折り目写像のはめ込み埋め込みや折り目写像への持ち上げ
LIFTING FOLD MAPS TO IMMERSIONS, EMBEDDINGS AND FOLD MAPS

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
INSTITUTE OF MATHEMATICS FOR INDUSTRY
北澤 直樹
NAOKI KITAZAWA

本稿では, 京都大学数理解析研究所 RIMS 共同研究 (公開型) 研究集会「可微分写像の特異点論を用いたトポロジー・微分幾何学の研究」の講演者の講演に関連した内容を, 講演で発表したもの, しなかったものを含め説明させて頂く. 関連する講演者のプレプリント [18] や [20] の内容の紹介でもある.

なお, 講演後の助言など考慮しタイトルを少々変更した.

また, 同時期に研究集会「結び目の数理」

(http://www.f.waseda.jp/taniyama/mathsciknot/mathsciknot.html) で講演させて頂いた際の報告 ([17]) 等といくらか記述が重複することも断っておく.

講演と同様多くの (可微分) 多様体や可微分写像を扱うが, 特に断りのない限り, 考えている多様体や写像さらには多様体上の多様体をファイバーとする束はすべて可微分 (C^∞ 級) とする. 以下用語をいくつか説明する.

(可微分) 写像の<u>特異点 (singular point)</u>とは, 微分が退化している点つまり微分の階数が最大でないような定義域多様体の点のことである. 定義域多様体の次元が値域のそれより低くないものを多く扱うが、微分の階数が値域の次元より低いような点ということになる. 写像の特異点全体の集合を<u>特異点集合 (singular set)</u>, 写像の特異点での値を<u>特異値 (singular value)</u>, 写像の特異点集合の像を<u>特異値集合 (singular value set)</u>, 特異値集合を値域多様体から除いた空間の点を<u>正則値 (regular value)</u>といい, 正則値全体の集合を<u>正則値集合 (regular value set)</u>と呼ぶこととする.

1. 滑らかな写像の持ち上げ

今後 $p > q \geq 1$ を整数とする. $\pi_{p,q} : \mathbb{R}^p \to: \mathbb{R}^q$ で $(x_1, \cdots, x_q, \cdots, x_p)$ を $(x_1, \cdots, x_q)$ へ写す, ユークリッド空間からより次元の低い別のユークリッド空間への自然な射影を表すこととする. $n \geq 1$ 次元ユークリッド空間への滑らかな写像 f について, ある自然数 k があり, f_0 という $\mathbb{R}^{n+k}$ への写像が $f = \pi_{n+k,n} \circ f_0$ を満たすとき, f_0 は f の<u>持ち上げ</u>であるとか, f は f_0 に<u>持ち上げられる</u>等という. 可微分写像, 特にジェネリックな可微分写像が, 適当な微分位相幾何的性質を満たす写像に持ち上げられるかどうかを知ること, 持ち上げられるとして持ち上げを構成することは, 可微分写像の大域的な特異点論, 多様体の微分位相幾何学への応用において基本的で重要な問題である. 例えば, 定義域多様体として円周を考え $\mathbb{R}^2$ へのジェネリックなはめ込みつまり正則で横断的な曲線をとったとき, それは $\mathbb{R}^3$ への埋め込みつまり古典的結び目に持ち上がる. このことは平面への射影で自然に得られる図式を用い結び目を研究するという, 基本的で重要な結び目のトポロジーの研究手法において, 基本的である.

これ以外に, ジェネリックな可微分写像で特別な条件を満たすものが, 埋め込みやはめ込みに持ち上げられるための条件, 持ち上げの構成が, いくつか具体的な状況で行われている.

- 2–3 次元多様体上の Morse 関数やそこから平面への良い写像 (後で定義する安定写像: 定義域多様体を固定すると平面へのものはたくさん存在する) が, あまり強くない条件のもと, 適当な次元のユークリッド空間への埋め込みやはめ込みへ持ち上がることが [8], [12], [38] や [39] で示されている.
- 同次元の多様体の間のジェネリックな可微分写像が, 1 次元高いユークリッド空間への埋め込みやはめ込みに適当な条件下で持ち上がることが, [26] や [1] で示されている.
- 様々な, special generic写像という, 見つかっていない 4 次元のエキゾチック球面以外のホモトピー球面を位相的に特徴づける特異点を丁度 2 個有する Morse 関数を自然に高次元化したものが, 適当な次元の埋め込みやはめ込みに持ち上がることが, [34] や [24] で考察されている. special generic 写像は後で定義する.

さて, 持ち上げが特異点を有している場合については, 値域多様体の次元が定義域多様体の次元よりも高くはない場合を含め意外にも新しい問題である. 著者は, Morse 関数の高次元版で最も単純だがある程度多くの多様体, 写像空間に存在するクラスである折り目写像について, 扱いやすいように特別な微分位相幾何的条件をつけた折り目写像について, 他の適当な条件をつけたクラスの折り目写像に持ち上げられるかを考え, 結果を得ており, いくつか講演で発表させて頂いた. 結果はプレプリント [18], [19], [20] 等にあるが, ここではまず [18] について得られた定理や証明 (の概略) を述べ, 一方で講演で後半に扱った [20] については証明等は省略させて頂き流れの紹介にとどめ, 詳しくは原プレプリントにゆだねる.

最後に, 著者の至らなさにより, 大変申し訳ないこと, 誤記や誤解等があるかもしれないが, それに気づいた場合は教えて下されば幸いである.

2. Spherical な Morse 関数, 折り目写像と基本的な性質.

2.1. **Spherical な Morse 関数.**

Definition 1. Morse 関数が以下を満たすとき, spherical であるという.

(1) 安定である, つまり各特異点で値が異なる.
(2) 正則値の逆像は点またはホモトピー球面で, 標準球体を境界の微分同相で貼り合わせてできるものの非交和.
(3) 特異値を内部に含む値域の小さな閉区間の逆像で, 特異点を含む成分は 1 個あるが, それは以下のいずれか.
  (a) 標準閉球体.
  (b) 標準球面から 3 個の交わらず埋め込まれた標準球面と同じ次元の閉球体の内部を除いたものと PL 同相な多様体.

特に, 正則値の逆像が点または標準球面の非交和であるとき, standard-spherical であるという,

Example 1. 以下 standard-spherical な Morse 関数の例を挙げる. FIGURE 4 に絵がある.

(1) ホモトピー球面 (で未発見の 4 次元のエキゾチック球面という未発見のもの以外のもの) を特徴づける, 特異点を丁度 2 個有する Morse 関数 (含標準球面の高さ関数).
(2) $S^1 \times S^k$ $(k \geq 1)$ 上の自然な高さ関数.

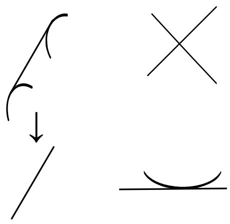

FIGURE 1. 折り目写像の特異点集合の一部と像 (左), 特異値集合の一部分と像 (平面への場合で右上が安定な場合右下が不安定な場合).

Definition 2. 任意の特異点 p について, 整数 $0 \leq i(p) \leq \frac{m-n+1}{2}$ があり $(x_1, \cdots x_m) \mapsto (x_1, \cdots, x_{n-1}, \sum_{k=n}^{m-i(p)} {x_k}^2 - \sum_{k=m-i(p)+1}^{m} {x_k}^2)$ の型で表されるような可微分写像を折り目写像という.

Proposition 1. (1) Definition 1 で $i(p)$ は一意である (p の 指数と呼ばれる).
(2) (決まった指数の) 特異点全体の集合は, $n-1$ 次元の閉部分多様体で, そこへもとの写像を制限するとはめ込みになる.

Definition 3. 全ての特異点の指数が 0 であるような折り目写像を, special generic 写像という.

安定写像とは, 簡単にいうと, 少し摂動しても特異点集合や特異値集合の型が変わらない可微分写像である. そして, 安定な折り目写像とは, 特異点集合への制限が横断的なはめ込みであるような折り目写像ということになる. FIGURE 1 も参考のこと. より一般に, 安定写像の特異点論的, 幾何学的理論の基本的な部分は, [7] 等を参考にするのが良いが, 一応一つ重要なこと, **安定写像はある程度の定義域の次元と値域の次元の組では, 少なくとも例えば値域の次元が 5 以下である場合には, 稠密に存在することに**触れておく.

Example 2. FIGURE 7 にあるが, 次元 2 以上の単位球面のより次元の低いユークリッド空間への自然な射影は, 安定な special generic 写像の最も単純な例である. $S^2 \times S^k$ $(k \geq 1)$ 上の具体的な安定な折り目写像も同じ FIGURE においてあげている: これは [13] や [14] で標準球面上のホモトピー球面をファイバーとする束の全空間を特徴づけるのに出てくる写像の特別なものである.

3. ユークリッド空間への SPECIAL GENERIC 写像を許容する多様体の特徴づけと, SPECIAL GENERIC 写像の埋め込みやはめ込みへの持ち上げ.

Fact 1 (Saeki (1993))**.** $m > n$ を自然数とする. M を閉多様体とする. special generic 写像 $f : M \to \mathbb{R}^n$ があることは, n 次元のコンパクトな多様体 P で $\partial P \neq \emptyset$ が成り立ち $\mathbb{R}^n$ にはめ込めるものがあり, M が次の多様体を境界上に自然に出てくる S^{m-n} をファイバーとする同じ底空間 ∂P 上の束の同値写像で貼り合わせてできることと同値.

- P 上の S^{m-n} をファイバーとする束の全空間.
- 線形な D^{m-n+1} をファイバーとする ∂P 上の束の全空間.

多様体 P が, 後で定義する special generic 写像 f の Reeb 空間 W_f, つまり逆像の連結成分からなる空間となるわけである. FIGURE 2 も参照のこと.

まず平面への special generic 写像について具体例や基本的性質を説明する.

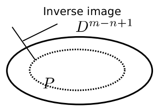

FIGURE 2. special generic 写像の像.

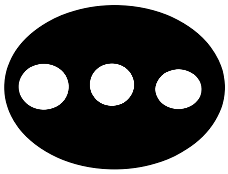

FIGURE 3. 平面への具体的な special generic 写像の像 (定義域多様体は, S^1 上の, 標準球体を境界の微分同相写像で貼り合わせて得られるホモトピー球面をファイバーとする束の全空間 3 個の連結和として表されるもの).

Example 3. (1) 特異点集合に制限すると埋め込みで特異値集合が標準球面であり像が球体であるもの. 2 次元以上の (4 次元で標準球面でないもの以外の) 球面と位相的に等しい可微分多様体は, 平面への同様の像を有する special generic 写像を有し, 逆にそういった写像を許容する多様体はそういった多様体となる ([27]).

(2) 二個の球面の直積 ([27] 他 : 直積ではなく一般に捩じれた束の全空間でもよい) の連結和として表現される多様体上の、像が標準球面と標準球体の直積の境界連結和として表現され特異値集合が境界に一致する special generic 写像 (FIGURE 3).

平面や $\mathbb{R}^3$ への special generic 写像を許容する多様体の特徴づけについては, 多くの結果がある.

Fact 2. (1) ([27]) $m \geq 2$ 次元以上の連結閉多様体が, 平面への special generic 写像を許容する必要十分条件は, それが以下の多様体の連結和になることである.

(a) 「標準球面」または「標準球面と微分同相でなくかつ 4 次元でないホモトピー球面」.

(b) 円周と, 「標準球面」または「標準球面と微分同相でなくかつ 4 次元でないホモトピー球面」の直積.

(c) 円周上の, 「標準球面」または「標準球面と微分同相でなくかつ 4 次元でないホモトピー球面」をファイバーとする束の全空間で向きづけ不可能なもの.

(2) ([31]) 4 次元の連結閉多様体で基本群が自由群であるものが, $\mathbb{R}^3$ への special generic 写像を許容する必要十分条件は, それが S^4 または S^1 上の S^3 束の全空間または S^2 上の S^2 束の全空間の連結和として表現されることである.

以下二つの Fact は, special generic 写像が定義域多様体の可微分構造を制限するという, special generic 写像の面白さが見え隠れする事実である.

Fact 3 ([27] etc.)**.** m, n を自然数で $1 \leq m - n \leq 3$ を満たすものとする. このとき, $\mathbb{R}^n$ への special generic 写像を許容する m 次元ホモトピー球面は必ず標準球面である.

Fact 4 ([37])**.** 向きの入った 7 次元ホモトピー球面の微分同相型 28 個のうち 14 個の型のものは $\mathbb{R}^3$ への special generic 写像を許容しない.

ホモトピー球面は自身より次元の高くないユークリッド空間への折り目写像を許容することに触れておく ([5] や [6] を参照のこと).

[31] や [32] 等でもう少し複雑なクラスの多様体, 例えば Fact 2 (2) や Corollary 1 に出てくるような多様体で, 同様の事実, つまり同相な多様体の組で, どちらも決まった次元のユークリッド空間への折り目写像は許容するが, special generic 写像については一方のみ許容するものが, たくさんあるという事実が, 突き止められている.

[34] で得られている結果として, 値域が 1–2 次元の場合の special generic 写像の埋め込みやはめ込みへの持ち上げに関するものを紹介しておく.

Fact 5 (Saeki and Takase [34])**.** ホモトピー球面の special generic 関数は, 定義域より 1 次元高いユークリッド空間へのはめ込みに持ち上げられる. また定義域の次元が 5 でないとき, 定義域より 1 次元高いユークリッド空間へ持ち上がるための必要十分条件は, 定義域多様体が標準球面であることである.

Fact 6 (Saeki and Takase [34])**.**
(1) 向き付け可能な $m \geq 2$ 次元の閉多様体上の平面への special generic 写像は, $m+1$ 次元のユークリッド空間へのはめ込みに持ち上がる. 埋め込みに持ち上がるための必要十分条件は, 定義域多様体が円周と標準球面の直積の連結和で表されることである.
(2) 向き付け不可能な $m \geq 2$ 次元の閉多様体上の平面への special generic 写像が $m+1$ 次元のユークリッド空間へのはめ込みに持ち上がるための必要十分条件は, 以下の二つを満たすことである.
   - $m = 2, 4, 8$.
   - 特異点集合の法束が自明.

4. Spherical Morse 関数のはめ込みや special generic 写像への持ち上げに関する問題と結果.

[18] の紹介を行う.

Theorem 1. 向き付け可能な standard-spherical Morse 関数は, 定義域より 1 次元高いユークリッド空間へのはめ込みに持ち上がる. 向き付け不可能な 1, 3, 7 次元の standard-spherical Morse 関数は, 定義域より 1 次元高いユークリッド空間へのはめ込みに持ち上がる.

Proof. 証明は, Fact 5 の証明に少し議論を追加しただけの方法でできる. まず, FIGURE 6 が示すように, 各特異値の小さな閉近傍の逆像で特異点集合を含む連結成分を持ち上げる. FIGURE 4 にあるように, それぞれ単位球面の一部分である球体と 1 次元高いユークリッド空間に自然な形で埋め込まれた円周と標準球面の直積の一部分に持ち上げられる (前者は難しくないが後者が新しい部分であると同時に少し議論が必要: 原論文等参照のこと). 後は, 残りの部分は標準球面のはめ込みによるホモトピーで構成する. この部分は [11] の結果からできる. 加えて, 後者の向き付け不可能な場合には, いわゆる球面の裏返しがはめ込みのホモトピーで実現できるという事実を用いる. □

Definition 4. $k > 6, l \leq k$ を正の整数とし, 単位球体 $D^{k-1} \subset \mathbb{R}^{k-1}$ 上の微分同相写像で境界の各点を固定するようなものが, 微分同相写像 ϕ_0 で $\pi_{k-1,l-1}|_{D^{k-1}} \circ \phi_0 = \pi_{k-1,l-1}|_{D^{k-1}}$ を満たすものに境界の各点は固定したまま滑らかにイソトピックであるとする. ϕ の <u>Gromoll filtration number</u> はそのような l の最大値.

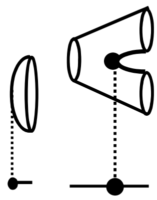

Figure 4. 特異値の小さな近傍の逆像で特異点を含む成分の持ち上げ.

Theorem 2. (1) 5 次元多様体上のものではない spherical Morse 関数は平面への special generic 写像に持ち上がる.
(2) m, n を, $m > n \geq 2$, $m \neq 5$ を満たす整数とする. $m \leq 6$ であるか, あるいは $m \geq 7$ で $m-1$ 次元標準球体の境界の各点を固定するような微分同相写像の Gromoll filtration number が常に $n-1$ より大きいとする. このとき m 次元閉多様体上の standard-spherical Morse 関数は, $\mathbb{R}^n$ への special generic 写像に持ち上がる.

Example 4. (1) 13 次元の spherical Morse 関数は, 平面, $\mathbb{R}^n$ $(n = 3, 4)$ への special generic 写像に持ち上がる. なお, D^{12} について境界の各点を固定するような微分同相写像の Gromoll filtration number は常に 3 より大きく, 境界を固定したままイソトピーを考えるとこのような微分同相写像のなす群の成分数は 3 であること, 12 次元ホモトピー球面は S^{12} と微分同相であることにふれておく ([4] 等も参照のこと).
(2) 7 次元ホモトピー球面上の special generic 関数で, $\mathbb{R}^3$ への special generic 写像に持ち上がらないものがある. Fact 4 からの帰結である. 実際, 前に触れていなかったが, Fact 4 について, [37] では Gromoll filtration number に関する議論がなされている.

実は, この結果は, [33] 等で取り上げられた以下の事実について, 逆の方向で考え出た結果であることを補足する.

Fact 7 ([33])**.** 適当な次元のユークリッド空間への安定な special generic 写像で, 特別な条件をみたすものに. 自然なより低い次元のユークリッド空間への射影を合成すると, それは正則値の逆像がホモトピー球面の非交和であるような安定写像となる.

特別な条件については詳しくは触れないが, 例えば関連して [30] では, Theorem 2 の最初の方の逆の話が, この事実を応用できる話としてある (後の方の逆についてはない).

Theorem 2 の証明の概略. まず, FIGURE 5 が示すように, 各特異値の小さな閉近傍の逆像で特異点集合を含む連結成分を持ち上げる. それぞれ FIGURE 4 の最初の図にある単位球面の一部分である球体を射影したものと 1 次元高いユークリッド空間に自然な形で埋め込まれた円周と標準球面の直積の一部分を自然に平面またはより高次元のユークリッド空間に射影したものに持ち上げられる (前者は難しくないが後者はやや議論が必要: 原論文や [29] の special generic 関数のコボルディズムに関する議論等を参照のこと). 後は, 残りの部分は special generic 関数の直積に持ち上げること, そして境界にでてくる special generic 関数を適切な微分同相写像で貼り合わせることで証明が終わる (同じく FIGURE 5 を参照のこと). これについては, 二つの定理のうち, 前者の場合は [2] の理論, 後者は Gromoll filtration number に関する仮定 (そしてそこから議論を掘り下げると従う [37] でなされた標準球面の微分同相写像の対称性に関する議論) で片付く. □

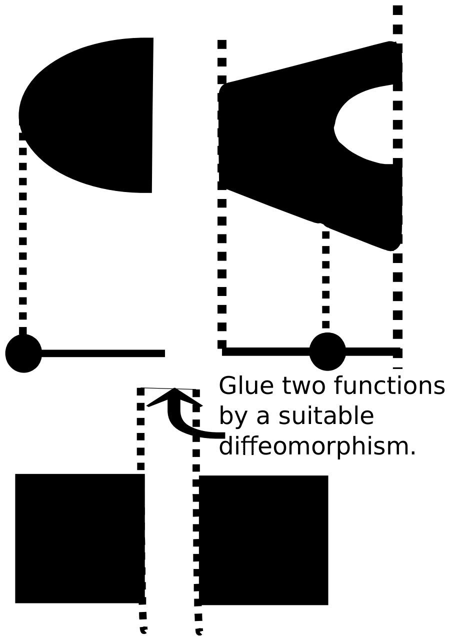

Figure 5. Spherical Morse 関数の special generic 写像への持ち上げの局所的な様相 (平面またはより高次元のユークリッド空間への写像の像).

関連して, 少し考察を加えると, 以下が分かる.

Theorem 3. (1) 向き付け可能な閉多様体上の spherical Morse 関数は, 定義域多様体より 1 次元高いユークリッド空間へのはめ込みに持ち上げられる.
(2) Theorem 1 で構成した. 向き付け不可能な閉多様体上の spherical Morse 関数の持ち上げとして得られた, 定義域多様体より 1 次元高いユークリッド空間へのはめ込みに, 平面への自然な射影を合成しても special generic 写像にはならない.

Remark 1. 詳しくは省略するが, プレプリント [19] では, [20] の後で少し言及する後の Theorem 4 の証明法に関わる少し新たな方法等, 向き付け不可能な閉多様体上の spherical Morse 関数の持ち上げについて新たなアプローチと結果を提示している.

では, 次の問題として,

Problem 1. Spherical Morse 関数を高次元化して似た問題を考えるとどうなるか ?

を考えたい.

その前に, 以前のセクションで簡単に定義を説明した Reeb 空間を定義から振り返り, セクション 6 で結果を述べる.

5. Reeb 空間

次に Reeb 空間について説明する. [25] 等も参照のこと.

Definition 5. 連続写像 $c : X \to Y$ について, X の 2 点が Y のある逆像の連結成分に入るときかつその時に限り, 同値であると定義することができるが, この同値関係で定義される X の商空間 W_c を, c の Reeb 空間と呼び, q_c で商写像を表す.

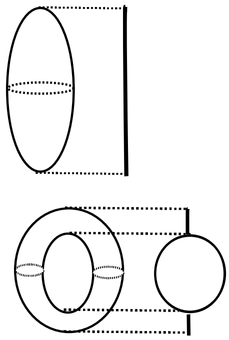

FIGURE 6. 基本的な Morse 関数と Reeb 空間

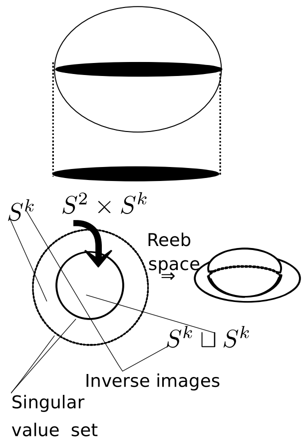

FIGURE 7. 具体的な折り目写像と Reeb 空間

Example 5. (1) FIGURE 6 の例. 最初のものは次元 2 以上の標準球面上の高さ関数, より一般にホモトピー球面上の特異点をちょうど 2 個有する Morse 関数と Reeb 空間. もう一つのものは $S^1 \times S^1$, もしくは一般に $S^1 \times S^k$ $(k \geq 2)$ 上の自然な高さ関数と Reeb 空間.

(2) FIGURE 7 の例. 次元 3 以上の単位球面の自然な射影と, $S^2 \times S^k$ $(k \geq 1)$ 上の具体的な折り目写像, それらの Reeb 空間. Example 2 で述べたこと, 後者の写像は, $n \geq 2$ 次元標準球面上のホモトピー球面をファイバーとする束の全空間として現れる多様体を特徴づけるための写像の特別なものである (値域の次元が一般次元になり中心部分の逆像がファイバーのホモトピー球面 2 個の非交和となる: そして写像の微分位相幾何学的な構造に関する自然な条件として, 正則値集合の中心部分の成分から値域と同じ次元の閉円板の内部と逆像を除いたものを考えると, 残りとして定まる写像が Morse 関数と値域より次元が 1 次元低い標準球面上の恒等写像の直積になっていることを課す).

Proposition 2. ([9], [22] etc.) 安定な折り目写像の Reeb 空間は, 値域の多様体と次元の等しい多面体であり, Reeb 空間への商写像は, 多様体と Reeb 空間に自然に定まる PL 構造に関し, PL 写像となる.

この事実は, より一般に安定写像やより広いクラスでいえる ([35] etc.).

6. Pseudo spherical 写像とその持ち上げから得られる special generic 写像.

セクション 4 の Problem 1 の問題について一つ解答を与える．詳細な証明等は [20] に委ねる．

まず, [33] で定義から整理され, (微分) 位相幾何学的な性質がいくつか調べられた安定な折り目写像のクラスを定義する．

Definition 6. m, n を整数で, $m > n = 1, 2$ と満たすとする．m 次元閉多様体上の安定な折り目写像 $f : M \to \mathbb{R}^n$ が, 以下を満たすとする．

(1) 正則値の逆像がホモトピー球面の非交和．
(2) 特異値を丁度 1 個含む, $\mathbb{R}^n$ 内の以下を満たす閉区間 I で以下を満たすものを考える．
  (a) 特異値は閉区間 I の内部にある．
  (b) ($n = 2$ のとき) I 内の特異値は特異点集合のはめ込みの自己交差にあたる点ではない．
  (c) I 内の特異値 a とその逆像をとり, 逆像の各点 b における微分による b における接空間 T_bM の像 $df(T_bM)$ を考えると, $df(T_bM) + T_aI = T_a\mathbb{R}^n$ が成立する．

  このとき I の逆像で特異点を含む成分が丁度 1 個存在するが, それは以下のいずれか．
  (a) $m - n + 1$ 次元の標準閉球体 D^{m-n+1}．
  (b) $m - n + 1$ 次元の標準球面から, 3 個の交わらず埋め込まれた, もとの標準球面と同じ次元の閉球体の内部を除いたものと, PL 同相な多様体．

このとき f は<u>球面型</u>折り目写像であるという．

特異点の指数は 0 か 1 となる．また, special generic 写像はこの条件を満たす．FIGURE 5 の二つの写像もそうである．以下 [22] で平面への次元 3 以上の多様体からの安定写像の定義域の微分同相型を保つ変形を扱うために導入された PL 写像のクラスで, 講演者が [20] にて再定義したものを定義する．

Definition 7. m, n を整数で, $m > n = 1, 2$ と満たすとする．次元 m の閉多様体から, n 次元の多面体への全射な PL 写像 q (PL 構造は多様体や多面体から自然に定まるものとする) について, 多面体上の各点 p について, 小さな開近傍の閉包である $N(p)$, そしてある球面型折り目写像 f と $p' \in W_f$, p' の小さな開近傍の閉包である $N(p')$ さらにはある微分同相写像 Φ と PL 同相写像 ϕ で, $\phi \circ q|_{q^{-1}(N(p))} = q_f|_{q_f{}^{-1}(N(p'))} \circ \Phi$ をみたすものがあるとする．このとき q は <u>pseudo spherical</u> 写像であるという．

一言でいえば, pseudo spherical 写像とは, 球面型折り目写像から定まる Reeb 空間への商写像と局所的に同じ形をしている PL 写像である．この写像の具体的なものに, 3 次元向き付け可能閉多様体上の <u>shadow</u> という, [36] で導入された, 安定写像とのかかわりに関連して, [3] や [21] で研究されているが, 3 次元多様体上の 2 次元多面体への pseudo spherical 写像として扱えるものがある．

<u>特異点 (集合)</u>, <u>特異値 (集合)</u>. <u>正則値 (集合)</u>がこのような写像の場合にも自然に定義できる．

値域の多面体は, 1 次元のときは各頂点が次数 1 か 3 のグラフである．2 次元の場合については, FIGURE 8 のように, 局所的に 3 つのタイプがある．

Definition 8. 局所的に, 値域が 2 次元であるような pseudo spherical 写像の値域の空間としてでてくる多面体であるものを, <u>simple polyhedron</u> とよぶ．

これについても, <u>特異値 (集合)</u>. <u>正則値 (集合)</u>が自然に定義できる．

Y 字型の 1 次元多面体をファイバーとする束を <u>Y 束</u>と呼ぶこととする．

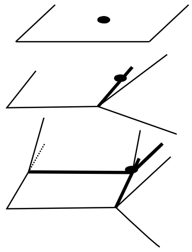

FIGURE 8. pseudo spherical 写像で値域が 2 次元の場合の局所的な形 (太い線が特異値集合の一部分を表す)

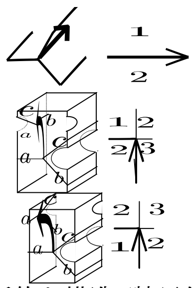

FIGURE 9. Y 束の局所的な構造 (特異値集合の二重点で一つのパターンを省略しているがその場合も自然に定義可能).

Definition 9. Simple polyhedron の特異値集合の中の単純ループについて, 適当な小さな正則近傍, 厳密にはそこから少しだけ余分なものを除いたものを考えると, FIGURE 9 にあるような方法に基づき, Y 束を定義することができる. これのモノドロミーについて, 自明なもの, 境界上の 3 点のうちちょうど 1 点を保つもの, 中心部分の 1 点以外を保たないものと三パターンがある. これらモノドロミーについて, それぞれ<u>自明</u>, <u>向き付け不可能</u>, <u>自由</u>であるという.

例えば FIGURE 7 の後の写像の Reeb 空間について, 特異値集合内の単純ループについて, Y 束のモノドロミーは自明である.

FIGURE 9 について補足する. 縦に並んだ三つの絵の組のうち, 最初のは特異値で二重点ではないものの周りを考えている. そして残り二つは二重点の周りである. さらに, 三つのものについて, 右は近傍の各点の逆像の成分数を表す. さらに下二つの組について, それぞれ左の方で, 3 次元の空間が出ている理由についてであるが, 詳しくは省略するものの, 後で少し触れる Theorem 4 の証明で, 値域が 3 次元の多様体であるような可微分写像を構成する上でできる可微分写像の値域の空間の一部を表現している. また二重点の周りについて一パターンを省略しているが, 自然に同様のことができる.

Simple polyhedron や pseudo spherical 写像の具体的な例については, 挙げた論文などを参考にして頂きたい.

Remark 2. Pseudo spherical 写像が spherical 写像から誘導される Reeb 空間への写像として表せるかどうかという問題が出てくるが, 意外にも知られていないし考えると意外に難しそうである. [22] で, $n = 2$ の場合, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 係数ホモロジーが 2 次元円板と同型で, 特異値集合が埋め込まれた円周の非交和であり, 特異値集合の単純ルー

プのモノドロミーが自由なものがないという条件をみたせば, このことは正しいという結果が, 補助的に証明されているくらいである.

Theorem 4 ([20])**.** 4 次元閉多様体が, 2 次元の simple polyhedron で, 特異値集合の単純ループのモノドロミーが向き付け不可能なものがないものを値域とする pseudo spherical 写像を許容することと, $\mathbb{R}^3$ への special generic 写像を許容することは同値である.

Corollary 1 ([20])**.** 基本群が自由群であるような 4 次元連結閉多様体が, 2 次元の simple polyhedron で, 特異値集合の単純ループのモノドロミーが向き付け不可能なものがないものを値域とする pseudo spherical 写像を許容するための必要十分条件は, S^4 であるか, S^2 上の S^2 束もしくは S^1 上の S^3 束の全空間の連結和として表されることである.

Remark 3. [22] や [33] で議論されていること (, そして [23] による shadow の考察の過程で示された, simple polyhedron で特異値集合が埋め込まれた円周の非交和でありかつ整係数ホモロジー群が円板であるものについて, 特異値集合の単純ループのモノドロミーが自由にならず, 円板に縮約することを上手く利用すると分かること) であるが, 4 次元のホモトピー球面が特異値集合が埋め込まれた円周の非交和でありかつ整係数ホモロジー群が円板である 2 次元多面体への pseudo spherical 写像を許容するならば, それは 4 次元の標準球面である. 今回, 特異値集合が埋め込まれた円周の非交和でない場合も扱ったわけである.

詳しくは原プレプリントにゆだねるが, 証明では, まず各特異値の周りで, 特異点として special generic 写像の特異点しか出てこないような可微分写像に持ち上げ, それを上手く貼り合わせ, 3 次元の向き付け可能境界付きコンパクト多様体への可微分な全射を構成する. そして値域の空間は $\mathbb{R}^3$ へはめ込めるのではめ込む. これにより special generic 写像が得られるという流れである.

Remark 4. 最近新しく. Theorem 4 の特異値集合の近傍に関する条件を除いたものでも, ある程度の良い可微分写像 (やあまりまだ口外できないがそれに近い良い写像) はできるということが, まだ形にはしておらず, 少しインフォーマルに話す機会があった時に報告した程度であるものの, 明らかにできそうである. この辺りは. Fact 3 や 4 が示すような, special generic 写像が定義域多様体の可微分構造等細かな部分に制限を与える話に関連し, (ある程度単純な) 4 次元多様体の可微分構造を, 3 次元の空間への条件の良い可微分写像 (や少し崩れたもの) を用いてみるという話になりそうで興味深いと考える. 補足として, [15] で導入された, FIGURE 7 のような写像を含む自然なクラスとして, 同心円形折り目写像という, 値域が 2 次元以上のユークリッド空間で, 特異値集合が同心円状に埋め込まれた球面の非交和であるような安定な折り目写像について次に述べるようなことを明らかにしたことを伝えておく ([14],[16]): 7 次元ホモトピー球面上に, $\mathbb{R}^4$ への, 正則値の逆像が 3 次元球面の非交和で, 特異点の指数が 0 か 1 で, さらに構造に関する自然な条件として, 特異値集合の各成分の小さな閉管状近傍とその逆像について, 写像が Morse 関数と 3 次元標準球面上の恒等写像の直積であり, 正則値の逆像の成分数が中心部つまり正則値集合の成分で唯一開球である部分に近づくほど増えるというような条件を満たすような同心円形折り目写像を構成でき, かつ, 特異点集合の成分数が, 定義域のホモトピー球面の可微分構造に制限を与える: 例えば成分数 1 個のものは標準球面しか定義域多様体として出て来ず'(逆に標準球面はこのような写像を許容し), 成分数 2 個のものは向きを込めて 28 種類ある可微分多様体としてのホモトピー球面のうち定義域多様体として標準球面含む 16 個のものしか出て来ず (逆にこのようなホモトピー球面はこのような写像を許容し). 最後に 3 個のものはすべての 7 次元ホモトピー球面が許容する.

7. 謝辞

この場を借りて, 著者を研究員として受け入れて下さっている九州大学の佐伯修研究室や周辺の方々等講演や本稿で発表した著者の研究を見守って下さった方々, 講演の機会を下さった主催者の山本稔, 山本卓宏両先生, 講演を聴講し議論等して下さったすべての方々他に感謝したく思う. 本稿の内容は, 京都大学数理解析研究所における, 共同利用・共同研究による成果である. 最後に, 著者は, 基盤研究(S)(17H06128: 代表者 佐伯 修) 「幾何的トポロジーと写像の特異点論の革新的研究」(https://kaken.nii.ac.jp/ja/grant/KAKENHI-PROJECT-17H06128/) の一員として九州大学マス・フォア・インダストリ研究所の学術研究員の身分で活動しており, 給与と補助を受けていることも記す.

.

References

[1] S. J. Blank and C. Curley, *Desingularizing maps of corank one*, Proc. Amer. Math. Soc. 80 (1980), 483–486.
[2] J. Cerf, *Sur les diffeomorphismes de la sphère de dimension trois ($\Gamma_4 = 0$)*, Lecture Notes in Math., Vol. 53, Springer-Verlag, 1968.
[3] F. Costantino and D. Thurston, *3-manifolds efficiently bound 4-manifolds*, J. Topol. 1 (2008), 703–745.
[4] D. Crowley and T. Schick, *The Gromoll filtration, KO-chracteristic classes and metrics of positive scalar curvature*, Geometry Topoogy 17 (3) (2013), 1773–1789, arxiv:1204.6474v4.
[5] Y. Eliashberg, *On singularities of folding type*, Math. USSR Izv. 4 (1970). 1119–1134.
[6] Y. Eliashberg, *Surgery of singularities of smooth mappings*, Math. USSR Izv. 6 (1972). 1302–1326.
[7] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable Mappings and Their Singularities*, Graduate Texts in Mathematics (14), Springer-Verlag(1974).
[8] A. Haefliger, *Quelques remarques sur les applications différentiables d'une surface dans le plan*, Ann. Inst Fourier, Grenoble 10 (1960), 47–60.
[9] J. T. Hiratuka and O. Saeki, *Triangulating Stein factorizations of generic maps and Euler Characteristic formulas*, RIMS Kokyuroku Bessatsu B38 (2013), 61–89.
[10] M. Ishikawa and Y. Koda, *Stable maps and branched shadows of 3-manifolds*, Mathematische Annalen 367 (2017), no. 3, 1819–1863, arXiv:1403.0596.
[11] U. Kaiser, *Immersions in codimension 1 up to regular homotopy*, Arch. Math. (Basel) 51 (1988), 371–377.
[12] H. Levine, *Classifying immersions into $\mathbb{R}^4$ over stable maps of 3-manifolds into $\mathbb{R}^2$*, Lecture Notes in Math., Vol. 1157, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
[13] N. Kitazawa, *On round fold maps* (in Japanese), RIMS Kôkyûroku Bessatsu B38 (2013), 45–59.
[14] N. Kitazawa, *On manifolds admitting fold maps with singular value sets of concentric spheres*, Doctoral Dissertation, Tokyo Institute of Technology (2014).
[15] N. Kitazawa, *Fold maps with singular value sets of concentric spheres*, Hokkaido Mathematical Journal, Vol. 43, No. 3 (2014), 327–359.
[16] N. Kitazawa, *Explicit round fold maps on some fundamental manifolds*, arxiv:1310.8407.
[17] N. Kitazawa, *折り目写像とその Reeb 空間の位相的情報と定義域多様体*, 研究集会「結び目の数理」報告集, 71–85.
[18] N. Kitazawa, *Lifts of spherical Morse functions*, submitted to a refereed journal, arxiv:1805.05852.
[19] N. Kitazawa, *Generalizations of Reeb spaces of special generic maps and applications to a problem of lifts of smooth maps*, arxiv:1805.07783.
[20] N. Kitazawa, *A new explicit way of obtaining special generic maps into the 3-dimensional Euclidean space*, arxiv:1806.04581.
[21] M. Ishikawa and Y. Koda, *Stable maps and branched shadows of 3-manifolds*, Mathematische Annalen 367 (2017), no. 3, 1819–1863, arXiv:1403.0596.
[22] M. Kobayashi and O. Saeki, *Simplifying stable mappings into the plane from a global viewpoint*, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 2607–2636.

[23] H. Naoe, *Shadows of* 4*-manifolds with complexity zero and polyhedral collapsing*, Proc. Amer. Math. Soc. 145 (2017), 4561–4572.
[24] M. Nishioka, *Desingularizing special generic maps into* 3*-dimensional space*, PhD Thesis (Kyushu Univ.), arxiv:1603.04520v1.
[25] G. Reeb, *Sur les points singuliers d´une forme de Pfaff complétement intègrable ou d´une fonction numérique*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de I´Académie des Sciences 222 (1946), 847–849.
[26] Y. Saito, *On decomposable mappings of manifolds*, J. Math. Kyoto Univ. 1 (1961/1962), 425–455.
[27] O. Saeki, *Notes on the topology of folds*, J.Math.Soc.Japan Volume 44, Number 3 (1992), 551–566.
[28] O. Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, Topology Appl. 49 (1993), 265–293.
[29] O. Saeki, *Cobordism groups of special generics functions and groups of homotopy spheres*, Japan. J. Math. (N. S.) 28 (2002), 287–297.
[30] O. Saeki, *Morse functions with sphere fibers*, Hiroshima Math. J. Volume 36, Number 1 (2006), 141–170.
[31] O. Saeki and K. Sakuma, *On special generic maps into* $\mathbb{R}^3$, Pacific J. Math. 184 (1998), 175–193.
[32] O. Saeki and K. Sakuma, *Special generic maps of* 4*-manifolds and compact complex analytic surfaces*, Math. Ann. 313, 617–633, 1999.
[33] O. Saeki and K. Suzuoka, *Generic smooth maps with sphere fibers* J. Math. Soc. Japan Volume 57, Number 3 (2005), 881–902.
[34] O. Saeki and M. Takase, *Desingularizing special generic maps*, Journal of Gokova Geometry Topology 7 (2013), 1–24.
[35] M. Shiota, *Thom's conjecture on triangulations of maps*, Topology 39 (2000), 383–399.
[36] V. G. Turaev, *Shadow links and face models of statistical mechanics*, J. Differential Geom. 36 (1992), 35–74.
[37] D. J. Wrazidlo, *Standard special generic maps of homotopy spheres into Eucidean spaces*, Topology Appl. 234 (2018), 348–358, arxiv:1707.08646.
[38] M. Yamamoto, *Lifting a generic map of a surface into the plane to an embedding into* 4*-space*, Illinois J. Math. 51 (2007)., 705–721.
[39] M. Yamamoto, *On embedding lifts over a Morse function on a circle*, Singularity theory, geometry and topology, 31-43, RIMS Kokyuroku Bessatsu B38, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2013.

〒 819-0385 福岡県福岡市西区元岡 744 番地九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
E-mail address: `n-kitazawa.imi@kyushu-u.ac.jp`