# 円内接八角形の外接円半径公式の計算結果について
# Results of the Computations for the Circumradius Formula for Cyclic Octagons (Extended Abstract)


森継 修一

Shuichi Moritsugu*

筑波大学図書館情報メディア系

Faculty of Library, Information and Media Science, University of Tsukuba †



**Abstract**

This paper reports the results of computing the circumradius formula for cyclic octagons given by the lengths of the sides. Continuing with the author's recent paper in 2018, we have finally succeeded in computing all the coefficients of the octagon formula, which has 845,027 terms in the form of elementary symmetric polynomials. In this study, we have newly applied the method of numerical interpolation, adding to the method of elimination by resultants. We have found out that traditional modular algorithms are also effective in our problems for solving system of linear equations over the integers.


## 1 はじめに

本研究の詳細について別途投稿を予定しているため，本稿ではその要約を Extended Abstract の形で記述する．円内接多角形問題とは，

「円に内接する $n$ 角形の各辺の長さ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が与えられたとき，その $n$ 角形の面積 $S$ および外接円の半径 $R$（さらにそれらの関係）を $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の式で表せ.」

という古典的な幾何学の問題 [4] である．本講演では，2017 年 12 月の研究会以降の研究の進捗に関して，特に八角形の外接円半径公式の全項の確定に成功したことについて報告を行った．

現代数学では，長年未解決だった $n = 5, 6$ に対する面積公式を Robbins [8] が発見 (1994 年) して以来，面積公式に関する研究 [1][2][6][7][9][10] が数多く存在する．一方で，半径公式の計算に本格的に取り組み，$n = 6, 7$ の場合の具体的な形が導かれたのは，筆者の論文 [3] が初めて (2011 年) である．半径公式の計算は，単純には終結式の計算に帰着されるため，面積公式の問題に比べて研究対象として着目されてこなかった面もあると思われる．すなわち，円に内接する $n + 1$ 角形を共通の外接円をもつ $n$ 角形と三角形に対角線 $d$ で分割すれば，半径公式は次の関係から帰納的に導くことができる．

$$f_{n+1}(a_1, \ldots, a_{n+1}; R^2) := \mathrm{Res}_d \left( f_n(a_1, \ldots, a_{n-1}, d; R^2), f_3(d, a_n, a_{n+1}; R^2) \right) / (R^2)^{\ell} \tag{1}$$


*moritsug@slis.tsukuba.ac.jp



†本研究は科研費 (25330006) の助成を受けたものである．また，国際共同利用・共同研究拠点である京都大学数理解析研究所からも支援を受けている．

ただし，冗長な因子 $R^2$ の指数 $\ell$ は，そのときの式の立て方に依存し，実際には，$f_{n+1}$ を因数分解して正しい因子を取り出すなどの処理が必要で，その手順を一つの漸化式で記述することは困難である．

さらに，数式処理システムを用いた実際の計算では，円内接六角形・七角形においても，終結式のための立式の工夫や基本対称式表現への変換アルゴリズムの改良が必要であり，円内接八角形の場合に全項を展開した形で求めるには，膨大な CPU 時間を必要とすることが予想された [5]．一方で，その過程において，半径公式各項の全次数についての規則性が判明し，数値補間による計算法の可能性が浮上した．よって，本研究では以下の２つの方法の組み合わせを用いて計算を実行した．

(i) 終結式から $(R^2)^k$ $(k = 0, \ldots, 38)$ の各係数多項式を展開・整理する．

(ii) $(R^2)^k$ の各係数に現れる単項式を想定し，数値補間により未定係数を求める．

結果として，最終的に円内接八角形の外接円半径公式（基本対称式表現）の全項の導出に成功した．

$$\begin{aligned} F_8^{(+)}(s_i;\, y) &= \tilde{P}_{38}y^{38} + \tilde{P}_{37}y^{37} + \cdots + \tilde{P}_1 y + \tilde{P}_0 \qquad (845{,}027\text{ 項}) \\ &\qquad\qquad (y = R^2, \quad \tilde{P}_i \in \mathbf{Z}[s_1, \ldots, s_7, \sqrt{s_8}]) \end{aligned} \tag{2}$$

ただし，$s_1 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_8^2$, $s_2 = a_1^2a_2^2 + \cdots$, $\cdots$, $s_7 = a_1^2 \cdots a_7^2 + \cdots$, $\sqrt{s_8} = a_1 \cdots a_8$ を表す．この式は，これまでに具体的に計算されたことがなかったと見られる．

## 2 Robbins の定理と外接円半径公式 $(n = 3 \sim 7)$ の形状

外接円半径 $R$ に対し，$y = R^2$ の定義多項式 $\Phi_n(a_i;\, y)$ の次数は，Robbins [8] によって予想が示され，のちに証明されて定理となった．

$$k_m := \frac{2m+1}{2}\begin{pmatrix} 2m \\ m \end{pmatrix} - 2^{2m-1} = \sum_{j=0}^{m-1}(m-j)\begin{pmatrix} 2m+1 \\ j \end{pmatrix} \tag{3}$$

とおくと，$k_i := 1, 7, 38, 187, 874, \ldots\, (i = 1, 2, 3, 4, \ldots)$ という数列が得られる．このとき，半径公式 $\Phi_n(a_i; y)$ の次数は以下の関係をみたしている．

- $\Phi_{2m+1}(a_i;\, y)$ における $y$ の次数は $k_m$
- $\Phi_{2m+2}^{(\pm)}(a_i;\, y)$ における $y$ の次数は $2k_m$ であり，$\Phi_{2m+2}^{(\pm)}$ は 2 つの多項式 $\Phi_{2m+2}^{(+)}$, $\Phi_{2m+2}^{(-)}$ (それぞれ $k_m$ 次) の積に因数分解される．

### 2.1 三角形 $(n = 3)$ の外接円半径

3 辺の長さが $a_1$, $a_2$, $a_3$ の三角形の外接円半径 $R$ を与える古典的な Heron の公式 (紀元 1 世紀) を多項式の形で表現し，$y := R^2$ とおいたもの

$$\Phi_3(a_1, a_2, a_3;\, y) := \left(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 - 2(a_1^2a_2^2 + a_2^2a_3^2 + a_3^2a_1^2)\right) y + a_1^2a_2^2a_3^2 \tag{4}$$

を半径公式の “辺長表現” とよぶ．この式は $a_i^2$ に関する対称式になっているため，基本対称式 $s_1 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, $s_2 = a_1^2a_2^2 + a_2^2a_3^2 + a_3^2a_1^2$, $s_3 = a_1^2a_2^2a_3^2$ を用いて書き換えたものを “基本対称式表現” とよぶ．

$$F_3(s_1, s_2, s_3;\, y) := (s_1^2 - 4s_2)y + s_3 \tag{5}$$

### 2.2 円内接四角形 $(n = 4)$ の外接円半径

円内接四角形に対する Brahmagupta の公式 (紀元 7 世紀) を多項式で表現し，$n = 4$ (凸な場合) の外接円半径公式を次の式で定義する．

$$\begin{aligned}\Phi_4^{(+)}(a_i;\, y) := \big((a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4) - 2(a_1^2a_2^2 + a_1^2a_3^2 + a_1^2a_4^2 + a_2^2a_3^2 + a_2^2a_4^2 + a_3^2a_4^2) - 8a_1a_2a_3a_4\big)\, y \\ + (a_1^2a_2^2a_3^2 + a_1^2a_2^2a_4^2 + a_1^2a_3^2a_4^2 + a_2^2a_3^2a_4^2) + (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)a_1a_2a_3a_4\end{aligned} \tag{6}$$

さらに，$a_i^2$ に関する基本対称式表現に変換する．$s_1 = a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2$, $s_2 = a_1^2a_2^2+\cdots$, $s_3 = a_1^2a_2^2a_3^2+\cdots$ とし，$n$ が偶数の場合は，$s_4 = a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2$ に対して $\sqrt{s_4} = a_1a_2a_3a_4$ を補助的に用いる．

$$F_4^{(+)}(s_i;\, y) := (s_1^2 - 4s_2 - 8\sqrt{s_4})y + (s_3 + s_1\sqrt{s_4}) \tag{7}$$

円内接四角形が “凸でない” 場合は，$a_4 := -a_4$ あるいは $\sqrt{s_4} := -\sqrt{s_4}$ を代入すればよい．

$$\begin{cases} \Phi_4^{(-)}(a_1, a_2, a_3, a_4;\, y) := \Phi_4^{(+)}(a_1, a_2, a_3, -a_4;\, y) \\ F_4^{(-)}(s_i;\, y) := (s_1^2 - 4s_2 + 8\sqrt{s_4})y + (s_3 - s_1\sqrt{s_4}) \end{cases} \tag{8}$$

さらに，*crossing parity* $\varepsilon$ [8][2] の概念を導入する．$n = 3, 4$ の場合には，三角形 $(\varepsilon = 0)$, 凸四角形 $(\varepsilon = +1)$, 非凸四角形 $(\varepsilon = -1)$ を表すものとすると，定義多項式 (5)(7)(8) は，以下のひとつの式で表される．

$$F_{3,4}(s_i;\, y) := (s_1^2 - 4s_2 - \varepsilon \cdot 8\sqrt{s_4})y + (s_3 + \varepsilon \cdot s_1\sqrt{s_4}) \tag{9}$$

### 2.3 円内接五角形 $(n = 5)$ の外接円半径

辺長 $\{a_1, \ldots, a_5\}$ をもつ円内接五角形を，長さ $d$ の対角線により $\{a_1, a_2, a_3, d\}$ の四角形と $\{d, a_4, a_5\}$ の三角形に分割する．これらは外接円を共通にもつので，以下の終結式により $d$ を消去する．

$$\begin{aligned}\Phi_5(a_i;\, y) \;&:=\; \mathrm{Res}_d(\Phi_4^{(+)}(a_1, a_2, a_3, d;\, y),\ \Phi_3(d, a_4, a_5;\, y))/y \\ &=\; A_7y^7 + A_6y^6 + A_5y^5 + A_4y^4 + A_3y^3 + A_2y^2 + A_1y + A_0 \qquad (2{,}922\ 項) \\ &\qquad\qquad \big(y = R^2,\quad A_i \in \mathbf{Z}[a_1^2, \ldots, a_5^2]\big)\end{aligned} \tag{10}$$

和算では，建部賢弘「研幾算法」(1683 年) および井関知辰「算法発揮」(1690 年) による結果が知られているが，現代数学で公式を明示的に求めた報告は Pech [7], Robbins [8] まで見られないようである．

式 (10) の場合も，基本対称式 $s_1 = a_1^2 + \cdots + a_5^2$, …, $s_5 = a_1^2 \cdots a_5^2$ による表現に変換される．

$$\begin{aligned}F_5(s_i;\, y) \;&=\; \tilde{A}_7y^7 + \tilde{A}_6y^6 + \cdots + \tilde{A}_1y + \tilde{A}_0 \qquad (81\ 項) \\ &\qquad (y = R^2,\quad \tilde{A}_i \in \mathbf{Z}[s_1, \ldots, s_5])\end{aligned} \tag{11}$$

### 2.4 円内接六角形 $(n = 6)$ の外接円半径

円内接六角形の半径公式は，凸六角形を 2 つの凸四角形に分割した場合を想定し，終結式で対角線の長さを消去することで得られる．

$$\begin{aligned}\Phi_6^{(+)}(a_i;\, y) \;&:=\; \mathrm{Res}_d(\Phi_4^{(+)}(a_1, a_2, a_3, d;\, y),\ \Phi_4^{(+)}(d, a_4, a_5, a_6;\, y))/y \\ &=\; B_7y^7 + B_6y^6 + \cdots + B_1y + B_0 \qquad (19{,}449\ 項) \\ &\qquad \big(y = R^2,\quad B_i \in \mathbf{Z}[a_1, \ldots, a_6]\big)\end{aligned} \tag{12}$$

基本対称式 $s_1=a_1^2+\cdots+a_6^2,\ \ldots,\ s_5=a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2a_5^2+\cdots,\ \sqrt{s_6}=a_1\cdots a_6$ を用いた表現は

$$\begin{aligned} F_6^{(+)}(s_i;\,y) &= \tilde{B}_7y^7+\tilde{B}_6y^6+\cdots+\tilde{B}_1y+\tilde{B}_0 \qquad (224\text{ 項}) \\ & \qquad\qquad\qquad (\tilde{B}_i\in\mathbf{Z}[s_1,\ldots,s_5,\sqrt{s_6}]) \end{aligned} \tag{13}$$

凸六角形を含まないグループに対する式は，$a_6:=-a_6$ あるいは $\sqrt{s_6}:=-\sqrt{s_6}$ を代入して，

$$\Phi_6^{(-)}(a_1,\ldots,a_5,a_6;\,y):=\Phi_6^{(+)}(a_1,\ldots,a_5,-a_6;\,y) \tag{14}$$

$$F_6^{(-)}(s_1,\ldots,s_5,\sqrt{s_6};\,y):=F_6^{(+)}(s_1,\ldots,s_5,-\sqrt{s_6};\,y) \tag{15}$$

で与えられる．また，$n=6$ の式において $a_6:=0$ とおけば $n=5$ の式に等しくなるので，$F_5,\ F_6^{(+)},\ F_6^{(-)}$ は，式 (9) と同様に，crossing parity $\varepsilon$ を用いてひとつの多項式 $F_{5,6}(s_1,\ldots,s_5,\varepsilon\sqrt{s_6};\,y)$ で表される．

### 2.5 円内接七角形 ($n=7$) の外接円半径

円内接七角形を対角線 $d$ で「五角形＋四角形」に分割し，対角線 $d$ を終結式により消去すればよいが，使用するコンピュータの能力では単純に計算することは不可能である．種々の工夫 [5] を試した結果，展開した形の半径公式，および基本対称式 $s_1=a_1^2+\cdots+a_7^2,\ \ldots,\ s_7=a_1^2\cdots a_7^2$ による表現が得られた．

$$\begin{aligned} \Phi_7(a_i;\,y) &:= \mathrm{Res}_d(\Phi_5(a_1,a_2,a_3,a_4,d;\,y),\ \Phi_4^{(+)}(d,a_5,a_6,a_7;\,y))/y^6 \\ &= C_{38}y^{38}+\cdots+C_1y+C_0 \qquad (337{,}550{,}051\text{ 項}) \\ & \qquad\qquad \left(y=R^2,\quad C_i\in\mathbf{Z}[a_1^2,\ldots,a_7^2]\right) \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} F_7(s_i;\,y) &= \tilde{C}_{38}y^{38}+\cdots+\tilde{C}_1y+\tilde{C}_0 \qquad (199{,}695\text{ 項}) \\ & \qquad (y=R^2,\quad \tilde{C}_i\in\mathbf{Z}[s_1,\ldots,s_7]) \end{aligned} \tag{17}$$

円内接七角形に対して，外接円半径の辺長表現 $\Phi_7(a_i;\,y)$ とその基本対称式表現 $F_7(s_i;\,y)$ を明示的に報告した例は，現在でも他に見られないようである．

## 3 円内接八角形 ($n=8$) の外接円半径の計算法 (その１)

### 3.1 終結式の展開による方法

終結式による計算の場合，凸八角形を「凸六角形＋凸四角形」に分割し，$y(=R^2)$ の 38 次式を求める方法が最も現実的 [5] と考えられた．

$$\Phi_8^{(+)}(a_i;\,y):=\mathrm{Res}_d(\Phi_6^{(+)}(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,d;\,y),\ \Phi_4^{(+)}(d,a_6,a_7,a_8;\,y))/y^6 \tag{18}$$

ただし，結果のサイズから見て，直接計算することは不可能なので，以下のステップに分割して終結式を展開する．最初に，2 つの多項式を消去対象である対角線 $d$ について整理する．($\Phi_6^{(+)}$ は 19,449 項からなる．)

$$\left\{\begin{aligned} \Phi_6^{(+)}(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,d;\,y) &= y^7d^{16}-a_1a_2a_3a_4a_5y^5d^{15}+u_{14}d^{14}+\cdots+u_1d+u_0 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (u_j\in\mathbf{Z}[a_1,\ldots,a_5,y]) \\ \Phi_4^{(+)}(d,a_6,a_7,a_8;\,y) &= yd^4+a_6a_7a_8d^3+(\cdots)d^2+(\cdots)d+(\cdots) \qquad (19\text{ 項}) \end{aligned}\right. \tag{19}$$

次に，$u_0,u_1,\ldots,u_{14}$ を新たな単独の変数とみて，これらの多項式の終結式を計算し，中間結果を得る．

$$R(u_0,u_1,\ldots,u_{14},a_1,\ldots,a_8;\,y):=\mathrm{Res}_d(\Phi_6^{(+)},\Phi_4^{(+)}) \tag{20}$$

次に，各 $u_j$ に対し $\Phi_6^{(+)}$ における元の係数 $u_j(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, y)$ を代入し，$y$ についての多項式として整理する．この時点では，各係数 $\bar{P}_i$ は Maple の内部表現で "作成されたまま" の状態で保持されている．

$$\bar{R}(a_1, \ldots, a_8;\, y) = \bar{P}_{38}y^{44} + \cdots + \bar{P}_0 y^6 \tag{21}$$

最後に，各係数多項式 $\bar{P}_i$ を展開・整理することができれば，多項式 $\Phi_8^{(+)}(a_i;\, y)$ が得られる．これまでに展開が完了している部分は，より大きなサイズの係数 $P_{27}, \ldots, P_{15}$ を除いて，以下のとおりである．

$$\Phi_8^{(+)}(a_i;\, y) = P_{38}y^{38} + \cdots + P_{28}y^{28} + \left(\bar{P}_{27}y^{27} + \cdots + \bar{P}_{15}y^{15}\right) + P_{14}y^{14} + \cdots + P_0 \tag{22}$$

各係数 $\bar{P}_i$ の展開には大きなメモリ空間が必要 (現在は 256GB 使用) になるため，全体の計算を多数の小さい問題に分割する必要があり，残りの係数 $P_{27}, \ldots, P_{15}$ を求めることは容易ではない．辺長表現による係数 $P_i$ が求まったものについては，基本対称式表現 $\tilde{P}_i$ への変換 [5] に成功している．

$$F_8^{(+)}(s_i;\, y) = \tilde{P}_{38}y^{38} + \cdots + \tilde{P}_{28}y^{28} + \left(\bar{P}_{27}y^{27} + \cdots + \bar{P}_{15}y^{15}\right) + \tilde{P}_{14}y^{14} + \cdots + \tilde{P}_0 \tag{23}$$

### 3.2 半径公式の形状の解析

辺長の 2 乗 $a_i^2$ からなる積の全次数 (t-deg)，および基本対称式表現の単項式の全次数を以下で定義する．

$$\text{t-deg}\left(a_1^{2m_1}a_2^{2m_2}\cdots a_n^{2m_n}\right) := m_1 + m_2 + \cdots + m_n \tag{24}$$

$$\text{t-deg}\left(s_1^{m_1}s_2^{m_2}\cdots s_n^{m_n}\right) = m_1 + 2m_2 + \cdots + nm_n \tag{25}$$

特に，$n$ が偶数の場合には，$\sqrt{s_n} = a_1a_2\cdots a_n$ の全次数を $\text{t-deg}(\sqrt{s_n}) = n/2$ で定義する．

次数の分布は規則的なので，展開形が未計算の係数 $\tilde{P}_i$ $(i = 14, \ldots, 27)$ の形状を事前に予想することが可能である [5]．例えば，$\tilde{P}_{20}$ は t-deg=50, $\sqrt{s_8}$ について 12 次となり，次の形で表されると予想される．

$$\tilde{P}_{20} = u_0(s_1, \ldots, s_7) + u_1(s_1, \ldots, s_7)\sqrt{s_8} + \cdots + u_{12}(s_1, \ldots, s_7)\sqrt{s_8}^{12} \tag{26}$$

ここで，$u_j$ は，$\text{t-deg}(u_j) = 50 - 4j \quad (j = 0, \ldots, 12)$ をみたすような同次式である．特に，$u_0(s_1, \ldots, s_7)$ は，七角形の半径公式 (17) における $F_7(s_i;\, y)$ の中の係数 $\tilde{C}_{20}$ と一致しているはずである．

## 4 円内接八角形 ($n = 8$) の外接円半径の計算法 (その２)

### 4.1 数値補間 (未定係数法) による計算の原理とその改良

基本対称式表現による半径公式 (23) における $y^d$ $(0 \le d \le 38)$ の係数 $\tilde{P}_d(s_i)$ を以下の手順で求める．まず，辺長表現による半径公式 $\Phi_6^{(+)}(a_i; y), \Phi_4^{(+)}(a_i; y)$ に対し，整数値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_8$ を代入した状態での終結式

$$\Phi_8^{(+)}(\alpha_i;\, y) := \mathrm{Res}_d(\Phi_6^{(+)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_5, d;\, y),\ \Phi_4^{(+)}(d, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8;\, y))/y^6 \tag{27}$$

を計算したとき，その結果における $y^d$ の係数を $w(\alpha_i)$ で表すこととする．

1. $e_1 + 2e_2 \cdots + 7e_7 + 4e_8 = 70 - d$ をみたす値の組 $(e_1, \ldots, e_7, e_8)$ を $0 \le e_j \le (70 - d)/j$ の範囲ですべて探す．($N$ 個見つかったとする．)

2. 対応する単項式 $m_k = s_1^{e_1} \cdots s_7^{e_7}\sqrt{s_8}^{e_8}$ $(k = 1, \ldots, N)$ を生成する．$m_k$ は，$a_i$ の関数ともみなせる．未定係数 $c_1, \ldots, c_N$ を用いて，$f(a_i) = c_1m_1 + \cdots + c_Nm_N$ とおく．

3. ランダムな整数値の組 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_8)$ を選び，$f(a_i)$ に代入する一方，式 (27) にしたがい $w(\alpha_i)$ を求めると，$c_1, \ldots, c_N$ を未知数とする整数係数 $N$ 元 1 次方程式 $f(\alpha_i) = w(\alpha_i)$ が得られる．

4. $\alpha_i$ とは別の整数値の組 $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_8)$ を選んで，同様にして $f(\alpha'_i) = w(\alpha'_i)$ を求める．十分に "独立な" 整数値を計 $N$ 組選び，結果を連立させれば，整数係数の $N$ 元連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が得られる．

5. 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x} = [\gamma_1, \ldots, \gamma_N]^T$ により，求める係数は $\tilde{P}_d(s_i) = \gamma_1 m_1 + \cdots + \gamma_N m_N$．(係数行列が正則であることを確認しておく．)

この方法では，単項式の全次数 $(70 - d)$ が大きくなると，候補の単項式の個数が増大して行列のサイズ $N$ がより大きくなり，式 (23) で計算が完了していない項 $\tilde{P}_{27}, \ldots, \tilde{P}_{15}$ をすべて求めることは困難であることが判明した．そこで，以下に示す 3 つの改良を加えた．(ここでは $d = 20$ の場合の概略を例示する．)

(i) $F_8^{(+)}(s_i;\, y)$ において，$\sqrt{s_8} := 0$ とおいたものが $F_7(s_i;\, y)$ であることを利用する．
 式 (26) に対して，全候補は 50,393 項存在するが，$F_7$ における $y^{20}$ の係数 (9,577 項) が計算済みであることから，1 次以上の $\sqrt{s_8}$ を含む項のみ求めれば，対象は 32,255 項となる．

(ii) モジュラー計算による前処理で，出現しない単項式を事前に排除する．
 32,255 元の整数係数連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に対し，$\bmod\ p$ での解 $\boldsymbol{x} = [\ldots, \star, 0, \star, \ldots, \star, 0, 0, \ldots]^T$ を求める．0 に対応する単項式は実際には出現しない確率が高いので，候補は 24,713 項となる．

(iii) 連立 1 次方程式の解法にモジュラー算法と中国式剰余定理を適用する．
 $24,713$ 元の整数係数連立一次方程式 $A'\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}'$ にモジュラー算法を適用して解いたうえで，中国式剰余定理により整数上の解を復元した．64bit 整数の範囲で計算して，$\tilde{P}_{20}$ は素数 2 個 で復元された．

## 4.2 数値補間による計算結果

| 次数 $(y)$ | 候補の全単項式 | 実際の出現項数 | 項数 $(F_7)$ | 項数 $(F_8^{(+)})$ |
|---:|---:|---:|---:|---:|
| 15 | 56,062 | 32,260 | 8,792 | 41,052 |
| 16 | 50,393 | 31,278 | 9,291 | 40,569 |
| 17 | 45,167 | 29,890 | 9,622 | 39,512 |
| 18 | 40,464 | 28,288 | 9,772 | 38,060 |
| 19 | 36,134 | 26,531 | 9,745 | 36,276 |
| 20 | 32,255 | 24,713 | 9,577 | 34,290 |
| 21 | 28,692 | 22,863 | 9,343 | 32,206 |
| 22 | 25,514 | 21,040 | 9,062 | 30,102 |
| 23 | 22,600 | 19,258 | 8,714 | 27,972 |
| 24 | 20,014 | 17,533 | 8,326 | 25,859 |
| 25 | 17,648 | 15,862 | 7,929 | 23,791 |
| 26 | 15,561 | 14,289 | 7,502 | 21,791 |
| 27 | 13,654 | 12,786 | 7,039 | 19,825 |

表 1: 数値補間によって新たに求められた係数の形状

以上の工夫により，係数 $\tilde{P}_{38}, \ldots, \tilde{P}_{11}$ の計算に成功した．今回新たに求められた項の形状について，表 1 に示す．なお，項数 $(F_8^{(+)})$ = 実際の出現項数 (行列サイズ) + 項数 $(F_7)$ という関係になっている．

## 5　まとめと今後の課題

円内接八角形の外接円半径公式 $F_8^{(+)}(s_i;\, y)$ の計算に初めて成功し，$n = 7, 8$ の場合が完全に解決した．

1. 終結式の展開による方法では，39 個中 26 個の係数 ($\tilde{P}_{38}, \ldots, \tilde{P}_{28}$ および $\tilde{P}_{14}, \ldots, \tilde{P}_0$) の計算に成功した．その結果をもとに半径公式における全次数の分布を解析し，残りの係数の形状を推測した．
2. 数値補間 (未定係数法) による計算により，終結式では得られていない 13 個 ($\tilde{P}_{27}, \ldots, \tilde{P}_{15}$) を含めて，係数 $\tilde{P}_{38}, \ldots, \tilde{P}_{11}$ の計算に成功した．
3. 以上を総合して，円内接八角形の外接円半径公式は，基本対称式表現で 845,027 項であることが確定し，その具体的表現も求められた．これらに対し，ランダムな数値の代入による方法の他，等辺の場合に以下の式をみたすことにより，正当性を確かめた．

$$F_8^{(+)}(y) = \begin{cases} 2^{35}(2y-1)^{28}(3y-1)^8(2y^2-4y+1) & (a_1 = \cdots = a_8 = 1) \\ 0 & (a_1 = \cdots = a_7 = 1,\ a_8 = -1) \end{cases} \tag{28}$$

今後の課題としては，数値補間では残りの $\tilde{P}_{10}, \ldots, \tilde{P}_0$ が計算困難であることが挙げられる．これは，実際に出現する単項式は減少していくにも関わらず，可能性のある単項式が単調増加していくためである．例えば，$\tilde{P}_{11}$ では 84,714 個 であるが，$\tilde{P}_0$ では 235,516 個であり，候補となる単項式を事前に絞り込む基準を見つけないと，単純な計算は実行困難である．

## 参　考　文　献


[1] Fedorchuk, M. and Pak, I.: Rigidity and Polynomial Invariants of Convex Polytopes, *Duke Math. J.*, **129**(2), 2005, 371–404.

[2] Maley, F. M., Robbins, D. P., and Roskies, J.: On the Areas of Cyclic and Semicyclic Polygons, *Advances in Applied Mathematics*, **34**(4), 2005, 669–689.

[3] Moritsugu, S.: Computing Explicit Formulae for the Radius of Cyclic Hexagons and Heptagons, *Bulletin of Japan Soc. Symbolic and Algebraic Computation*, **18**(1), 2011, 3–9.

[4] Moritsugu, S.: Integrated Circumradius and Area Formulae for Cyclic Pentagons and Hexagons, *ADG 2014* (Botana, F. and Quaresma, P., eds.), *LNAI*, **9201**, Springer, 2015, 94–107.

[5] Moritsugu, S.: Computation and Analysis of Explicit Formulae for the Circumradius of Cyclic Polygons, *Communications of JSSAC*, **3**, 2018, 1–17.

[6] Pak, I.: The Area of Cyclic Polygons: Recent Progress on Robbins' Conjecture, *Advances in Applied Mathematics*, **34**(4), 2005, 690–696.

[7] Pech, P.: Computations of the Area and Radius of Cyclic Polygons Given by the Lengths of Sides, *ADG2004* (Hong, H. and Wang, D., eds.), *LNAI*, **3763**, Gainesville, Springer, 2006, 44–58.

[8] Robbins, D. P.: Areas of Polygons Inscribed in a Circle, *Discrete & Computational Geometry*, **12**(1), 1994, 223–236.

[9] Svrtan, D., Veljan, D., and Volenec, V.: Geometry of Pentagons: from Gauss to Robbins, arXiv:math.MG/0403503 v1, 2004.

[10] Varfolomeev, V. V.: Inscribed Polygons and Heron Polynomials, *Sbornik: Mathematics*, **194**(3), 2003, 311–331.