群のSubdirectProductが作るcoherent configurationの計算

Computation of Coherent Configurations formed by SubdirectProducts of Groups

宮本泉 *

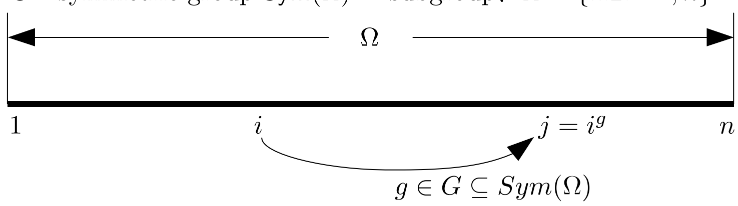
Izumi Miyamoto

1 はじめに

置換群 G とその自己同型 σ による像 G^σ との SubdirectProduct が作る coherent configuration を計算して考察する。昨年度の本研究集会では、可移群のデータを使って、次数 16 までの場合に計算実験を行った。今回は、可移群が分類済の次数 30 まで場合と、可移群より次数が大きいデータがある primitive 群について次数 380 まで計算実験を行った。実験には GAP システムを使用しているが、可移群の場合で、次数は大きくないのに、群の自己同型群の計算が困難な場合が出てきて、Magma システムも利用する必要があった。置換群が作る coherent configuration としては、可移でない群から作られるものを考えることになるが、一連の本実験で、上述の方法で自明でない非可移な群が構成できることが分かった。また、今回、構成した coherent configuration の fusion スキームとして群からは構成されないものも見つかった。

2 置換群 permutation group

置換群 G : symmetric group $\mathsf{Sym}(\Omega)$ の subgroup、$\Omega = \{1.2.\cdots, n\}$

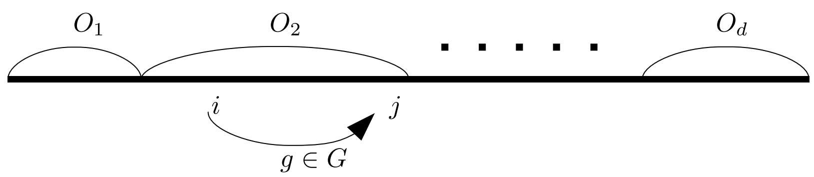


2.1 Orbit

【定義】 $\Omega \supseteq \{i^g | g \in G\}$: 点 i を含む G の orbit

O_1,O_2,$\cdots$,O_d : orbit 全体、 $\Omega = O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_d$ (disjoint union)

*imiyamoto1@gmail.com



【定義】 G：可移（transitive）$\Longleftrightarrow \quad \Omega = O_1$

3 coherent configuration $(\Omega, \{O_i\}_{i=0,1,2,\cdots,d})$

G の Ω^2 への作用を $\Omega^2 \ni [i,j]^g = [i^g, j^g]$ で定め、G の Ω^2 への作用の orbit の全体を O_i $(i = 1, 2, \cdots, d$ $)$ とする。

【例】$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $G =$TransitiveGroup$(6,6)$ (GAP の data より)

$$\left.\begin{array}{l}
O_1 = \{[1,1,[2,2],[3,3,[4,4],[5,5],[6,6]\}, \\
O_2 = \{[1,2],[2,1],[3,4],[4,3],[5,6],[6,5]\}, \\
O_3 = \{[1,3],[1,4],[2,3],[2,4],\cdots,[6,1],[6,2]\}, \\
O_4 = {}^tO_2 = \{[3,1],[4,1],[3,2],\cdots,[1,6],[2,6]\}
\end{array}\right\} \begin{array}{c}\Omega \times \Omega \text{ 上の orbit} \\ 4\text{ 個}\end{array}$$

行列表示：

$$A_1 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = I, \quad A_2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = {}^tA_3$$

【定義】coherent configuration $(\Omega, \{A_i\}_{i=1,2,\cdots,d})$ (combinatorial property)[4]

- $A_i (i = 1, 2, \cdots, d)$ は、$0, 1$ matrix
- $A_1 + A_2 + \cdots + A_d = J$ (all 1 matrix)
- $I = A_1 + A_2 + \cdots + A_r$
- ${}^tA_i = A_j$ for some j
- $A_i A_j = \sum_{k=1}^{d} p_{i,j,}^{k} A_k$ (A_i 達の生成する algebra の basis)

【定義】association scheme

$A_1 = I$ のとき、とくに、association scheme という。(前の例は、association scheme になっている。)
G が transitive$\Longleftrightarrow$ G が作る coherent configuration は association scheme。

【定義】 CC(G)、AS(G) で、置換群 G の作る coherent configuration と association scheme をそれぞれ表す。

【定義】fusion scheme

【Example】A_1, A_2, A_3, A_4 前例と同じ。

A_1, A_2, A_3+A_4 は、association scheme となる。このようにしてできる coherent configuration を fusion scheme という。

【定義】AutomorphismGroup

群 G、coherent configuration CC$=(\Omega, A_i)$ に対して、以下の記号を定める。

Aut(G)：G の自己同型群 automorphism group

Aut(CC)$=\{P$: permutation matrix$|P^{-1}A_iP=A_i$ for all $i\}$：CC の自己同型群

【定義】relation matrix

A_i たちを、次のようにまとめた行列 $1A_1+2A_2+\cdots+dA_d$ を relation matrix という。

【前の例の relation matrix】

$$1A_1+2A_2+3A_3+4A_4=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

【前例の fusion scheme の relation matrix】

$$1A_1+2A_2+3(A_3+A_4)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

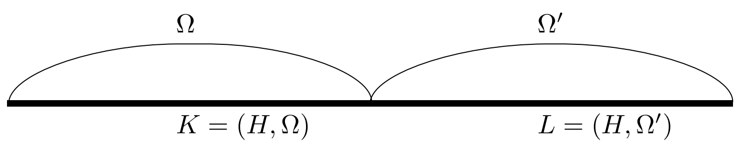
4 SubdirectProduct

【定義】 H は、direct product $K\times L=\{(k,\ell)|k\in K, \ell\in L\}$ の SubdirectProduct の一つ $\Longleftrightarrow$

K は Ω 上の、そして、L は Ω' 上の置換群とする。$(\Omega\cap\Omega'=\emptyset)$

subgroup$H\subseteq K\times L$ は、

H の Ω 上への action$=K$、かつ、H の Ω' 上への action$=L$



GAP のコマンド SubdirectProducts は、上の条件を満たすようなすべての群 H を計算する。

【Example】 $G=K=L$ のとき

SubdirectProducts$(G,G)=\{G\times G, \{(g,g)|g\in G\},\cdots\}$

本発表では、適当な $\sigma\in$Aut(G) に対する SubdirectProduct

$$\{(g, g^{\sigma})|g \in G\}$$

を考察している。したがって、とくに、$\{(g, g^{\sigma}|g \in G\} \cong G$ となる。

下に、昨年度の発表でも述べた本研究のモチベーションとなった例を、簡単に示す。

Sym(7) と G =TransitiveGroup$(7, 5)$ on $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ では、AS(Sym(7))=AS(G) となり、A_1, A_2 からなる。

$$1A_1 + 2A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aut(AS)=Sym(7) となるので、TransitiveGroup$(7, 5)$ はとらえられない。一般に、異なる群 $G_1 \neq G_2$ でも、それらの作る coherent configuration は CC(G_1) =CC(G_2) と一致する例は、多く存在する。

G =TransitiveGroup$(7, 5)$ では、SubdirectProduct $H = \{(g, g^{\sigma})|g \in G\}$ で、Aut(CC(H))$\cong G$ とできる。ここで、$\sigma \in$Aut(G) で、CC(H) は、A_1, A_2, $\cdots$, A_8 からできていて、次のようになる。

$$\begin{array}{c}1A_1 + 2A_2 + \cdots + 8A_8 = \\ \text{(symmetric design)}\end{array} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' & 7' \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \\ 5' \\ 6' \\ 7' \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 6 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 6 & 4 & 6 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 6 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 6 & 4 & 4 & 4 & 6 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 & 6 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 5 & 5 & 7 & 7 & 2 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 5 & 7 & 5 & 5 & 5 & 7 & 8 & 2 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 5 & 7 & 5 & 5 & 5 & 8 & 8 & 2 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 5 & 7 & 7 & 5 & 7 & 5 & 5 & 8 & 8 & 8 & 2 & 8 & 8 & 8 \\ 5 & 5 & 7 & 7 & 5 & 7 & 5 & 8 & 8 & 8 & 8 & 2 & 8 & 8 \\ 5 & 5 & 5 & 7 & 7 & 5 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 2 & 8 \\ 7 & 5 & 5 & 5 & 7 & 7 & 5 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

5 実験の手順

計算実験には、主に、GAP-システム [2] を使用した。G : GAP-システムのデータにある置換群として、G と同型な orbit 2個をもつ置換群 $H = \{(g, g^{\sigma})|g \in G\}$ を構成するため AutomorphismGroup(G) を計算する。それに関連して、昨年度に引き続き、下の計算も使用した。

InnerAutomorphismsAutomorphismGroup ：

AutomorphismGroup のなかで、自明な coherent configuration を与えることが分かっている部分群

RightTransversal ：

AutomorphismGroup のなかで、自明でない coherent configuration を与える可能性のあるものの代表 (IsConjugatorIsomorphism で、自明かどうかを判別できる)

SubdirectProduct(G, G, id, σ) ：

id は恒等写像、$\sigma \in$RightTransversal で orbit 2個の群 H を構成

CC(H) の relation matrix 計算、Aut(CC(H)) の計算は、発表者が association scheme の計算のときに作成したプログラム [3] を使用した。

5.1 本年度の計算実験について

AutomorphismGroup の計算：
$|\Omega| \geq 20$ では、GAP の AutomorphismGroup 計算に困難な場合がでてくる。
Magma[1] も使用して、AutomorphismGroup 計算を行った。
Magma は、AutomorphismGroup のデータベースを作って利用している。

GAP は、例えば、Aut(Sym(n))=Sym(n) ($n \neq 6$) と知られているが、これを使わないで、直接計算をしているらしく、この場合では小さい n で、すぐに計算が困難になる。

RightTransversal の計算：
発表では時間の都合で省略したことであるが、RightTransversal で現れる coset の個数が非常に少なくても、計算が終わらない場合が出てくる。そこで、IsConjugatorIsomorphism を判定条件とする coset enumeration を実行するプログラムを作成して利用した。coset の個数が 100 位までは、困難なく計算できる。

6 実験結果

G を GAP-システムのデータにある群とする。
$H = \{(g, g^{\sigma}) | g \in G\}$ ($\sigma \in$Aut(G))
H の orbit から coherent configurationCC(H) を relation matrix として求め、**Aut(CC(H))** を計算して、元の群 **G** と比較することを行った。
$G \subsetneq$Aut(AS(G)) となるが、その中で特に、Aut(CC(H))$\cong G$ となる場合を探してみた。

6.1 TransitiveGroup のデータを使った場合

$G =$TransitiveGroup(n, k), $n = |\Omega|$

TransitiveGroup の個数

$\|\Omega\|$	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
個数	10	983	8	1117	164	59	7	25000	211	96	2392	1854	8	5712
自己同型群として得られる群の個数														
AS	5	93	6	95	32	16	4	669	32	24	122	124	6	228
(as)	·	95	7	·	·	·	22	750	45	34	502	185	26	243
CC	0	35	0	23	6	3	0	469	6	4	65	$\geq$42	0	39

AS : Aut(AS(G)) $= G$ となる G の個数
CC : Aut(CC(H)) $\cong G$ かつ Aut(AS(G)) $\neq G$ となる G の個数
(as) : association scheme の個数 [3]

6.2 PrimitiveGroup を使った実験：orbit の個数が少ない場合

G =PrimitiveGroup(n,k) を使って、n が、少し、大きい場合を実験した。$\Omega\times\Omega$ 上 orbit2 個、$\Omega\times\Omega'$ 上 orbit2 個が、orbit 数が最小の自明でない場合となる。この場合は、symmetric design となり、群から作られるものは分類 [6] が知られている。($\Leftarrow$ 有限単純群の分類の応用) AS(G) は自明な association scheme となる。

$\Omega\times\Omega$ 上 orbit3 個、$\Omega\times\Omega'$ 上 orbit2 個：strongly regular design と呼ばれている。

一般の、群の関与は無しの場合で、研究結果 [5] がある。

得られた実例をいくつか示す。AS(G) は Ω^2 上の strongly regular graph になる。作られた coherent configuration CC は、どの例も、$Aut(CC)\cong G\subsetneq Aut(AS(G))$ となり、design と graph では、自己同型群が異なる。

G	$\|\Omega\|$(次数)	$\|Aut(\mathsf{CC})\|$	$Aut(\mathsf{AS}(G))$	$\|Aut(\mathsf{AS}(G)):G\|$
$G(2,3)$	351	4245696	$PSO(7,3)$	2160
$\mathsf{Alt}(9)$	120	181440	$PSO^+(8,2)$	1920
$O^+(8,2)$	135	174182400	$PSO^+(8,2)$	2

7 群から作られない例の構成：fusion scheme

【Example】 G =PrimitiveGroup$(360,16)\cong Alt(6)^2.2^3$

G の $\Omega\times\Omega$ 上の orbit の個数 5 個、Aut(AS(G)) $\cong G$

SubdirectProduct のうちの 2 個、H および K とする。

- $H=\{(g,g^\sigma)|g\in G\}\cong G$、$\Omega\times\Omega'$ 上 orbit 数 3 個
- $K=\{(g,g^{\sigma'})|g\in G\}\cong G$、$\Omega\times\Omega'$ 上 orbit 数 2 個

本発表の coherent configuration の行列表示について

$$\begin{array}{c} \\ 1\\ \vdots\\ n\\ 1'\\ \vdots\\ n' \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & \cdots & n & 1' & \cdots & n' \end{array}\\ \begin{pmatrix} \Omega^2 & \Omega\times\Omega' \\ \Omega'\times\Omega & \Omega'^2 \end{pmatrix}\end{array}$$

Aut(CC) の action：

$\Omega^2=\Omega'^2$

$\Omega'\times\Omega={}^t(\Omega\times\Omega')$

CC(H) について：Aut(CC(H))$=H\cong G$

- H の $(\Omega\cup\Omega')^2$ 上の orbit 数は $(5+3)\times 2=\mathbf{16}$ 個
- CC(H) は、A_1,A_2,$\cdots$,A_{16} からなる。
- A_1,A_3,A_4,A_5,A_6 の entry $1\subset\Omega^2$、これらが AS(G) を構成している。
- 同様に、A_2,A_{13},A_{14},A_{15}, $A_{16}\subset\Omega'^2$、これらも AS(G) になる。
- A_7,A_9,$A_{11}\subset\Omega\times\Omega'$, ${}^tA_7=A_8$,${}^tA_9=A_{10}$,${}^tA_{11}=A_{12}\subset\Omega'\times\Omega$

CC(K) について：Aut(CC(K))$=K\cong G$

- K の $(\Omega\cup\Omega')^2$ 上の orbit 数は $(5+2)\times 2=\mathbf{14}$ 個

$H \cong K \cong G$ であるが、permutation group としては、$H \not\cong K$

【**fusion scheme** の構成】

CC(H) から、A_1,A_2,$\cdots$,A_6,A_7+A_9, A_8+A_{10},A_{11},$\cdots$,A_{16} は coherent configuration となる。CC$'$ とおく。Aut(CC$'$)= H、したがって、特に、CC$'$ は群からは作られない。

これら **14** 個の行列の entry1 の個数は、CC(K) の行列と一致している。

CC$_1$: CC(H) において、

A_1,A_2,A_3+A_4,A_5,A_6,A_7+A_9, A_8+A_{10},A_{11},A_{12},$A_{13}+A_{14}$, A_{15},A_{16} も coherent configuration となる。これを CC$_1$ とする。Aut(CC$_1$)= H。

CC$_2$: CC(K) は、A'_1,A'_2,$\cdots$,A'_{14} からなるとして、

A'_1,A'_2,$A'_3+A'_4$,A'_5,A'_6,A'_7,$\cdots$, A'_{10},$A'_{11}+A'_{12}$,A'_{13},A'_{14} は coherent configuration となる。これを CC$_2$ とする。Aut(CC$_2$) $= K$。

$\Longrightarrow$CC$_1$、CC$_2$ は群からは作られない。

Aut(CC$_1$)= $H \not\cong K$ =Aut(CC$_2$) より、CC$_1$ $\not\cong$CC$_2$

CC$_1$、CC$_2$ の 12 個の行列は、それぞれ、entry1 の個数が一致する。

【Remark】

AS(G) の行列は、上の記号で、A_1,A_3,A_4,A_5,A_6 になるが、A_1,A_3+A_4,A_5,A_6 は、association scheme の fusion scheme になっている。

【Example】 G =PrimitiveGroup(369,3) $\cong$PSigmaL(2, 81) 同様の例。G は Ω^2 上、orbit5 個

$H = \{(g, g^\sigma)|g \in G\}$ は $\Omega \times \Omega'$ 上、orbit3 個

fusion scheme で、Ω^2 と Ω'^2 において、AS(Ω^2) $\not\cong$AS(Ω'^2) となるものもある。

fusion scheme を作っても、それが別の群の作る association scheme や coherent configuration となる場合は多くある。ある群の部分群が作る scheme の fusion scheme が、全体の群の作る scheme になる場合などである。

【Example】 G =PrimitiveGroup(364,5)$\cong$ G(2,3)

Aut(AS(G))=G(2,3)

AS(G) の行列、A_1,A_2,A_3,A_4。(各行列の 1 の個数 $[364, 39312, 88452, 4368]$)

fusion scheme A_1,A_2+A_4,A_3。(AS で表す)

Aut(AS)= PrimitiveGroup(364,4)$\cong$ PSO(7, 3)、この群の作る AS になる。

特に、G(2,3) は PSO(7,3) の subgroup となる。

【Example】 G =TransitiveGroup$(6, 6)$

最初の例で示した fusion scheme は TransitiveGroup$(6, 11)$ の作る AS になる。

参　考　文　献

[1] W. Bosma, J. Cannon, and C. Playoust, The Magma algebra system. I. The user language, J. Symbolic Comput., 24 (1997), 235-265.

[2] The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.8.10; 2018. (https://www.gap-system.org)

[3] A. Hanaki and I. Miyamoto, Classification of association schemes with small vertices, published at WWW (1999∼): http://math.shinshu-u.ac.jp/˜hanaki/as.

[4] D. G. Higman, Coherent Algebras, Linear Algebra and its Applications **93** (1987) 209-239.

[5] D. G. Himgam, Strongly Regular Designs and Coherent Configurations of Type $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ & 3 \end{bmatrix}$, Europ. J. Combinatorics **9** (1988) 411-422

[6] W. M. Kantor, Classification of 2-Transitive Symmetric Designs, Graphs and Combinatorics **1** (1985) 165-166.