題よりも簡単な QE と，新しい変数 $\boldsymbol{x}'$, c, s の消去により実現できる．$\boldsymbol{x}'$ と p'_2 は代入により消去できるが，c と s の消去は容易ではない．つまり，回転操作を利用して 1 変数消去できたが，別の 2 次の変数 c, s を消去する必要があり簡単化できたとはいえない状況になってしまう．しかし，p_1, p_2 も束縛されている場合には，この c, s の消去計算を回避できる．

系 11
φ を一階述語論理式とし，p_1, p_2 をその自由変数，$\boldsymbol{y}$ を束縛変数（の一部）とする．φ が $(p_1, p_2, \boldsymbol{y})$ に関して回転不変なとき，次が成立する．

$$\begin{aligned}
\exists p_1 \exists p_2 (\varphi) &\equiv \exists p_2 (\varphi(p_1 \to 0)), \\
\forall p_1 \forall p_2 (\varphi) &\equiv \forall p_2 (\varphi(p_1 \to 0)).
\end{aligned}$$

表 1: Experimental results for 1206 QE problems generated using natural language processing.

solver	solved	scale	trans	rot	wlog	(%)
`tsr`	1052	234	66	11	262	21.72
`ts-`	1050	234	66	-	262	21.72
`t--`	1045	-	70	-	70	5.80
`-s-`	1037	238	-	-	238	19.73
`--r`	1040	-	-	9	9	0.74
`---`	1037	-	-	-	-	-
math10	846					

5 計算機実験結果

本節では計算機実験結果により本稿で提案する簡単化手法の効果について述べる．Maple 上の QE パッケージ SyNRAC [9][1] 上に実装して実験を行った．すべての実験は Intel(R) Xeon(R) CPU E7-4870 2.40GHz / 1007 GB of memory の計算機上で行った．本実験では，追加した変数の消去が困難なため定理 10 は利用していない．

最初に，ロボットは東大に入れるかプロジェクト [1, 11] で生成された 1206 個の QE 問題に提案手法を適用した．開発中のシステムでは，入力された日本語で記述された数学問題を自然言語処理によって解釈し，それと等価な（非冠頭標準形の）一階述語論理式に変換する．自然言語処理は問題文に書かれた内容をそのままの形で式に変換するため多くの場合に冗長な表現を含み，幾何的な性質を利用した簡単化も十分には実現できていない．特に，代数の問題などが幾何的な等価性を含んでいる場合には，自然言語処理による簡単化はむずかしい．問題文は国際数学オリンピック (IMO)，国立大学の入試問題，数研出版のチャート式を利用し，2 次および 3 次の幾何問題，代数，微分積分などがある．システムが生成した QE 問題の一部は GitHub 上に公開している [2]．

表 1 は計算機実験結果を表す．“solved” 列は 600 秒以内に計算が停止した問題の数，“scale”, “trans”, “rot” 列はそれぞれ拡大縮小，平行移動，回転の性質を検出した問題の数，“wlog” は本稿で紹介したいずれかの幾何的な等価性をもつ問題の数を表す．“(%)”’ 列は “wlog” の全体に対する割合を表す．

6 つの手法により比較評価を行った．‘`s`’, ‘`t`’, ‘`r`’ はそれぞれ拡大縮小（scale），平行移動（translation），回転（rotation）を利用した手法であることを示し，‘`-`’ の場合には利用しなかったことを示す．“math10” 行は Mathematica 10.2.0 の Resolve コマンドの結果を示す．約 21.7% の問題がいずれかの等価性をもち，実験ではすべての手法を利用した “`tsr`” が最も効率的であることが確認できた．

表 2 では，“`---`” では 600 秒以内に解けなかったが，提案手法では解けた問題の一部を掲載している．“id” 列は問題番号，“S”, “T”, “R” 列は，系 4, 8, 11 が QE の前処理で利用できた場合に 1，できなかった場合に 0 を示す．“s”, “t”, “r” 列は，拡大縮小，平行移動，回転の等価性を持つ場合に 1，そうでない場合に 0 を示す．“var”, “qvar”, “atom”, “deg” はそれぞれ，変数の数，束縛変数の数，原子論理式の数，総次数の最大値を表す．表 2 により，提案手法が適用可能な場合に，QE の計算時間を大きく削減できていることが確認できる．

次に，機械的に生成したものだけでなく，一般的に幾何的な等価性を持つことを確認するため，Satisfiability Modulo Theories (SMT) 用のベンチマーク問題 [10, 6] を用いた計算機実験結果を表 3 に示す．入力はす

[1] `http://www.fujitsu.com/jp/group/labs/resources/tech/announced-tools/synrac/`

[2] `https://github.com/hiwane/qe_problems/tree/master/problems/exam`

表 2: Timing data given in seconds for the benchmark problems of the Todai robot project. 'TO' indicates that the solver did not terminate within 600 seconds.

id	`tsr`	`ts-`	`t--`	`-s-`	`--r`	`---`	math10	S	T	R	s	t	r	var	qvar	atom	deg
19	122.9	123.2	TO	121.6	TO	TO	TO	0	1	0	0	1	0	22	22	52	4
27	70.8	70.0	TO	69.5	TO	TO	70.6	0	1	0	0	2	0	18	18	75	2
83	25.7	25.7	TO	25.2	TO	TO	TO	0	1	0	0	2	0	45	44	106	2
151	44.1	44.9	TO	45.1	TO	TO	TO	0	1	0	0	1	0	19	19	107	4
808	0.8	67.1	69.9	TO	61.8	TO	TO	1	0	1	2	0	1	8	7	6	3
992	451.0	493.6	TO	485.5	TO	TO	TO	0	0	0	0	2	0	9	4	7	4
999	57.9	57.8	TO	57.3	TO	TO	TO	0	1	0	0	4	0	14	14	1158	2
1064	9.4	9.3	8.3	TO	TO	TO	TO	1	1	0	1	3	0	5	5	1	4
1073	254.1	240.0	TO	231.7	TO	TO	TO	0	1	0	0	1	0	19	19	35	3
1104	259.8	227.9	TO	229.5	TO	TO	TO	0	1	0	0	1	0	26	26	48	2
1115	86.2	88.6	TO	88.2	TO	TO	TO	0	1	0	0	59	0	31	31	288	3
1122	10.4	10.1	TO	9.8	TO	TO	TO	0	1	0	0	2	0	24	24	138	3
1131	167.6	158.2	TO	153.2	TO	TO	TO	0	1	0	0	1	0	18	18	79	3
1178	9.3	9.2	TO	8.4	TO	TO	TO	0	1	0	0	2	0	11	10	41	6
1189	4.1	3.4	TO	TO	TO	TO	TO	1	1	0	3	4	0	16	16	9	3
1204	2.0	TO	TO	TO	1.3	TO	TO	0	0	1	0	0	3	18	15	15	3

べて冠頭標準形かつ自由変数がない問題である．'smt2' 形式のファイルから変換ツール [3] を利用して入力ファイルを生成している．"meti-tarski", "keymaera", "zankl", "hong", "kissing" はそれぞれベンチマーク問題 [10] のカテゴリを表し，"all" 列は合計を表す．"`tsr`" 行から "maht10" 行まではそれぞれのソルバー (表 1 参照) で 600 秒以内に解けた問題の数，"all" 行はベンチマーク問題の総数を表す．"scale", "trans", "rot", "wlog" 行はそれぞれ，拡大縮小，平行移動，回転，いずれかの幾何的な等価性を持つ問題の数を表す．"(%)" 行は，"all" 対する "wlog" の割合を表す．

おおよそ 8.80% の問題が幾何的な等価性をもつことが確認できる．この結果は提案手法が機械的に生成したもの以外でも適用可能である可能性を示している．この表では 600 秒以内で解ける問題の数はほとんど変化していないが，幾何的な等価性を持つ問題の個別の情報（表 4）をみると，計算時間が大きく改善できていることが確認できる．

6 Conclusion

本稿では，非冠頭標準形の限量子付きの論理式を拡大縮小，平行移動，回転の幾何的な等価性を利用して，QE 計算が容易な変数の数が少ない論理式への簡単化手法について述べた．計算機実験結果は，広い問題への適用可能性とその効率を示す．提案手法は機械的なものだけでなく，計算機代数に明るくない人が構築した論理式へも効果があると期待される．

参 考 文 献

[1] N. H. Arai, T. Matsuzaki, H. Iwane, and H. Anai. Mathematics by machine. In *Proceedings of the 39th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, ISSAC '14, pp. 1–8. ACM, July 2014.

[2] C. W. Brown. Fast simplifications for Tarski formulas based on monomial inequalities. *Journal of Symbolic Computation*, 47(7):859–882, July 2012.

[3] `https://github.com/hiwane/qeconv/`

表 3: Experimental results for SMT-lib benchmark problems.

solver	meti-tarski	keymeara	zankl	hong	kissing	all
`tsr`	8252	420	54	15	17	8758
`ts-`	8252	420	54	15	15	8756
`t--`	8252	420	55	15	15	8757
`-s-`	8250	420	54	15	15	8754
`--r`	8250	420	55	15	17	8757
`---`	8250	420	55	15	17	8757
math10	8276	420	67	12	17	8792
all	8276	421	166	84	45	8992
scale	92	58	123	0	0	273
trans	332	59	6	0	0	397
rot	118	8	0	0	45	171
wlog	542	81	123	0	45	791
(%)	6.55	19.24	74.10	0.0	100.00	8.80

表 4: Timing data given in seconds for SMT benchmarks.

id	`tsr`	`ts-`	`t--`	`-s-`	`--r`	`---`
kissing_3_4	2.6	TO	TO	TO	2.5	TO
kissing_3_6	5.8	269.0	251.9	245.7	5.0	245.8
kissing_4_3	2.1	91.3	93.9	119.5	1.9	117.8
matrix-1-all-9	7.6	7.0	85.9	7.5	90.2	91.2
matrix-1-all-37	TO	TO	302.7	TO	307.1	294.0
matrix-1-all-39	1.4	1.3	TO	1.6	TO	TO
sqrt-1mcosq-8-chunk-0112	426.8	TO	376.6	TO	TO	TO
polypaver-bench-sqrt-3d-chunk-0464	8.0	60.2	7.9	63.5	2.8	60.2

[3] C. W. Brown and A. W. Strzeboński. Black-box/white-box simplification and applications to quantifier elimination. In *Proceedings of the 2010 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, ISSAC '10, pp. 69–76. ACM, July 2010.

[4] B. F. Caviness and J. R. Johnson eds. *Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition (Texts and Monographs in Symbolic Computation).* Springer, 1998.

[5] A. Dolzmann and T. Sturm. Simplification of quantifier-free formulas over ordered fields. *Journal of Symbolic Computation*, 24(2):209–231, Aug. 1997.

[6] Z. Huang, M. England, D. Wilson, J. H. Davenport, L. C. Paulson, and J. Bridge. Applying machine learning to the problem of choosing a heuristic to select the variable ordering for cylindrical algebraic decomposition. In *Intelligent Computer Mathematics*, Vol. 8543 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 92–107. Springer, July 2014.

[7] H. Iwane and H. Anai. Formula simplification for real quantifier elimination using geometric invariance. In M. A. Burr, C. K. Yap, and M. S. E. Din eds., *Proceedings of the 2017 ACM on International*

Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ISSAC 2017, Kaiserslautern, Germany, July 25-28, 2017, pp. 213–220. ACM, 2017.

[8] H. Iwane, H. Higuchi, and H. Anai. An effective implementation of a special quantifier elimination for a sign definite condition by logical formula simplification. In *Computer Algebra in Scientific Computing*, Vol. 8136 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 194–208. Springer, Sept. 2013.

[9] H. Iwane, H. Yanami, and H. Anai. SyNRAC: A toolbox for solving real algebraic constraints. In H. Hong and C. Yap eds., *Mathematical Software - ICMS 2014 - 4th International Congress, Seoul, South Korea, August 5-9, 2014. Proceedings*, Vol. 8592 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 518–522. Springer, Aug. 2014.

[10] D. Jovanović and L. de Moura. Solving non-linear arithmetic. In *Automated Reasoning*, Vol. 7364 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 339–354. Springer Berlin Heidelberg, June 2012.

[11] T. Matsuzaki, H. Iwane, H. Anai, and N. H. Arai. The most uncreative examinee: A first step toward wide coverage natural language math problem solving. In C. E. Brodley and P. Stone eds., *Proceedings of the Twenty-Eighth AAAI Conference on Artificial Intelligence*, pp. 1098–1104. AAAI Press, July 2014.

[12] S. McCallum. An improved projection operator for cylindrical algebraic decomposition. In Caviness and Johnson [4], pp. 242–268.

[13] D. R. Stoutemyer. Ten commandments for good default expression simplification. *Journal of Symbolic Computation*, 46(7):859 – 887, 2011. Special Issue in Honour of Keith Geddes on his 60th Birthday.

[14] A. Tarski. *A decision method for elementary algebra and geometry*. University of California Press, 1951.