A generalized uniformly bounded multiplicity theorem

東京大学 数理科学研究科　田内 大渡 *†
Taito Tauchi
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

Abstract

Let P be a minimal parabolic subgroup of a real reductive Lie group G and H a closed subgroup of G. Then it is proved by T. Kobayashi and T. Oshima that the regular representation $C^\infty(G/H)$ contains each irreducible representation of G at most finitely many times if the number of H-orbits on G/P is finite. Moreover, they also proved that the multiplicities are uniformly bounded if the number of $H_\mathbb{C}$-orbits on $G_\mathbb{C}/B$ is finite, where $G_\mathbb{C}, H_\mathbb{C}$ are complexifications of G, H, respectively, and B is a Borel subgroup of $G_\mathbb{C}$. In this paper, we prove that the multiplicities of the representations of G induced from a parabolic subgroup Q in the regular representation on G/H are uniformly bounded if the number of $H_\mathbb{C}$-orbits on $G_\mathbb{C}/Q_\mathbb{C}$ is finite. For the proof of this claim, we also prove the uniform boundedness of the dimensions of the spaces of group invariant hyperfunctions using the theory of holonomic $\mathcal{D}_X$-modules.

1　正則表現に関する有限重複度の判定法

H を実簡約代数群 G の代数部分群とする。このとき等質多様体 G/H 上の正則表現が G の表現として有限重複度になるための判定法が小林俊行・大島利雄両氏により証明された。

事実 1.1 ([15, Thm. A]). G を実簡約代数群、H をその代数部分群とする。次の (G, H) に関する二条件は同値である。

(i) 任意の $(\pi, \tau) \in \hat{G}_{\mathrm{smooth}} \times \hat{H}_{\mathrm{f}}$ に対し $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H, \tau)) < \infty$ が成り立つ。
(ii) G/H が実球多様体である。

ここで G の滑らかな既約許容緩増加表現の同値類全体を $\hat{G}_{\mathrm{smooth}}$ で表し H の有限次元既約表現の同値類全体を $\hat{H}_{\mathrm{f}}$ で表した。さらに $C^\infty(G/H, \tau)$ で同変ベクトル束 $G \times_H \tau \to G/H$ の可微分な切断全体の成す Fréchet 空間を表した。また実球多様体という用語は小林

* This research is partially supported by Foundation of Research Fellows, The Mathematical Society of Japan.
† E-mail address: taito@ms.u-tokyo.ac.jp.

俊行氏 [13] により導入された。

定義 1.2 ([15])**.** 実簡約リー群 G の極小放物型部分群 P が、等質多様体 $X = G/H$ に開軌道を持つとき X を実球多様体であるという。

さらに松木敏彦氏の実ランク 1 に帰着させる方法 [19] と B. Kimelfeld による実ランク 1 の実球多様体の分類 [12] を合わせることにより G/H が実球多様体であることは次のように特徴付けられることが知られている。

事実 1.3 ([2, Thm. 2.2])**.** 事実 1.1 の条件 (ii) は次の (iii) と同値である。

(iii) G/P 上の H 軌道の個数 $\#(H\backslash G/P)$ が有限である。

P が極小放物型部分群である場合は条件 (i)、(ii)、(iii) が全て同値であることが事実 1.1 と事実 1.3 から従う（図 1 参照）。では P の代わりに G の一般の放物型部分群 Q を考えたとき (i)、(ii)、(iii) の関係はどのようになるのかということが自然に疑問になる。条件 (ii) と (iii) については Q への簡単な拡張が考えられる（定義 1.5 参照）。条件 (i) についての Q への拡張を考えるため、次の定義を思い出しておく。

定義 1.4 ([14, Def. 6.6])**.** ある $\tau \in \hat{Q}_{\mathrm{f}}$ が存在して π が退化主系列表現 $C^\infty(G/Q, \tau)$ の部分商と同型になるとき $\pi \in \hat{G}_{\mathrm{smooth}}$ は Q シリーズに属するという。

図 1　P : 極小放物型部分群

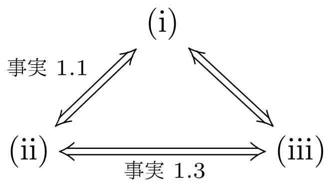
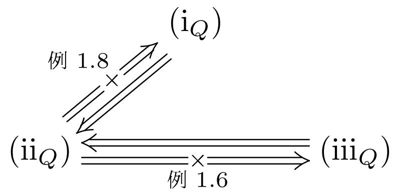


図 2　Q : 一般放物型部分群



G の一般放物型部分群 Q に対して

$$\hat{G}^{Q}_{\mathrm{smooth}} := \{\pi \in \hat{G}_{\mathrm{smooth}} \mid \pi \text{ は } Q \text{ シリーズに属する }\}$$

とおく。すると Harish-Chandra の部分商定理 [6] より $\hat{G}_{\mathrm{smooth}} = \hat{G}^{P}_{\mathrm{smooth}}$ が成り立つ。これより一般放物型部分群 Q を考えているときには $\hat{G}_{\mathrm{smooth}}$ を $\hat{G}^{Q}_{\mathrm{smooth}}$ で置き換えて条件 (i) を考えることにする。すなわち次の条件を考える。

定義 1.5. 一般放物型部分群 $Q \subset G$ に対し条件 (i$_Q$)、(ii$_Q$)、(iii$_Q$) を次で定める。

(i$_Q$) 任意の $(\pi, \tau) \in \hat{G}^{Q}_{\mathrm{smooth}} \times \hat{H}_{\mathrm{f}}$ に対し $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H, \tau)) < \infty$ が成り立つ。
(ii$_Q$) Q が等質多様体 G/H に開軌道を持つ。
(iii$_Q$) $\#(H\backslash G/Q) < \infty$ が成り立つ。

Q が極小放物型部分群 P であるとき三条件 (i_Q)、(ii_Q)、(iii_Q) はそれぞれ (i)、(ii)、(iii) と同値なので、上ですでに見たようにその関係は次のようになる（図 1 参照)。

$$(\mathrm{i}_P) \iff (\mathrm{ii}_P) \iff (\mathrm{iii}_P).$$

さらに $Q = G$ のときは Frobenius の相互律より条件 (i_Q) が常に成り立つことがわかる。また (ii_Q) と (iii_Q) が常に成り立つことは明らかなので次を得る。

$$(\mathrm{i}_G) \iff (\mathrm{ii}_G) \iff (\mathrm{iii}_G).$$

一般の放物型部分群 Q に対しても (iii_Q)⇒(ii_Q) は常に真である。しかしその逆である (ii_Q)⇒(iii_Q) は、極小ではない一般の放物型部分群 Q に対して常に成り立つとは限らない。

例 1.6. 実射影空間 $\mathbb{RP}^2 = SL(3,\mathbb{R})/Q = G/Q$ は Q のオポジット放物型部分群 $\overline{Q}$ の冪零根基 H の作用により一つの開軌道と連続無限個の固定点に分解される。

また小林俊行氏は [14] においてポアソン変換の一般化を定義することで次を示している。

事実 1.7 ([14, Cor. 6.8])**.** H 開軌道が G/Q 上に存在しないとする。このときある $\pi \in \hat{G}^Q_{\mathrm{smooth}}$ に対して $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H)) = \infty$ が成り立つ。

よって対偶をとることにより、(i_Q)⇒(ii_Q) が成り立つことがわかる。しかしまた、(ii_Q)⇒(i_Q) は一般の放物型部分群 Q に対して、常に成り立つとは限らない。

例 1.8. 例 1.6 の (G,H,Q) は $\dim \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q), C^\infty(G/H)) = \infty$ を満たす。

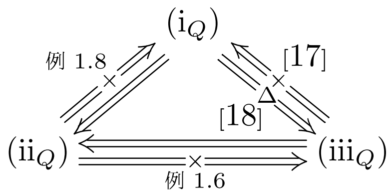
ここまでを整理すると三条件 (i_Q)、(ii_Q)、(iii_Q) については (i_Q) と (iii_Q) の関係がわかっていない（図 2 参照)。よって次の問題を考える。

問題 1.9. 次の二条件の関係性を決定せよ。

(i_Q) 任意の $(\pi,\tau) \in \hat{G}^Q_{\mathrm{smooth}} \times \hat{H}_{\mathrm{f}}$ に対し $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H,\tau)) < \infty$ が成り立つ。
(iii_Q) $\#(H\backslash G/Q) < \infty$ が成り立つ。

この問題の解答として、(iii_Q) を満たすが (i_Q) を満たさない組 (G,H,Q) が存在すること [17, Thm. 1.8] と H 軌道の向き付けに関するある仮定の元では (i_Q) ⇒ (iii_Q) が成り立つこと [18, Thm. 1.1] がわかっている。以上をまとめると次のようになる。(i_Q) ⇒ (iii_Q) については向き付けに関する仮定のもとで証明されたという意味で矢印に Δ を付けた。

図 3　Q : 一般放物型部分群



2　一様有界性

前章では G/H 上の P 軌道の有限性が G/H 上の正則表現の有限重複度性を保証することを見た。さらに小林俊行・大島利雄両氏は重複度の一様有界性に関して次を示している。$G_{\mathbb{C}}$ や $H_{\mathbb{C}}$ により対応するリー群 G や H の複素化を表す。

事実 2.1 ([15, Theorem B])**.** (G, H) に関する次の二条件は同値である.

(I) $\displaystyle\sup_{\tau\in\hat{H}_{\mathrm{f}}}\sup_{\pi\in\hat{G}_{\mathrm{smooth}}}\frac{1}{\dim\tau}\dim\mathrm{Hom}_G(\pi, C^{\infty}(G/H,\tau))<\infty$ が成り立つ。

(II) $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ が球多様体である。

ここで $G_{\mathbb{C}}$ の Borel 部分群 B が $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ 上に開軌道を持つとき $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ が球多様体であると呼んだ。また事実 2.1 の条件 (II) は次の条件 (III) と同値であることが知られている。

事実 2.2 ([4, 19, 24])**.** 事実 2.1 の条件 (II) は次の (III) と同値である。

(III) $\#(B\backslash G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}})<\infty$ が成り立つ。

この論文では一般の放物型部分群 Q に対して上記の事実 2.1 の Q シリーズ版を示す。

定理 2.3. G を実簡約代数群とし Q をその放物型部分群とする。また H を G の代数部分群とし $\#(H_{\mathbb{C}}\backslash G_{\mathbb{C}}/Q_{\mathbb{C}})<\infty$ を仮定する。このとき次が成り立つ。

$$\sup_{(\eta,\tau)\in\hat{Q}_{\mathrm{f}}\times\hat{H}_{\mathrm{f}}}\frac{1}{\dim\eta\cdot\dim\tau}\dim\mathrm{Hom}_G(C^{\infty}(G/Q,\eta), C^{\infty}(G/H,\tau))<\infty.$$

注釈 2.4. 定理 2.3 の証明から定理 2.3 の仮定のもとで次の二つが成り立つこともわかる。

$$\sup_{\eta\in\hat{Q}_{\mathrm{f}}}\sup_{\tau\in\hat{H}_{\mathrm{f}}}\frac{1}{\dim\eta\cdot\dim\tau}\dim\mathrm{Hom}_G(C^{\infty}(G/Q,\eta), C^{\infty}(G/H,\tau))<\infty,$$
$$\sup_{\tau\in\hat{H}_{\mathrm{f}}}\sup_{\eta\in\hat{Q}_{\mathrm{f}}}\frac{1}{\dim\eta\cdot\dim\tau}\dim\mathrm{Hom}_G(C^{\infty}(G/Q,\eta), C^{\infty}(G/H,\tau))<\infty.$$

上記の定理 2.3 の証明には $\mathcal{D}$ 加群の理論を用いたが、その証明の途中で次のホロノミック $\mathcal{D}$ 加群の佐藤超関数解の空間の次元の一様有界性を得た。$\mathcal{B}_M$ を実解析多様体 M 上の佐藤超関数が成す層とする。

定理 2.5. X を実解析多様体 M の複素化とし滑らかな複素代数多様体の構造を持つと仮定する。複素代数群 $H_{\mathbb{C}}$ が X に作用しているとし $\#(H_{\mathbb{C}}\backslash X) < \infty$ を仮定する。このときある $C > 0$ が存在して、任意の $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の有限次元表現 τ に対して、次を満たす。

$$\dim(\Gamma(M; \mathcal{B}_M) \otimes \tau)^{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} \leq C \cdot \dim \tau.$$

注釈 2.6. この論文の証明の手法を用いると定理 2.5 の $C > 0$ として

$$C = \sum_{\alpha=0}^{N} \#K_\alpha \cdot \mathrm{mult}_{T^*_{X_\alpha}X}^{\mathcal{O}_{T^*X}} (\mathcal{O}_{T^*X}/\mathcal{O}_{T^*X} \cdot \sigma_1(a(\mathfrak{h}))) \tag{2.1}$$

がとれる。記号については 6 章を参照されたい。よって定理 2.5 を用いて証明した定理 2.3 においても一様有界性だけでなく、実際に上界をあたえることができる。しかし (2.1) は最適な上界ではないため、特に定理 2.3 についてもこの論文の手法で与えられる上界は最適なものとはなっていない。

3 章でこの論文中に用いる層や $\mathcal{D}$ 加群の理論について述べ、4 章と 5 章で定理 2.5 の証明に用いる命題を証明する。それらを用いることで定理 2.5 は 6 章で証明される。定理 2.3 は定理 2.5 を用いて 7 章で証明する。

3 層と $\mathcal{D}_X$ 加群の諸性質

この章では、この論文中に用いる層や $\mathcal{D}_X$ 加群の理論について述べる。この章で証明される命題や補題は、すでによく知られているものがほとんどであるが、いくつか明示的に記された文献がわからないものがあったため、利便性のために証明を書いてある。

3.1 層

この章では層の理論に関する諸性質を述べる。より詳しい層の理論の記述は例えば柏原–Schapira[11] などを参照されたい。

X を良い位相空間（すなわち無限遠で可算なハウスドルフかつ局所コンパクトな位相空間であって、脆弱次元が有限なもの）とし $\mathbb{C}_X$ を X 上の定数層とする。$\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X)$ で $\mathbb{C}$ ベクトル空間の層がなすアーベル圏を表す。また $\mathrm{D}^b(\mathbb{C}_X)$ で $\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X)$ の有界導来圏を表す。$\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X)$ の元を零次に集中した複体とみることで $\mathrm{D}^b(\mathbb{C}_X)$ の元とみなす。

X の閉集合 $\iota_K : K \hookrightarrow X$ と $\mathcal{S} \in \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X)$ に対し $\mathcal{S}_K$ を次で定義する。

$$\mathcal{S}_K := \iota_{K*}\iota_K^{-1}(\mathcal{S}).$$

ここで ι_{K*} と ι_K^{-1} はそれぞれ順像関手と逆像関手を表した。このとき $(\iota_K^{-1}, \iota_{K*})$ が随伴対であるので $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_K)}(\iota_K^{-1}(\mathcal{S}), \iota_K^{-1}(\mathcal{S})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X)}(\mathcal{S}, \iota_{K*}\iota_K^{-1}(\mathcal{S}))$ がなりたつ。よっ

て自然な射 $\mathcal{S} \to \mathcal{S}_K$ を得る。これを用いて X の開集合 U に対しては $K := X \backslash U$ とおき $\mathcal{S}_U := \mathrm{Ker}(\mathcal{S} \to \mathcal{S}_K)$ と定める。一般の局所閉集合 Z に対しては、$Z = U \cap K$ となる開集合 U と K をとり $\mathcal{S}_Z := (\mathcal{S}_U)_K$ と定める。これは U と K の取り方によらない。特に $\mathcal{S} = \mathbb{C}_X$ のとき誤解の恐れがなければ $(\mathbb{C}_X)_Z$ を $\mathbb{C}_Z$ とも書く。この記法によれば局所閉集合 $\iota_Z : Z \hookrightarrow X$ と Z 上の定数層 $\mathbb{C}_Z$ に対して

$$\iota_{Z*}(\mathbb{C}_Z) = \mathbb{C}_Z \in \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X) \tag{3.1}$$

である。次の補題については [16, Prop. 2.3.6(i)] を参照のこと。

補題 3.1 K を X の閉集合とし $\mathcal{S} \in \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X)$ とする。このとき $\mathcal{S}$ の台 $\mathrm{supp}(\mathcal{S})$ が $\mathrm{supp}(\mathcal{S}) \subset K$ を満たすならば $\mathcal{S}_K \simeq \mathcal{S}$ となる。

X の開部分集合 U 上の $\mathcal{S} \in \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X)$ の切断全体の空間を $\Gamma(U; \mathcal{S})$ で表す。また U の閉部分集合 K に対して $\Gamma(U; \mathcal{S})$ の部分空間を次で定義する。

$$\Gamma_K(U; \mathcal{S}) := \mathrm{Ker}(\Gamma(U; \mathcal{S}) \to \Gamma(U \backslash K; \mathcal{S})).$$

X の局所閉集合 Z に対しては Z を閉集合として含む U の開部分集合 V をとり $\Gamma_Z(U; \mathcal{S}) := \Gamma_{V \cap Z}(V; \mathcal{S})$ と定義する。このとき $\Gamma_Z(\mathcal{S}) \in \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X)$ を X の開集合 U に対して

$$\Gamma(U; \Gamma_Z(\mathcal{S})) := \Gamma_{Z \cap U}(U : \mathcal{S})$$

と定義する。すると Γ_Z は $\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X)$ 上の自己関手となり、また特に左完全関手である。よってその右導来関手を考えることができるのでそれを $\mathbb{R}\Gamma_K : \mathrm{D}^b(\mathbb{C}_X) \to \mathrm{D}^b(\mathbb{C}_X)$ で表す。特に $\mathbb{R}\Gamma_K$ の k 次のコホモロジーを $\mathbb{R}^k\Gamma_K$ で表すことにする。次の二つの補題の証明は例えば [16, Prop. 2.3.9(iii)] や [3, Prop 4.14 in Appx. II] を参照されたい。

補題 3.2 K を X の閉集合とし $j : X \backslash K \hookrightarrow X$ を開埋め込みとする。このとき $\mathcal{S} \in \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X)$ に対して次の完全列が存在する。

$$0 \to \Gamma_K(\mathcal{S}) \to \mathcal{S} \to j_* j^{-1} \mathcal{S}.$$

補題 3.3 K と K' を X の閉集合とする。このとき次の同型が存在する。

$$\mathbb{R}\Gamma_{K'} \circ \mathbb{R}\Gamma_K(\cdot) \simeq \mathbb{R}\Gamma_{K \cap K'}(\cdot).$$

良い位相空間の間の射 $f : X \to Y$ に対し $f_! : \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_Y)$ で固有台を持つ順像関手を表す。すなわち $\mathcal{S} \in \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X)$ と開集合 $U \subset Y$ に対し

$$\Gamma(U; f_! \mathcal{S}) := \{ s \in \Gamma(f^{-1}(U); \mathcal{S}) \mid f : \mathrm{supp}(s) \to U \text{ は固有射である } \}$$

と定める。このとき $f_!$ は左完全関手となるので、$\mathbb{R}f_!$ でその右導来関手を表す。また $f^!$ で $\mathbb{R}f_!$ の右随伴関手を表す。

$\{pt\}$ で一点からなる位相空間を表すこととする。このとき自然な射 $a_X : X \to \{pt\}$ が存在する。$\omega_X := a_X^!(\mathbb{C}_{\{pt\}}) \in \mathrm{D}^b(\mathbb{C}_X)$ とおいて、これを X 上の双対化複体と呼ぶ。また X が実多様体であるときその向きづけ層を

$$or_X := \omega_X[-\dim X] \qquad \in \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X) \tag{3.2}$$

で定義する。このとき局所的には同型 $or_X \simeq \mathbb{C}_X$ が存在する。

後に用いる補題を述べこの章を終わることとする。一つ目の補題の証明は [16, Prop. 3.1.12] を参照されたい。

補題 3.4 良い位相空間の間の射 $f : X \to Y$ により X が Y の局所閉集合と同相であったとする。このとき次の関手の同型が存在する。

$$f^!(\cdot) \simeq f^{-1} \circ \mathbb{R}\Gamma_{f(X)}(\cdot).$$

特に $f : X \to Y$ が閉埋め込みならば $f_* \circ f^{-1}(\cdot) = (\cdot)_{f(X)}$ は完全関手なので補題 3.1 より次を得る。

$$f_* \circ f^!(\cdot) \simeq \mathbb{R}\Gamma_{f(X)}(\cdot).$$

補題 3.5 L を実解析多様体とし M をその m 次元閉多様体、N を M の n 次元閉多様体とする。このとき $\mathrm{D}^b(\mathbb{C}_L)$ の元としての局所的な同型

$$\mathbb{R}\Gamma_N(\mathbb{C}_M) \simeq \mathbb{C}_N[-(m-n)] \tag{3.3}$$

が存在する。すなわち任意の $x \in L$ に対しその十分小さな開近傍上で $\mathbb{R}\Gamma_N(\mathbb{C}_M) \simeq \mathbb{C}_N[-(m-n)]$ が成り立つ。

証明 (3.2) により局所的に $\mathbb{C}_M \simeq a_M^!(\mathbb{C}_{\{pt\}})[m] \in \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_M)$ や $\mathbb{C}_N \simeq a_N^!(\mathbb{C}_{\{pt\}})[n] \in \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_N)$ を得る。また $\iota_N : N \to M$ とおくと $a_M \circ \iota_N = a_N$ を得るので特に $\iota_N^! a_M^! \simeq (a_M \circ \iota_N)^! \simeq a_N^!$ となる。よって補題 3.4 により次の $\mathrm{D}^b(\mathbb{C}_M)$ の元としての同型を得る。

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\Gamma_N(\mathbb{C}_M)[m] &\simeq \mathbb{R}\Gamma_N a_M^!(\mathbb{C}_{\{pt\}}) \\ &\simeq \iota_{N*}\iota_N^! a_M^!(\mathbb{C}_{\{pt\}}) \\ &\simeq \iota_{N*} a_N^!(\mathbb{C}_{\{pt\}}) \\ &\simeq \iota_{N*}\mathbb{C}_N[n]. \end{aligned}$$

$\iota_M : M \hookrightarrow L$ を自然な閉埋め込みとして両辺を完全関手 ι_{M*} で送れば題意を得る。 $\square$

3.2 $\mathcal{D}_X$ 加群

この章では $\mathcal{D}$ 加群に関する諸性質を述べ、後の章で用いるいくつかの命題を証明する。$\mathcal{D}$ 加群の理論に関するより詳しい記述は柏原 [8] や佐藤–河合–柏原 [20]、柏原–Schapira[11] などを参照されたい。

X を d_X 次元の複素多様体とする。このとき $\mathcal{O}_X$、$\mathcal{D}_X$ でそれぞれ X 上の正則関数の成す層、正則関数係数の（有限階）微分作用素の成す層を表す。

X の d_Y 次元の閉部分複素多様体 Y に対して、X 上の層 $\mathcal{B}_{Y|X}$ を次で定義する。

$$\mathcal{B}_{Y|X} := \mathbb{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_X)[d_X - d_Y]. \tag{3.4}$$

ここで $[d_X - d_Y]$ は $\mathrm{D}^b(\mathbb{C}_X)$ 上のシフト関手である。特に $Y = X$ の時は $\mathcal{B}_{X|X} = \mathcal{O}_X$ である。ここで複体 $\mathbb{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_X)[d_X - d_Y]$ は 0 次に集中している [21, Prop 6.2.2] ことを注意しておく。すなわち $k \neq d_X - d_Y$ に対して $\mathbb{R}^k\Gamma_Y(\mathcal{O}_X) = 0$ が成り立つ。

X が、ある実解析多様体 M の複素化となっているとき、X 上の層 $\mathcal{B}_M$ を次で定義する。

$$\mathcal{B}_M := \mathbb{R}\Gamma_M(\mathcal{O}_X)[d_X] \otimes_{\mathbb{C}_M} or_M. \tag{3.5}$$

誤解の恐れがない場合、埋め込み $\iota_M : M \hookrightarrow X$ によるこの層の引き戻し $\iota_M^{-1}\mathcal{B}_M \in \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_M)$ を $\mathcal{B}_M$ と略記する場合がある。また複体 $\mathbb{R}\Gamma_M(\mathcal{O}_X)[d_X]$ は 0 次に集中している [21, Prop 7.2.1] ことを注意しておく。すなわち $k \neq d_X$ に対して $\mathbb{R}^k\Gamma_M(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathbb{C}_M} or_M = 0$ が成り立つ。

$\mathcal{F}$ を $\mathcal{D}_X$ の階数によるフィルターとし、そのフィルターに付随する次数付き環 $gr_{\mathcal{F}}(\mathcal{D}_X)$ を $gr_{\mathcal{F}}(\mathcal{D}_X) := \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathcal{F}_j(\mathcal{D}_X)/\mathcal{F}_{j-1}(\mathcal{D}_X)$ で定める。このとき $\pi : T^*X \to X$ を自然な射影とすると単射 $\pi^{-1}(gr_{\mathcal{F}}(\mathcal{D}_X)) \hookrightarrow \mathcal{O}_{T^*X}$ が存在する。$gr_{\mathcal{F}}(\mathcal{D}_X)$ 加群 M に対して $\mathcal{O}_{T^*X}$ 加群 $F(M)$ を

$$F(M) := \mathcal{O}_{T^*X} \otimes_{\pi^{-1}(gr_{\mathcal{F}}(\mathcal{D}_X))} \pi^{-1}(M) \tag{3.6}$$

と定める。すると F は $gr_{\mathcal{F}}(\mathcal{D}_X)$ 加群の成す圏から $\mathcal{O}_{T^*X}$ 加群の成す圏への関手を定める。逆像関手の完全性とテンソル積関手の右完全性より F は右完全関手である。

$\mathfrak{M}$ を連接 $\mathcal{D}_X$ 加群とする。このとき $\mathfrak{M}$ の特性多様体 $\mathrm{Ch}(\mathfrak{M}) \subset T^*X$ を $\mathcal{O}_{T^*X}$ 加群 $F(gr_{\mathcal{F}_{\mathfrak{M}}}(\mathfrak{M}))$ の台として定義する。ただしここで $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}}$ は $\mathfrak{M}$ の連接フィルターである。この定義は $\mathfrak{M}$ の連接フィルターの取り方によらない。$\mathrm{Ch}(\mathfrak{M})$ の既約閉解析集合 V に対して $\mathrm{mult}_V^{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M})$ で $\mathfrak{M}$ の V に沿った重複度 [8, Def. 2.6.10] を表すことにする。すなわち

$$\mathrm{mult}_V^{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}) := \mathrm{mult}_V^{\mathcal{O}_{T^*X}}(F(\mathfrak{M}))$$

とおく。ここで $\mathrm{mult}_V^{\mathcal{O}_{T^*X}}(F(\mathfrak{M}))$ は $\mathcal{O}_{T^*X}$ 加群 $F(\mathfrak{M})$ の V に沿った重複度である（例えば [8, Def. 2.6.1] を参照）。

連接 $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathfrak{M}$ がホロノミックであるとはその特性多様体 $\mathrm{Ch}(\mathfrak{M}) \subset T^*X$ が d_X 次元であるか $\mathfrak{M} = 0$ であるときに言う。次の柏原の構成可能性定理はホロノミック $\mathcal{D}_X$ 加群に関する重要な事実の一つである。

事実 3.6 ([7, Thms. (3.5) and (3.7)])**.** $\mathfrak{M}$ をホロノミック $\mathcal{D}_X$ 加群とし $X=\bigsqcup_{\alpha\in A}X_\alpha$ を $\mathfrak{M}$ に関して正則な X の滑層分割とする。また $\iota_{X_\alpha}: X_\alpha \hookrightarrow X$ を自然な埋め込みとする。このとき任意の $\alpha\in A$ と $k\in\mathbb{Z}$ に対して、$\iota_{X_\alpha}^{-1}\mathbb{R}^k\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M},\mathcal{O}_X)$ は X_α 上の有限ランクの局所定数層である。また部分集合 $B\subset A$ に対して、もし $Y:=\bigsqcup_{\beta\in B}X_\beta$ が X の閉部分多様体であるならば $\iota_{X_\alpha}^{-1}\mathbb{R}^k\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M},\mathcal{B}_{Y|X})$ もまた任意の $\alpha\in A$ と $k\in\mathbb{Z}$ に対して X_α 上の有限ランクの局所定数層である。

ここで $\mathcal{S}\in\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_{X_\alpha})$ が X_α 上の有限ランクの局所定数層であるとは任意の $x\in X_\alpha$ に対して $l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して x の十分小さな開近傍上で同型 $\mathbb{C}^l_{X_\alpha}\simeq\mathcal{S}$ が存在することである。また X の滑層分割 $X=\bigsqcup_{\alpha\in A}X_\alpha$ がホロノミック $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathfrak{M}$ に対して正則であるとは滑層分割 $X=\bigsqcup_{\alpha\in A}X_\alpha$ が Whitney の正則条件 [23, (a),(b) in Sect. 19] を満たし、かつ各滑層 X_α の余法束 $T^*_{X_\alpha}X$ の和集合 $\bigsqcup_{\alpha\in A}T^*_{X_\alpha}X$ に $\mathrm{Ch}(\mathfrak{M})$ が含まれることを言う [7, Def. (3.4)]。任意のホロノミック $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathfrak{M}$ に対して、常に $\mathfrak{M}$ に対して正則な滑層分割 $X=\bigsqcup_{\alpha\in A}X_\alpha$ が存在する [7, Lem. (3.2)]。

系 3.7. $\mathfrak{M}$ をホロノミック $\mathcal{D}_X$ 加群とし $X=\bigsqcup_{\alpha\in A}X_\alpha$ を $\mathfrak{M}$ に関して正則な X の滑層分割とする。このとき任意の $x_\alpha\in X_\alpha$ と $k\in\mathbb{Z}$ に対して $l_k=\dim\mathbb{R}^k\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M},\mathcal{B}_{X_\alpha|X})_{x_\alpha}$ とおけば x_α の十分小さな開近傍上で次の同型が存在する。

$$\mathbb{R}^k\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M},\mathcal{B}_{X_\alpha|X})\simeq\mathbb{C}^{l_k}_{X_\alpha}. \tag{3.7}$$

証明　系の主張は局所的なので X_α は X の閉集合であるとして良い。簡単のために $\mathcal{R}^k:=\mathbb{R}^k\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M},\mathcal{B}_{X_\alpha|X})$ とおく。$\mathcal{B}_{X_\alpha|X}$ の定義より $\mathrm{supp}(\mathcal{R}^k)\subset X_\alpha$ である。従って補題 3.1 より $\mathcal{R}^k_{X_\alpha}=\iota_{X_\alpha*}\iota_{X_\alpha}^{-1}\mathcal{R}^k\simeq\mathcal{R}^k$ である。一方、定理 3.6 により $\iota_{X_\alpha}^{-1}(\mathcal{R}^k)$ は X_α 上の有限ランクの局所定数層である。よってある $l'_k\in\mathbb{N}$ が存在して $\iota_{X_\alpha}^{-1}(\mathcal{R}^k)\simeq\mathbb{C}^{l'_k}_{X_\alpha}$ が $x_\alpha\in X_\alpha$ の十分小さな開近傍上で成り立つ。以上より記法 (3.1) に注意すれば $\mathcal{R}^k\simeq\iota_{X_\alpha*}(\mathbb{C}^{l'_k}_{X_\alpha})=\mathbb{C}^{l'_k}_{X_\alpha}$ が成り立つ。x_α での茎をとることにより $l'_k=l_k$ を得る。 □

命題 3.8　$\mathfrak{M}$ をホロノミック $\mathcal{D}_X$ 加群とし $X=\bigsqcup_{\alpha\in A}X_\alpha$ を $\mathfrak{M}$ に関して正則な X の滑層分割とする。このとき任意の $x_\alpha\in X_\alpha$ に対して次がなりたつ。

$$\dim\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M},\mathcal{B}_{X_\alpha|X})_{x_\alpha}\leq\mathrm{mult}^{\mathcal{D}_X}_{T^*_{X_\alpha}X}(\mathfrak{M}). \tag{3.8}$$

命題 3.8 のために一つ補題を準備する。$\mathcal{D}^\infty_X$ を X 上の無限階微分作用素の成す層とする。また $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X$ を T^*X 上の擬微分作用素全体の成す層とする [8, Chap. 1.4]。X の閉部分多様体 Y に対して $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X}$ で T^*_YX 上の正則超局所関数の成す層を表す [20, Def. 1.1.4 in Chap. II]。

補題 3.9　$p\in T^*_YX$ に対し、次の単射が存在する。

$$\pi^{-1}(\mathcal{B}_{X_\alpha|X})_p=(\mathcal{B}_{X_\alpha|X})_{\pi(p)}\hookrightarrow(\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{X_\alpha|X})_p$$

証明　$\pi(p) \in X$ の近傍の局所座標 $z = (z_1, \dots, z_{d_X})$ を $Y = \{z_{d_Y+1} = \cdots = z_{d_X} = 0\}$ となるようにとる。ホロノミック $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{B}^f_{Y|X}$ を次のように定める。

$$\mathcal{B}^f_{Y|X} := \mathcal{D}_X / \Big(\sum_{j=1}^{d_Y} \mathcal{D}_X \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{j=d_Y+1}^{d_X} \mathcal{D}_X z_j \Big).$$

すると $\mathcal{D}^\infty_X$ 加群の同型 $\mathcal{B}_{Y|X} \simeq \mathcal{D}^\infty_X \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{B}^f_{Y|X}$ が存在する [10, Thm. 5.4.1] ので次を得る。

$$\mathcal{B}_{Y|X} \simeq \mathcal{D}^\infty_X / \Big(\sum_{j=1}^{d_Y} \mathcal{D}^\infty_X \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{j=d_Y+1}^{d_X} \mathcal{D}^\infty_X z_j \Big). \tag{3.9}$$

また次の $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X$ 加群としての同型

$$\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X} \simeq \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X / \Big(\sum_{j=1}^{d_Y} \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{j=d_Y+1}^{d_X} \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X z_j \Big) \tag{3.10}$$

が存在する。これは [8, Def. 3.2.42] を参照のこと。(3.9) と (3.10) より題意が従う。 □

命題 *3.8* の証明　$\pi(p_\alpha) = x_\alpha$ を満たす $p_\alpha \in T^*_{X_\alpha} X$ を取る。補題 3.9 を用いればテンソル積と $\mathcal{H}om$ が随伴であることより

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_{X_\alpha|X})_{x_\alpha} &\simeq \mathcal{H}om_{\pi^{-1}(\mathcal{D}_X)}(\pi^{-1}(\mathfrak{M}), \pi^{-1}(\mathcal{B}_{X_\alpha|X}))_{p_\alpha} \\
&\hookrightarrow \mathcal{H}om_{\pi^{-1}(\mathcal{D}_X)}(\pi^{-1}(\mathfrak{M}), \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{X_\alpha|X})_{p_\alpha} \\
&\simeq \mathcal{H}om_{\pi^{-1}(\mathcal{D}_X)}(\pi^{-1}(\mathfrak{M}), \mathcal{H}om_{\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X}(\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X, \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{X_\alpha|X}))_{p_\alpha} \\
&\simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X}(\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{D}_X)} \mathfrak{M}, \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{X_\alpha|X})_{p_\alpha}
\end{aligned}$$

を得る。よって命題 3.8 は次の事実 3.10 から従う。 □

事実 3.10 ([8, Thm. 3.2.42]). $\mathfrak{M}$ を X 上のホロノミック $\mathcal{D}_X$ とし $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ を $\mathfrak{M}$ に関して正則な X の滑層分割とする。$\overline{T^*_{X_\beta} X}$ を T^*X の中での $T^*_{X_\beta} X$ の閉包とし $p_\alpha \in T^*_{X_\alpha} X \setminus \bigcup_{\beta \neq \alpha} \overline{T^*_{X_\beta} X}$ を任意にとる。このとき $m := \mathrm{mult}^{\mathcal{D}_X}_{T^*_{X_\alpha}}(\mathfrak{M})$ とおけば次が成り立つ。

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X}(\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{D}_X)} \mathfrak{M}, \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{X_\alpha|X})_{p_\alpha} = \mathbb{C}^m.$$

4　ホロノミック $\mathcal{D}$ 加群の佐藤超関数解空間の次元の上界

この章ではホロノミック $\mathcal{D}$ 加群の佐藤超関数解空間の次元の上界が存在することを示す。

命題 4.1　M を実解析多様体とし X をその複素化とする。また $\mathfrak{M}$ を X 上のホロノミック $\mathcal{D}_X$ 加群とし $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ を $\mathfrak{M}$ に関して正則な X の滑層分割とする。$M_\alpha := M \cap X_\alpha$ とおく。このとき任意の $\alpha \in A$ と $x_\alpha \in M_\alpha$ に対して次がなりたつ。

$$\dim \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \Gamma_{M_\alpha}(\mathcal{B}_M))_{x_\alpha} \leq \mathrm{mult}^{\mathcal{D}_X}_{T^*_{X_\alpha} X}(\mathfrak{M}).$$

先に証明中に用いる Grothendieck スペクトル系列について記しておく。

事実 4.2 ([5, Thm. 2.4.1])**.** $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ をそれぞれアーベル圏とし $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ と $G: \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ を左完全関手とする。もし F が $\mathcal{C}$ の単射的対象を $\mathcal{C}'$ の単射的対象にうつすならば $A \in \mathcal{C}$ に対して次のスペクトル系列が存在する。

$$E_2^{p,q} = \mathbb{R}^p G \circ \mathbb{R}^q F(A) \Rightarrow \mathbb{R}^{p+q}(G \circ F)(A).$$

命題 *4.1* の証明 系 3.7 より $x_\alpha \in X_\alpha$ の十分小さな開近傍上で同型

$$\mathbb{R}^k \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_{X_\alpha|X}) \simeq \mathbb{C}_{X_\alpha}^{l_k} \tag{4.1}$$

が存在する。命題 4.1 の主張は局所的なものなので (4.1) が成り立っているとしてよい。また同様の理由で M_α と X_α は X の閉集合であるとしてよい。このとき次の同型が存在する。

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}\Gamma_M \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_{X_\alpha|X})[d_{X_\alpha}] &\simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathbb{R}\Gamma_M(\mathcal{B}_{X_\alpha|X}))[d_{X_\alpha}] \\
&\simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathbb{R}\Gamma_M \mathbb{R}\Gamma_{X_\alpha}(\mathcal{O}_X)[d_X - d_{X_\alpha}])[d_{X_\alpha}] \\
&\simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathbb{R}\Gamma_M \mathbb{R}\Gamma_{X_\alpha}(\mathcal{O}_X))[d_X] \\
&\simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathbb{R}\Gamma_{M_\alpha} \mathbb{R}\Gamma_M(\mathcal{O}_X))[d_X] \\
&\simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathbb{R}\Gamma_{M_\alpha}(\mathcal{B}_M)).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

一つ目の同型に関しては、例えば [3, Thm. 7.9 in Appx. II] を参照されたい。二つ目と五つ目の同型は (3.4) と (3.5) から従う。四つ目の同型では $M \cap X_\alpha = M_\alpha \cap M$ という事実と補題 3.3 を用いた。さらに定義より次が成り立つ。

$$H^0(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathbb{R}\Gamma_{M_\alpha}(\mathcal{B}_M))) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \Gamma_{M_\alpha}(\mathcal{B}_M)). \tag{4.3}$$

ここで $H^0(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathbb{R}\Gamma_{M_\alpha}(\mathcal{B}_M)))$ は複体 $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathbb{R}\Gamma_{M_\alpha}(\mathcal{B}_M))$ の 0 次のコホモロジーを表した。事実 4.2 より Grothendieck スペクトル系列

$$E_2^{p,q} \simeq \mathbb{R}^p \Gamma_M(\mathbb{R}^q \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_{X_\alpha|X})) \Rightarrow H^{p+q}(\mathbb{R}\Gamma_M \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_{X_\alpha|X})) \tag{4.4}$$

が存在する。なぜなら関手 $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, *)$ は入射的対象を保つからである [3, Prop. 6.2.1 in Appx. II]。補題 3.5 と系 3.7 より次を得る。

$$E_2^{p,q} \simeq \mathbb{R}^p \Gamma_M(\mathbb{C}_{X_\alpha}^{l_q}) \simeq \begin{cases} \mathbb{C}_{M_\alpha}^{l_q} & (p = 2d_{X_\alpha} - \dim M_\alpha), \\ 0 & (otherwise). \end{cases}$$

X が M の複素化であることより $d_{X_\alpha} \leq 2d_{X_\alpha} - \dim M_\alpha \leq 2d_{X_\alpha}$ となる。よって (4.3) と (4.4) より次を得る。

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \Gamma_{M_\alpha}(\mathcal{B}_M)) \simeq \begin{cases} \mathbb{C}_{M_\alpha}^{l_0} & (\dim M_\alpha = d_{X_\alpha} \text{であるとき}), \\ 0 & (\dim M_\alpha \neq d_{X_\alpha} \text{であるとき}). \end{cases}$$

よって補題 3.7 より題意を得る。 □

5 局所解への帰着

この章ではホロノミック $\mathcal{D}$ 加群の佐藤超関数解空間の次元が、台が一つの滑層に含まれる局所的な解の空間の次元の和で抑えられることを示す。

補題 5.1 M を実解析多様体とし X をその複素化とする。また $\mathfrak{M}$ を X 上の $\mathcal{D}_X$ 加群とし $X = \bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ を $\mathfrak{M}$ に関して正則な X の滑層分割とする。任意の $\alpha \in A$ に対し $M_\alpha := M \cap X_\alpha$ とおく。ある $\alpha_0 \in A$ に対し M_{α_0} の連結成分の一つ M_0 が閉集合であると仮定する。このとき $x_0 \in M_0$ と $U_0 := M\backslash M_0$ に対して次が成り立つ。

$$\begin{aligned}\dim \Gamma(M; \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_M)) \le{}& \dim \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \Gamma_{M_0}(\mathcal{B}_M))_{x_0} \\ &+ \dim \Gamma(U_0; \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_M)).\end{aligned} \tag{5.1}$$

証明 M_0 は閉集合 $M_{\alpha 0}$ の連結成分なので閉集合となることを注意しておく。関手 Γ_{M_0} の定義より $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \Gamma_{M_0}(\mathcal{B}_M))$ の台は M_0 に含まれるので $\iota_{M_0} : M_0 \hookrightarrow M$ を閉埋め込みとして次が成り立つ。

$$\Gamma(M; \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \Gamma_{M_0}(\mathcal{B}_M)) \simeq \Gamma(M_0; \iota_{M_0}^{-1}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \Gamma_{M_0}(\mathcal{B}_M)) \tag{5.2}$$

また M_0 の定義より $\iota_{M_0}^{-1}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \Gamma_{M_0}(\mathcal{B}_M))$ は M_0 上の局所定数層である（例えば [8, Thm. 5.1.7] 参照)。よって M_0 が連結なことより茎を取る射

$$\Gamma(M_0; \iota_{M_0}^{-1}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \Gamma_{M_0}(\mathcal{B}_M)) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \Gamma_{M_0}(\mathcal{B}_M))_{x_0} \tag{5.3}$$

は単射である。従って (5.2) と (5.3) により (5.1) を示すためには次を示せば十分である。

$$\begin{aligned}\dim \Gamma(M; \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_M)) \le{}& \dim \Gamma(M; \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \Gamma_{M_0}(\mathcal{B}_M)) \\ &+ \dim \Gamma(U_0; \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_M)).\end{aligned} \tag{5.4}$$

$j : U_0 \to M$ を開埋め込みとすれば補題 3.2 により次の完全列が存在する。

$$0 \to \Gamma_{M_0}(\mathcal{B}_M) \to \mathcal{B}_M \to j_* j^{-1}(\mathcal{B}_M). \tag{5.5}$$

左完全関手 $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \cdot)$ を (5.5) に適用することで次を得る。

$$0 \to \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \Gamma_{M_0}(\mathcal{B}_M)) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_M) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, j_* j^{-1}(\mathcal{B}_M)).$$

ここで最後の項について次のような同型が存在する (例えば [16, Cor. 2.3.4] 参照)。

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, j_* j^{-1}(\mathcal{B}_M)) \simeq j_* \mathcal{H}om_{j^{-1}\mathcal{D}_X}(j^{-1}\mathfrak{M}, j^{-1}(\mathcal{B}_M)).$$

よって左完全関手 $\Gamma(M; \cdot)$ を (5.5) に適用することで次を得る。

$$\begin{aligned}0 \to \Gamma(M; \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \Gamma_{M_0}(\mathcal{B}_M)) \to{}& \Gamma(M; \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_M)) \\ &\to \Gamma(U_0; \mathcal{H}om_{j^{-1}\mathcal{D}_X}(j^{-1}\mathfrak{M}, j^{-1}(\mathcal{B}_M))).\end{aligned} \tag{5.6}$$

ここで最後の項について

$$\Gamma(U_0;\mathcal{H}om_{j^{-1}\mathcal{D}_X}(j^{-1}\mathfrak{M}, j^{-1}(\mathcal{B}_M))) = \Gamma(U_0;\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_M))$$

に注意すれば、(5.6) より (5.4) を得る。 □

命題 5.2 M を実解析多様体とし X をその複素化とする。また $\mathfrak{M}$ を X 上のホロノミック $\mathcal{D}_X$ 加群とし $X = \bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ を $\mathfrak{M}$ に関して正則な X の滑層分割とする。$M_\alpha := M\cap X_\alpha$ とおき $M_\alpha = \bigsqcup_{k\in K_\alpha} M_\alpha^{(k)}$ を M_α の連結成分への分割とし $x_\alpha^{(k)} \in M_\alpha^{(k)}$ とする。このとき $\#A < \infty$ かつ各 $\alpha \in A$ に対して $\#K_\alpha < \infty$ であれば次が成り立つ。

$$\dim\Gamma(M;\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_M)) \le \sum_{\alpha,k} \dim\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \Gamma_{M_\alpha^{(k)}}(\mathcal{B}_M))_{x_\alpha^{(k)}}. \tag{5.7}$$

特に命題 4.1 により次を得る。

$$\dim\Gamma(M;\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_M)) \le \sum_{\alpha\in A} \#K_\alpha \mathrm{mult}^{\mathcal{D}_X}_{T^*_{X_\alpha}X}(\mathfrak{M}). \tag{5.8}$$

証明 仮定 $\#A < \infty$ と $\#K_\alpha < \infty$ よりある $\alpha_0 \in A$ と $k_0 \in K_{\alpha_0}$ が存在して $M_{\alpha_0}^{(k_0)}$ は M の中で閉集合であるとしてよい。$x_{\alpha_0}^{(k_0)} \in M_{\alpha_0}^{(k_0)}$ をとり $U_0 := M\backslash M_{\alpha_0}^{(k_0)}$ とおく。すると補題 5.1 より次を得る。

$$\begin{aligned}\dim\Gamma(M;\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_M)) \le{}& \dim\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \Gamma_{M_{\alpha_0}^{(k_0)}}(\mathcal{B}_M))_{x_{\alpha_0}^{(k_0)}} \\ &+ \dim\Gamma(U_0;\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_M)).\end{aligned} \tag{5.9}$$

再び仮定 $\#A < \infty$ と $\#K_\alpha < \infty$ より $M_{\alpha_1}^{(k_1)}$ が $M\backslash M_{\alpha_0}^{(k_0)}$ の中で閉集合となる $\alpha_1 \in A$ と $k_1 \in K_{\alpha_1}$ が存在する。$X_0 := X\backslash M_{\alpha_0}^{(k_0)}$ とおき $\iota_{X_0} : X_0 \hookrightarrow X$ を開埋め込みとすると $\iota_{X_0}^{-1}(\mathfrak{M})$ は X_0 上のホロノミック $\mathcal{D}_{X_0}$ 加群であり、$X_0 = \bigsqcup_{\alpha\in A}(X_\alpha \cap X_0)$ は $\iota_{X_0}^{-1}(\mathfrak{M})$ に関して正則な X_0 の滑層分割である。よって $U_1 := M\backslash(M_{\alpha_0}^{(k_0)} \cup M_{\alpha_1}^{(k_1)})$ とおけば上と同じ議論により次を得る。

$$\begin{aligned}\dim\Gamma(U_0;\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_M)) \le{}& \dim\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \Gamma_{M_{\alpha_1}^{(k_1)}}(\mathcal{B}_M))_{x_{\alpha_1}^{(k_1)}} \\ &+ \dim\Gamma(U_1;\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_M)).\end{aligned} \tag{5.10}$$

以下この議論を繰り返すことで、題意を得る。 □

6 群不変な超関数の空間の次元の一様有界性

この章では群不変な超関数の空間の次元が一様有界となることを保証する定理 2.5 を示す。そのために次の J. P. Serre の Galois コホモロジーの理論による次の結果を引用する。

事実 6.1 ([22, Thm. 5 in Chap. III, Sect. 4.4])**.** K を完全体とし $\overline{K}$ をその代数閉体とする。また K の Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ は任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して指数 n となる開部分群を有限個しか持たないとする。G を K 上定義された代数群とし X を G の等質多様体とする。このとき $\#(G(K)\backslash X(K)) < \infty$ が成り立つ。ここで $G(K), X(K)$ はそれぞれ G と X の K 点全体の集合である。

注釈 6.2. 実数体 $\mathbb{R}$ は事実 6.1 の仮定をみたす。

定理 *2.5* の証明　$U(\mathfrak{h})$ を $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の普遍包絡環とする。X への $H_{\mathbb{C}}$ 作用はリー環の射 $a : U(\mathfrak{h}) \to \mathcal{D}_X$ を誘導する。これにより $\mathcal{D}_X$ を右 $U(\mathfrak{h})$ 加群とみなすことで、連接 $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathfrak{M}_\tau$ を次で定義する（cf. Beilinson-Bernstein localization [1]）。

$$\mathfrak{M}_\tau := \mathcal{D}_X \otimes_{U(\mathfrak{h})} \tau^\vee. \tag{6.1}$$

すなわち次で定義する。

$$\mathfrak{M}_\tau = \mathcal{D}_X \otimes_{\mathbb{C}_X} \tau^\vee / I_{\tau^\vee}. \tag{6.2}$$

ここで $I_{\tau^\vee}$ は次で定義される $\mathcal{D}_X \otimes \tau^\vee$ の $\mathcal{D}_X$ 部分加群である

$$I_{\tau^\vee} := \sum_{H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}, v \in \tau^\vee} \mathcal{D}_X \cdot (a(H) \otimes v - 1 \otimes \tau^\vee(H)v) \tag{6.3}$$

仮定 $\#(H_{\mathbb{C}}\backslash X) < \infty$ により $\mathfrak{M}_\tau$ はホロノミック $\mathcal{D}_X$ 加群となる。特に X の $H_{\mathbb{C}}$ による軌道分解を $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ とすれば $\mathfrak{M}_\tau$ に対して正則な滑層分割として $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ がとれる (cf. [8, Thm. 5.1.12])。また $\mathcal{B}_M \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X, \mathcal{B}_M)$ に注意すれば Hom とテンソル積の随伴性より次の同型を得る。

$$\begin{aligned}
(\Gamma(M; \mathcal{B}_M) \otimes \tau)^{\mathfrak{h}} &\simeq (\Gamma(M; \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X, \mathcal{B}_M)) \otimes \tau)^{\mathfrak{h}} \\
&\simeq (\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X, \mathcal{B}_M) \otimes \tau)^{\mathfrak{h}} \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{h})}(\tau^\vee, \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X, \mathcal{B}_M)) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X \otimes_{U(\mathfrak{h})} \tau^\vee, \mathcal{B}_M) \\
&\simeq \Gamma(M; \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}_\tau, \mathcal{B}_M)).
\end{aligned} \tag{6.4}$$

$M_\alpha := M \cap X_\alpha$ とおき $M_\alpha = \bigsqcup_{k \in K_\alpha} M_\alpha^{(k)}$ を M_α の連結成分への分割とする。仮定より $\#A = \#(H_{\mathbb{C}}\backslash X) < \infty$ である。また X_α は $H_{\mathbb{C}}$ の等質多様体なので事実 6.1 より任意の $\alpha \in A$ に対して $\#K_\alpha < \infty$ である。よって命題 5.2 と (6.4) により次を得る。

$$\dim(\Gamma(M; \mathcal{B}_M) \otimes \tau)^{\mathfrak{h}} \leq \sum_{\alpha \in A} \#K_\alpha \mathrm{mult}^{\mathcal{D}_X}_{T^*_{X_\alpha} X}(\mathfrak{M}_\tau). \tag{6.5}$$

よって定理 2.5 は下の補題 6.3 から従う。 □

補題 6.3　$\mathfrak{M}_\tau$ を (6.1) で定義された $\mathcal{D}_X$ 加群とする。このとき任意の $\alpha \in A$ に対して τ によらない $C_\alpha > 0$ が存在し次を満たす。

$$\mathrm{mult}^{\mathcal{D}_X}_{T^*_{X_\alpha}X}(\mathfrak{M}_\tau) \leq \dim\tau \cdot C_\alpha.$$

この補題 6.3 の証明のために少し準備をする。$\mathcal{D}_X$ のフィルトレーション $\mathcal{F}$ は $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{D}_X \otimes \tau^\vee$ の連接フィルターを誘導し、さらにこれは $\mathfrak{M}_\tau$ と $I_{\tau^\vee}$ の連接フィルターも誘導する。これらのフィルターも $\mathcal{F}$ と書くことにする。すなわち

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_j(\mathcal{D}_X \otimes \tau^\vee) &:= \mathcal{F}_j(\mathcal{D}_X) \otimes \tau^\vee, \\
\mathcal{F}_j(\mathfrak{M}_\tau) &:= (\mathcal{F}_j(\mathcal{D}_X \otimes \tau^\vee) + I_{\tau^\vee})/I_{\tau^\vee}, \\
\mathcal{F}_j(I_{\tau^\vee}) &:= \mathcal{F}_j(\mathcal{D}_X \otimes \tau^\vee) \cap I_{\tau^\vee}.
\end{aligned}$$

とする。このとき $gr_\mathcal{F}(\mathfrak{M}_\tau) \simeq gr_\mathcal{F}(\mathcal{D}_X \otimes \tau^\vee)/gr_\mathcal{F}(I_{\tau^\vee})$ が成り立つことを注意しておく。

補題 6.4　τ によらない $\mathcal{O}_{T^*X}$ 加群 $\mathfrak{N}$ が存在して次の二条件を満たす。

1. $\dim\mathrm{supp}\,(\mathfrak{N}) \leq d_X$
2. $\mathcal{O}_{T^*X}$ 加群としての全射 $F(gr_\mathcal{F}(\mathfrak{M}_\tau)) \twoheadleftarrow \mathfrak{N} \otimes \tau^\vee$ が存在する。

この補題の証明の前に、補題 6.3 を示す。

補題 *6.3* の証明　$\mathrm{mult}^{\mathcal{D}_X}_{T^*_{X_\alpha}X}(\cdot)$ の定義により

$$\mathrm{mult}^{\mathcal{D}_X}_{T^*_{X_\alpha}X}(\mathfrak{M}_\tau) = \mathrm{mult}^{\mathcal{O}_{T^*X}}_{T^*_{X_\alpha}X}(F(\mathfrak{M}_\tau))$$

となる。ここで $\mathrm{mult}^{\mathcal{O}_{T^*X}}_{T^*_{X_\alpha}X}(\cdot)$ はその台の次元が高々 d_X であるような $\mathcal{O}_{T^*X}$ 加群からなる短完全列にたいして加法的であること [3, Sect. 1.5 in Appx. V] と $\mathcal{O}_{T^*X}$ 加群としては $\mathfrak{N} \otimes \tau^\vee \simeq \mathfrak{N}^{\dim\tau}$ であることに注意すれば補題 6.4 により次を得る。

$$\mathrm{mult}^{\mathcal{D}_X}_{T^*_{X_\alpha}X}(\mathfrak{M}_\tau) \leq \mathrm{mult}^{\mathcal{O}_{T^*X}}_{T^*_{X_\alpha}X}(\mathfrak{N} \otimes \tau^\vee) = \dim\tau \cdot \mathrm{mult}^{\mathcal{O}_{T^*X}}_{T^*_{X_\alpha}X}(\mathfrak{N}).$$

$C_\alpha := \mathrm{mult}^{\mathcal{O}_{T^*X}}_{T^*_{X_\alpha}X}(\mathfrak{N})$ とおくことで題意を得る。 □

この章の残りで補題 6.4 を証明する。任意の $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して σ_j を主要表象をとる射 $\mathcal{F}_j(\mathcal{D}_X) \to \mathcal{F}_j(\mathcal{D}_X)/\mathcal{F}_{j-1}(\mathcal{D}_X) \hookrightarrow gr_\mathcal{F}(\mathcal{D}_X)$ とする。また同じ記号 σ_j で射 $\mathcal{F}_j(\mathcal{D}_X \otimes \tau^\vee) \to gr_\mathcal{F}(\mathcal{D}_X \otimes \tau^\vee)$ も表すこととする。

補題 6.5　任意の $H \in \mathfrak{h}_\mathbb{C}$ と $v \in \tau^\vee$ に対して次が成り立つ。

$$\sigma_1(a(H) \otimes v - 1 \otimes \tau^\vee(H)v) = \sigma_1(a(H)) \otimes v.$$

証明　$a(H) \otimes v \in \mathcal{F}_1(\mathcal{D}_X \otimes \tau^\vee)$ と $1 \otimes \tau^\vee(H)v \in \mathcal{F}_0(\mathcal{D}_X \otimes \tau^\vee)$ より明らか。 □

補題 *6.4* の証明　$I_{\tau^\vee}$ は $\{a(H)\otimes v-1\otimes\tau^\vee(H)v \mid H\in\mathfrak{h}_\mathbb{C}, v\in\tau^\vee\}$ で生成される $\mathcal{D}_X\otimes\mathcal{V}_{\tau^\vee}$ の部分加群であったことに注意すれば

$$gr_\mathcal{F}(I_{\tau^\vee})\supset\sum_{H\in\mathfrak{h}_\mathbb{C},v\in\tau^\vee} gr_\mathcal{F}(\mathcal{D}_X)\cdot\sigma_1(a(H)\otimes v-1\otimes\tau^\vee(H)v)$$

を得る (cf. [9, Chap. 2])。よって補題 6.5 より次を得る。

$$gr_\mathcal{F}(I_{\tau^\vee})\supset gr_\mathcal{F}(\mathcal{D}_X)\cdot(\sigma_1(a(\mathfrak{h}_\mathbb{C}))\otimes\tau^\vee).$$

この包含関係は次の全射を誘導する。

$$\frac{gr_\mathcal{F}(\mathcal{D}_X\otimes\tau^\vee)}{gr_\mathcal{F}(I_{\tau^\vee})}\twoheadleftarrow\frac{gr_\mathcal{F}(\mathcal{D}_X\otimes\tau^\vee)}{gr_\mathcal{F}(\mathcal{D}_X)(\sigma_1(a(\mathfrak{h}_\mathbb{C}))\otimes\tau^\vee)}=\left(\frac{gr_\mathcal{F}(\mathcal{D}_X)}{gr_\mathcal{F}(\mathcal{D}_X)\sigma_1(a(\mathfrak{h}_\mathbb{C}))}\right)\otimes\tau^\vee. \tag{6.6}$$

この左辺は $gr_\mathcal{F}(\mathfrak{M}_\tau)$ と等しい。$\mathcal{O}_{T^*X}$ 加群 $\mathfrak{N}$ を $\mathfrak{N}:=\mathcal{O}_{T^*X}/\mathcal{O}_{T^*X}\cdot\sigma_1(a(\mathfrak{h}))$ で定義する。(3.6) の右完全関手 F を全射 (6.6) に適用すれば題意の全射

$$F(gr_\mathcal{F}(\mathfrak{M}_\tau))\twoheadleftarrow\mathcal{O}_{T^*X}\otimes_{\pi^{-1}(gr(\mathcal{D}_X))}\pi^{-1}\left(\frac{gr_\mathcal{F}(\mathcal{D}_X)}{gr_\mathcal{F}(\mathcal{D}_X)\sigma_1(a(\mathfrak{h}_\mathbb{C}))}\right)\otimes\tau^\vee\simeq\mathfrak{N}\otimes\tau^\vee$$

を得る。次に $\dim\operatorname{supp}(\mathfrak{N})\le d_X$ を示す。$X=\coprod_{\alpha=0}^N X_\alpha$ を X の $H_\mathbb{C}$ の作用による軌道分解とすれば仮定により $N=\#(H_\mathbb{C}\backslash X)<\infty$ である。従って $\operatorname{supp}(\mathfrak{N})$ は $\bigcup_{\alpha=0}^N T^*_{X_\alpha}X$ に含まれる (cf. [8, Thm. 5.1.12]) 。$\dim T^*_{X_\alpha}X=d_X$ より $\dim\operatorname{supp}(\mathfrak{N})\le d_X$ を得る。 □

7　定理 2.3 の証明

この章では定理 2.5 を用いて、定理 2.3 を証明する。そのために次の、絡作用素の不変超関数による特徴づけを引用する。

事実 7.1 ([16, Prop. 3.2])**.** G と実リー群とし G' と H をその閉部分群とする。また H' を G' 閉部分群とし、$\tau\in\hat{H}_\mathrm{f},\tau'\in\hat{H}'_\mathrm{f}$ とする。

(1) 次の自然な単射が存在する。

$$\operatorname{Hom}_{G'}(C^\infty(G/H,\tau),C^\infty(G'/H',\tau'))\hookrightarrow\left(\mathcal{D}'(G/H,\tau^\vee\otimes\mathbb{C}_{2\rho})\otimes\tau'\right)^{H'}. \tag{7.1}$$

ここで $\tau^\vee$ は τ の反傾表現を、$\mathbb{C}_{2\rho}$ は $h\mapsto|\det(\mathrm{Ad}(h):\mathfrak{g}/\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}/\mathfrak{h})|^{-1}$ で定まる H の一次元表現を表した。

(2) もし $H\subset G$ が余コンパクトであるなら (7.1) は全射である。

定理 *2.3* の証明　事実 7.1 より次を得る。

$$\operatorname{Hom}_G(C^\infty(G/Q,\eta),C^\infty(G/H,\tau))\simeq(\mathcal{D}'(G/Q,\eta^\vee\otimes\mathbb{C}_{2\rho})\otimes\tau)^H \tag{7.2}$$

また Q を $\mathcal{D}'(G)$ に右から作用させ $\mathcal{D}'(G) \otimes (\eta^\vee \otimes \mathbb{C}_{2\rho})$ を Q のテンソル表現と見ることで次の同型を得る。

$$\mathcal{D}'(G/Q, \eta^\vee \otimes \mathbb{C}_{2\rho}) \simeq (\mathcal{D}'(G) \otimes (\eta^\vee \otimes \mathbb{C}_{2\rho}))^Q .$$

よって H と Q をそれぞれ $\eta^\vee \otimes \mathbb{C}_{2\rho}$ と τ に自明に作用させると次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
(7.2) &\simeq \left((\mathcal{D}'(G) \otimes (\eta^\vee \otimes \mathbb{C}_{2\rho}))^Q \otimes \tau \right)^H \\
&\simeq (\mathcal{D}'(G) \otimes (\eta^\vee \otimes \mathbb{C}_{2\rho}) \otimes \tau)^{H \times Q} \\
&\subset (\mathcal{D}'(G) \otimes (\eta^\vee \otimes \mathbb{C}_{2\rho}) \otimes \tau)^{\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}} \\
&\subset (\mathcal{B}_G(G) \otimes (\eta^\vee \otimes \mathbb{C}_{2\rho}) \otimes \tau)^{\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}} .
\end{aligned}$$

よって定理 2.5 より定理 2.3 が従う。 □

参考文献

[1] A. Beilinson, J. Bernstein, Localisation de $\mathfrak{g}$-modules, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **292** (1981), no. 1, 15–18.

[2] F. Bien, Orbit, multiplicities, and differential operators, Representation theory of groups and algebras, 199–227, Contemp. Math., **145**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[3] J. -E. Björk, Analytic D-modules and Applications, Mathematics and its Applications, **247**. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993. xiv+581 pp.

[4] M. Brion, Quelques propriétés des espaces homogènes sphériques, Manuscripta Math. **55** (1986), no. 2, 191–198.

[5] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku Math. J. (2) **9** (1957), 119–221.

[6] Harish-Chandra, Representations of semisimple Lie groups. II, Trans. Amer. Math. Soc. **76** (1954), 26–65.

[7] M. Kashiwara, On the Maximally Overdetermined System of Linear Differential Equations I, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **10** (1974/75), 563–579.

[8] M. Kashiwara, Systems of Microdifferential Equations, Progr. Math. **34**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1983. xv+159 pp.

[9] M. Kashiwara, D-modules and microlocal calculus, Translations of Mathematical Monographs, **217**. Iwanami Series in Modern Mathematics. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003. xvi+254 pp.

[10] M. Kashiwara, T. Kawai, On holonomic systems of microdifferential equations. III. Systems with regular singularities, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **17** (1981), no. 3, 813–979.

[11] M. Kashiwara, P. Schapira, Sheaves on manifolds, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], **292**. Springer-Verlag, Berlin, 1990. x+512 pp.

[12] B. Kimelfeld, Homogeneous domains on flag manifolds, J. Math. Anal. Appl. **121** (1987), no. 2, 506–588.

[13] T. Kobayashi, Introduction to harmonic analysis on real spherical homogeneous spaces, Proceedings of the 3rd Summer School on Number Theory "Homogeneous Spaces and Automorphic Forms" in Nagano (F. Sato, ed.), 1995, 22–41 (in Japanese).

[14] T. Kobayashi, Shintani functions, real spherical manifolds, and symmetry breaking operators, Developments in Mathematics **37** (2014), 127–159.

[15] T. Kobayashi, T. Oshima, Finite multiplicity theorems for induction and restriction, Adv. Math. **248** (2013), 921–944.

[16] T. Kobayashi, B. Speh, Symmetry Breaking for Representations of Rank One Orthogonal Groups, Mem. Amer. Math. Soc. **238** (2015), no. 1126, v+110 pp.

[17] T. Tauchi, Dimension of the space of the intertwining operators from degenerate principal series representations, Selecta Math. (N.S.) **24** (2018), no. 4, 3649–3662.

[18] T. Tauchi, Multiplicity of a degenerate principal series for homogeneous spaces with infinite orbits, RIMS Kokyuroku, **2077** (2018), 1–9.

[19] T. Matsuki, Orbits on flag manifolds, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990), 807–813, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991.

[20] M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara, Microfunctions and pseudo-differential equations, Hyperfunctions and pseudo-differential equations (Proc. Conf., Katata, 1971; dedicated to the memory of André Martineau), pp. 265–529. Lecture Notes in Math., Vol. 287, Springer, Berlin, 1973.

[21] M. Sato, Theory of hyperfunctions, II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. I, **8** (1960), 387–437.

[22] J. P, Serre, Cohomologie galoisienne, Fifth edition, Lecture Notes in Mathematics, **5**. Springer-Verlag, Berlin, 1994. x+181 pp.

[23] H. Whitney, Tangents to an analytic variety, Ann. of Math. **81** (1964), 496–549.

[24] È. B. Vinberg, Complexity of action of reductive groups, Func. Anal. Appl. **20** (1986), 1–11.