行列の最小消去多項式候補を用いた逆行列計算と連立１次方程式の解法
Calculating matrix inverse with pseudo minimal annihilating polynomial and solving a system of linear equations

田島 慎一 *

Shinichi Tajima

新潟大学

Niigata University

小原 功任 †

Katsuyoshi Ohara

金沢大学

Kanazawa University

照井 章 ‡

Akira Terui

筑波大学

University of Tsukuba

Abstract

An algorithm for calculating matrix inverse with pseudo annihilating polynomial is proposed, and, for a system of linear equations with integer coefficients, application of the algorithm for calculating a specific component of the solution is presented. The use of a pseudo annihilating polynomial makes the computation of the matrix inverse efficient. Furthermore, the proposed method is effective for solving a system of linear equations with changing the right-hand-side frequently. Results of experiments are given.

1 はじめに

本稿では，有理数体上の有限次元ベクトル空間において，整数を成分に持つ行列に対し，行列の最小消去多項式候補を用いた逆行列計算と連立 1 次方程式の解法について論ずる．

我々はこれまで，行列のレゾルベントの留数解析に基づき，行列に対する厳密な数値計算を効率的に行う算法を提案してきた ([7], [9], [10], [13])．これらの算法においては，行列の最小消去多項式やその候補の計算法 ([6], [14])，1 変数多項式の変数に行列を代入して評価するための拡張 Horner 法 ([5], [11]) を用いることにより，算法の効率化を図ってきた．

本稿では，行列の最小消去多項式候補を用いて逆行列を計算し，連立 1 次方程式の解の特定の成分を計算する方法を提案する．逆行列計算に関しては，これまでに，行列の最小多項式候補を用いた計算法 [12] を提案しているが，本稿では，最小消去多項式候補の効率的計算法を利用し，連立 1 次方程式の解の特定の成分を効率的に計算する．提案手法では，最小消去多項式候補が真の最小消去多項式であるかどうかを確認しながら逆行列の一部を計算することにより，連立 1 次方程式の右辺のベクトルを次々に取り替えて解を効率的に計算することが可能である．

*tajima@emeritus.niigata-u.ac.jp

†ohara@air.s.kanazawa-u.ac.jp

‡terui@math.tsukuba.ac.jp

以下では次の内容を述べる．第 2 章では，行列の最小多項式を用いて逆行列を求め，それを用いて連立 1 次方程式を解く計算について述べる．第 3 章では，最小消去多項式を用いた提案手法の効率化，第 4 章では，最小消去多項式候補を用いた提案手法の効率化について述べる．

2　行列の最小多項式を用いた逆行列の計算と連立 1 次方程式の解法

A を整数を成分にもつ n 次正方行列とする．A の特性多項式が

$$\chi_A(\lambda) = f_1(\lambda)^{m_1} f_2(\lambda)^{m_2} \cdots f_q(\lambda)^{m_q}, \tag{1}$$

A の最小多項式が

$$\pi_A(\lambda) = f_1(\lambda)^{l_1} f_2(\lambda)^{l_2} \cdots f_q(\lambda)^{l_q} \tag{2}$$

でそれぞれ与えられているものとする．このとき，$i = 1, \ldots, q$ に対し，$1 \leq l_i \leq m_i$ であることに注意する．$\boldsymbol{b}$ を，整数を成分とする n 次列ベクトルとする．

本節では，行列 A に対し，有理数体 $K = \mathbb{Q}$ 上の A の逆行列 A^{-1} を A の最小多項式 $\pi_A(\lambda)$ を用いて求め，連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{3}$$

を解くことを考える．特に，$\boldsymbol{x}$ の第 i 成分 x_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$ のみを求めることとする．今，

$$\pi_A(\lambda) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + a_{m-2}\lambda^{m-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0, \quad a_0 \neq 0$$

とする．$\sigma(\lambda) = \lambda^{m-1} + a_{m-1}\lambda^{m-2} + \cdots + a_1$ とおくと，$\pi_A(\lambda) = \lambda\sigma(\lambda) + a_0$ と表される．ハミルトン-ケーリーの定理により，$\pi_A(A) = A\sigma(A) + a_0 E = O$ が成り立つ．これより $\pi_A(A) + a_0 A^{-1} = O$ が成り立つので，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = -\frac{1}{a_0}\pi_A(A)\boldsymbol{b} \tag{4}$$

で与えられる．

ここで,（行）基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を式 (4) の両辺に左側からかける．$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ とすると，$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{x} = x_i$ より

$$x_i = \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{x} = -\frac{1}{a_0}\boldsymbol{e}_i(\pi_A(A)\boldsymbol{b}) = -\frac{1}{a_0}(\boldsymbol{e}_i\pi_A(A))\boldsymbol{b} \tag{5}$$

を得る．式 (5) の最右辺における行ベクトル $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{e}_i\pi_A(A)$ は，行列多項式に対する Horner 法を用いることで，$O(mn^2)$ の計算量で計算される．解 $\boldsymbol{x}$ の第 i 成分は $x_i = -\frac{1}{a_0}\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{b}$ で与えられる．また，x_i の計算は並列化可能である．

式 (5) においては，最小多項式 $\pi_A(\lambda)$ に代えて特性多項式 $\chi_A(\lambda)$ を用いることも可能である．また，一度 $\boldsymbol{u}_i$ を与えておけば，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の右辺のベクトル $\boldsymbol{b}$ を取り替えても，解 x_i が内積計算のみで求まる．

3　行列の最小消去多項式を用いた逆行列の計算と連立 1 次方程式の解法

前章の式 (5) で紹介した x_i の計算は，A の最小消去多項式を用いることで効率化が可能である．

$\boldsymbol{v} \in K^n$ に対し，イデアル $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Q}[\lambda]}(A, \boldsymbol{v}) = \{P(\lambda) \in \mathbb{Q}[\lambda] \mid P(A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\} \subset K[x]$ のモニックな生成元を A に関する $\boldsymbol{v}$ の最小消去多項式と呼び．$\pi_{A,\boldsymbol{v}}(\lambda)$ で表す．特に，K^n の第 i 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ に対し，$\boldsymbol{e}_i$ の最小消去多項式を A に関する第 i 基本最小消去多項式と呼び，$\pi_{A,i}(\lambda)$ で表す．

最小消去多項式は，行ベクトルに対しても同様に定義できる．以下では，$\boldsymbol{e}_i$ を K^n の第 i（行）基本ベクトルとする．イデアル $\{P(\lambda) \in \mathbb{Q}[\lambda] \mid \boldsymbol{e}_i P(A) = \boldsymbol{0}\} \subset K[x]$ のモニックな生成元を $\rho_i(\lambda)$ とし，A に関する第 i（行）基本最小消去多項式と呼ぶ．

$\rho_i(\lambda) = \lambda\sigma_i(\lambda) + a_{i,0}$ $(a_{i,0} \neq 0)$ とおく．最小消去多項式の定義より

$$\boldsymbol{e}_i\rho_i(A) = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{e}_i(\sigma_i(A)A + a_{i,0}E).$$

両辺に右側から $A^{-1}\boldsymbol{b}$ をかけると

$$\boldsymbol{e}_i(\sigma_i(A)A + a_{i,0}E)A^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_i\sigma_i(A)\boldsymbol{b} + a_{i,0}A^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ より $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ であるので

$$a_{i,0}x_i = -\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{b} \quad (\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{e}_i\sigma_i(A))$$

よって

$$x_i = -\frac{1}{a_{i,0}}\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{b} \tag{6}$$

により，x_i が求まる．

4 行列の最小消去多項式候補を用いた逆行列の計算と連立 1 次方程式の解法

本章では，A に関する第 i（行）最小消去多項式を $\rho_i(\lambda)$, 同じく最小消去多項式候補を $\rho'_i(\lambda)$ とおく．逆行列の計算の時点で $\rho_i(\lambda)$ は未知であるが，$\rho'_i(\lambda)$ は与えられており，$\rho'_i(\lambda) \mid \rho_i(\lambda)$ が成り立つとする．

$\rho'_i(\lambda) = \lambda\sigma'_i(\lambda) + a'_{i,0}$ とおく．ベクトル・行列積の Horner 法で

$$\boldsymbol{u}'_i = \boldsymbol{e}_i\sigma'_i(A) \tag{7}$$

を求め．さらに Horner 法で $\boldsymbol{e}_i\rho'_i(A) = (\boldsymbol{e}_i\sigma'_i(A))A + a'_{i,0}\boldsymbol{e}_i$ を求めることで，$\rho'_i(\lambda)$ が真の最小消去多項式であるか否かを確認することができる．もし，$\boldsymbol{e}_i\rho'_i(A) = \boldsymbol{0}$ であれば，$\rho'_i(\lambda)$ が真の最小消去多項式であるので，式 (6) と同様にして

$$x_i = -\frac{1}{a'_{i,0}}\boldsymbol{u}'_i\boldsymbol{b}$$

により，x_i が求まる．

この方法では，ベクトル・行列積の Horner 法で，式 (6) の $\boldsymbol{u}_i$ の候補 $\boldsymbol{u}'_i$ をあらかじめ計算し，さらにもう 1 ステップの Horner 法で，$\rho'_i(\lambda)$ 真の最小消去多項式であるかを確かめ，もし $\rho'_i(\lambda)$ が真の最小消去多項式であれば，$\boldsymbol{u}'_i$ を用いて，連立 1 次方程式の解 x'_i を効率的に出力する，という特徴がある．

注意 1

連立 1 次方程式 (3) の右辺のベクトル $\boldsymbol{b}$ を取り替えて方程式を解く場合，ガウスの消去法では，あらかじめ係数行列 A の LU 分解を求めることにより，$\boldsymbol{b}$ を取り替えた際の計算量を減らすことができるが，それで

も求解には $O(n^2)$ の計算量が必要である[1)]．一方で，提案手法では，計算の最初の段階で，最小消去多項式候補を求めてから式 (7) の $\boldsymbol{u}_i$ を求める必要があるが，一度 $\boldsymbol{u}_i$ が求まれば，解 x_i は $\boldsymbol{u}_i$ と $\boldsymbol{b}$ の内積により，$O(n)$ の計算量で求めることができる．

5　まとめ

本稿では，行列の最小多項式，最小消去多項式および最小消去多項式候補を用いて，連立 1 次方程式の解の特定の成分を計算する算法を提案した．提案手法では，最小消去多項式候補の効率的算法を利用し，ベクトル・行列積の Horner 法を用いて解の特定の成分を求める．

提案手法は，特に，大規模な連立 1 次方程式において解を特定の成分に絞って求める場合や，連立 1 次方程式の右辺のベクトルを取り替えて解の特定の成分を次々に求めるような場合に効果を挙げることが期待される．

参　考　文　献

[1] R. M. Corless and D. J. Jeffrey. The Turing Factorization of a Rectangular Matrix. SIGSAM Bulletin, **31** (3), 1997, 20–30.

[2] D. Dureisseix. Generalized fraction-free LU factorization for singular systems with kernel extraction. Linear Algebra and Its Applications, **436**, 2012, 27–40.

[3] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, Forth edition, 2013.

[4] Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc. *Maple 2016* (Computer software). Waterloo, Ontario, Canada, 2016.

[5] S. Tajima, K. Ohara, and A. Terui. An extension and efficient calculation of the Horner's rule for matrices. In *Proceedings of the 4th International Congress on Mathematical Software (ICMS 2014)*, *Lecture Notes in Computer Science* 8592, pp. 346–351. Springer, 2014.

[6] S. Tajima, K. Ohara, and A. Terui. Fast Algorithm for Calculating the Minimal Annihilating Polynomials of Matrices via Pseudo Annihilating Polynomials. Preprint, submitted. 27 pages.

[7] S. Tajima, K. Ohara, and A. Terui. Fast Algorithms for Computing Eigenvectors of Matrices via Pseudo Annihilating Polynomials. Preprint, submitted. 17 pages.

[8] W. Zhou and D. J. Jeffrey. Fraction-free matrix factors: new forms for LU and QR factors. Frontiers of Computer Science in China, **2** (1), 2008, 67–80.

[9] 小原功任, 田島慎一. 最小消去多項式を用いた行列スペクトル分解計算の並列化. In *Computer Algebra: Design of Algorithms, Implementations and Applications*, 数理解析研究所講究録, 第 1815 巻, pp. 21–28. 京都大学数理解析研究所, 2012.

[10] 小原功任, 田島慎一. 最小消去多項式候補を用いた行列の一般固有空間の構造の計算法について. 数式処理研究と産学研究の新たな発展, MI レクチャーノート, 第 49 巻, pp. 113–118. 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所, 2013.

[1)] この計算量は一般的な数値計算におけるものであるが [3]，厳密な数値線形代数においては，分数なしガウス消去法に基づく行列の LU 分解の算法も提案されている ([1], [2], [8]).

[11] 田島慎一, 小原功任, 照井章. 行列 Horner 法の拡張と効率化. 数式処理研究の新たな発展, 数理解析研究所講究録, 第 1930 巻, pp. 26–38. 京都大学数理解析研究所, 2015.

[12] 田島慎一, 小原功任, 照井章. 行列の最小多項式候補と拡張 Horner 法を用いた逆行列計算について II. 数式処理研究の新たな発展—その最新研究と基礎理論の再構成—. 数理解析研究所講究録, 第 2019 巻, pp. 28–38. 京都大学数理解析研究所, 2017.

[13] 田島慎一, 照井章. 行列の最小消去多項式候補を利用した固有ベクトル計算 (IV). 数式処理とその周辺分野の研究, 数理解析研究所講究録, 第 1955 巻, pp. 188–197. 京都大学数理解析研究所, 2015.

[14] 田島慎一, 奈良洸平. 最小消去多項式候補とその応用. In *Computer Algebra — Design of Algorithms, Implementations and Applications*, 数理解析研究所講究録, 第 1815 巻, pp. 1–12. 京都大学数理解析研究所, 2012.