# 滑らかさを加味した直交ストリッカーツ評価

NEAL BEZ, YOUNGHUN HONG, YOUNGHUN HONG, SANGHYUK LEE,
SHOHEI NAKAMURA, AND YOSHIHIRO SAWANO

Abstract. 直交ストリッカーツ評価と呼ばれる新しい評価を示す．最初に，Frank と Sabin による関数の滑らかさを加味しない直交ストリッカーツ評価 [5] を示し，後で我々による関数の滑らかさを加味した直交ストリッカーツ評価のひとつの場合の証明する．この結果は我々の論文 [2] として出版されている．

## 1. ストリッカーツ評価

本稿では，$d \geq 3$ とする．$Uf(x,t) = e^{it\Delta} f(x)$ と書く．$1 \leq p, q \leq \infty$ が

$$\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = d$$

を満たすとき，

$$\|Uf\|_{L_t^{2p} L_x^{2q}} \lesssim \|f\|_{L^2} \tag{1.1}$$

が知られている．このような $(p,q)$ を許容的という．本来は

$$\|Uf\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|f\|_{L^2}$$

つまり

$$\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}$$

を満たすときに $(p,q)$ を許容的というが，直交ストリッカーツ評価を扱う際には (1.1) のように定式化しておくといろいろと便利なので，ここでは $\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = d, d \geq 3$ を満たす $(p,q)$ を許容的という．

## 2. 直交ストリッカーツ評価の定式化とその応用例

許容的な $p, q$ と適当な $\alpha \in [1, \infty]$ に対して，$\lambda = (\lambda_j)_j \in \ell^\alpha$ と (完全) 正規直交系 $(f_j)_j \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ に対する一様評価

$$\left\| \sum_j \lambda_j |Uf_j|^2 \right\|_{L_t^p L_x^q(\mathbb{R}^{d+1})} \lesssim \|\lambda\|_{\ell^\alpha} \tag{2.1}$$

が成り立つかどうかを考察する．

このような評価はハートリー方程式に応用できることが知られている．[8, 9] を参照のこと．

[6, Proposition 7] にあるほかの応用を見てみることにする．実際に，直交ストリッカーツ評価により，もとのストリッカーツ評価の改良ができることを示そう．ベゾフ空間を使う．(2.1) と $\lambda = (\lambda_j)_j \in \ell^\alpha$ と正規直交系 $(f_j)_j \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ に対する一様評価

$$\left\| \sum_j |\lambda_j U f_j|^2 \right\|_{L_t^p L_x^q(\mathbb{R}^{d+1})} \lesssim (\|\lambda\|_{\ell^{2\alpha}})^2,$$

は同値である．さらに，これを同値変形していくと，直交系 $(f_j)_j \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ に対する一様評価

$$\left\| \left( \sum_j |Uf_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_t^{2p} L_x^{2q}(\mathbb{R}^{d+1})} \lesssim \|(\|f_j\|_{L^2})_{j=-\infty}^{\infty}\|_{\ell^{2\alpha}}$$

が得られる．

ここで，$\varphi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{supp}(\varphi_0) \subset B(4) \setminus B(1)$, $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j \equiv \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ として，$\varphi_j = \varphi_0(2^{-j}\cdot), j \in \mathbb{Z}$ とおく．$\varphi_j(D) = \mathcal{F}^{-1}\varphi_j *$ を第 $j$ リトルウッド・ペイリー分解として，$f_j = \varphi_j(D)f$ とおいてみる．$\{f_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ は直交していないが，$\{f_{2j}\}_{j=-\infty}^{\infty}$ と $\{f_{2j-1}\}_{j=-\infty}^{\infty}$ は直交しているので，これらの二つの族にそれぞれ直交ストリッカーツ評価を用いることで，$\|Uf\|_{L_t^{2p} L_x^{2q}(\mathbb{R}^{d+1})} \lesssim \|f\|_{\dot{B}^0_{2,2\alpha}}$ が得られる．よって，$\alpha > 1$ ならば，ベゾフ空間によるもとのストリッカーツ評価 (2.1) の改良が得られた．

ここで，指数 $\alpha^*(p,q)$ を

$$\frac{d}{\alpha^*(p,q)} = \frac{1}{p} + \frac{d}{q}$$

で定める．$O = (0,0)$，$A = \left(\frac{d-1}{d+1}, \frac{d}{d+1}\right)$，$B = (1,0)$ とする．本稿では次の評価を示したい．この定理は [4, Theorem 1] として得られているものである．[4, Theorem 1] で与えられた証明方法とは違う証明方法が [5, Thoerem 8] で与えられた．[4, Theorem 1] と比べると [5, Thoerem 8] では $q$ の範囲が拡がっている．本稿では定理 2.2 を証明するために，ハーディー・リトルウッドの不等式を改良した O'Neil の不等式を用いる．そのために，若干の（しかし重要な）改良を本稿では考えることになるが，我々の方法は [5, 定理 8,9] の手法に依存している．

**Theorem 2.1.** $(\frac{1}{q}, \frac{1}{p})$ が $A$ のみを除いた辺 $AB$ にあるとする．$\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = d$，$\alpha = \alpha^*(p,q)$ ならば，$\lambda = (\lambda_j)_j \in \ell^\alpha$ と正規直交系 $(f_j)_j \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ に対する一様評価

$$\left\| \sum_j \lambda_j |e^{it\Delta} f_j|^2 \right\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|\lambda\|_{\ell^\alpha}$$

が成り立つ．

本稿では，[2] に基づいて次の評価も示す．このときに，上述した O'Neil の不等式が重要な役割を果たす．

**Theorem 2.2.** $(\frac{1}{q}, \frac{1}{p})$ が開三角形 $\triangle OAB$ にあるとする．$2s = d - (\frac{2}{p} + \frac{d}{q})$，$\alpha = \alpha^*(p,q)$ ならば，$\lambda = (\lambda_j)_j \in \ell^\alpha$ と正規直交系 $(f_j)_j \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ に対する一様評価

$$\left\| \sum_j \lambda_j |e^{it\Delta} |D|^{-s} f_j|^2 \right\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|\lambda\|_{\ell^\alpha}$$

が成り立つ．

[2] では $\alpha(p,q)$ は最良であることも示した．さらに，[2] では B を始点とした半直線 BA と $\frac{1}{p} = 1$ との交点を C として，D $= (0,1)$ としたときに，三角形 OAB のみならず四角形 OABC での類似の評価を得た．四角形 OABC から三角形 OAB を差し引いた領域では $\alpha$ の閾値が $\alpha = p$ であるので注意すること．

## 3. 前提知識

**3.1. 振動積分.** ここでは，補助的な評価を示す．

**Lemma 3.1.** $e^{i(t-s)\Delta}$ の積分核 $K((t,x),(s,y))$ は次の評価を満たす．

$$K((t,x),(s,y)) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\left((x-y)\cdot\xi + (t-s)|\xi|^2\right)}\,\mathrm{d}\xi = \mathrm{O}(|t-s|^{-d/2}).$$

*Proof.* 平方完成して

$$e^{i\left((x-y)\cdot\xi + (t-s)|\xi|^2\right)} = e^{i\left((t-s)\left(\xi + \frac{x-y}{2t-2s}\right)^2 - \frac{|x-y|^2}{4t-4s}\right)}$$

が得られる．したがって，

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(t-s)|\xi|^2}\,\mathrm{d}\xi = \mathrm{O}(|t-s|^{-d/2})$$

がわかればよいが，変数変換により $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} e^{i|\xi|^2}\,\mathrm{d}\xi \in \mathbb{C}$ に帰着する．これは振動積分として知られている量の典型的なものである． □

似た方法で次を示すことができる．

**Lemma 3.2.** $\psi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ を固定する．$t > 0$ と $x_0 \in \mathbb{R}^n$ によらない一様な評価

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(t(x-x_0)) \exp(i|x|^2)\,\mathrm{d}x = \mathrm{O}(1)$$

が成り立つ．

*Proof.* $0 < t < 1$ のときは，補題 3.2 と同じ方法を真似る．$t > 1$ のときは積分の三角不等式より明らかである． □

**3.2. フーリエ変換.** $\mathcal{F}$ で $x, t$ 両変数に関するフーリエ変換を表すとする．補題 3.1, 3.2 の応用として，

$$F(\xi,\tau) = (z+1)(z+2)\cdots(z+N)\varphi(\xi)^2(\tau - |\xi|^2)_+^z$$

で与えられる超関数のフーリエ変換を考える．ただし，$\varphi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ で $z$ は複素数である．滑らかな関数 $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $\mathrm{supp}(\rho) \subset [1,4]$, $\displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty} \rho(2^j t) = \chi_{(0,\infty)}(t)$ を満たしているとする．$j \in \mathbb{Z}$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\rho_j(t) = \rho(2^{-j}t)$ とおく．$F$ に対応して特異性を打ち切った

$$F_j(\xi,\tau) = (z+1)(z+2)\cdots(z+N)\varphi(\xi)^2(\tau-|\xi|^2)^z\rho_j(\tau-|\xi|^2)$$

を考える．$P(z) = (z+1)(z+2)\cdots(z+N)$ とおく．フーリエ変換を計算すると，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}^{-1}F_j(x,t)\\
&= P(z)\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi(\xi)^2(\tau-|\xi|^2)^z\rho_j(\tau-|\xi|^2)\exp(-ix\cdot\xi - it\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\\
&= P(z)\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi(\xi)^2\tau^z\rho_j(\tau)\exp(-ix\cdot\xi - it\tau - it|\xi|^2)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\\
&= P(z)\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\xi)^2\exp(-ix\cdot\xi - it|\xi|^2)\mathrm{d}\xi\int_{\mathbb{R}}\tau^z\rho_j(\tau)\exp(-it\tau)\mathrm{d}\tau\\
&= P(z)t^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t^{-\frac{1}{2}}\xi)^2\exp(-it^{-\frac{1}{2}}x\cdot\xi - i|\xi|^2)\mathrm{d}\xi\int_{\mathbb{R}}\tau^z\rho_j(\tau)\exp(-it\tau)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

となる．補題 3.2 より

$$t^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(t^{-\frac{1}{2}}\xi)^2\exp(-it^{-\frac{1}{2}}x\cdot\xi-i|\xi|^2)\mathrm{d}\xi$$

有界関数である．また，$N\gg 1$ のとき，

$$\left|t^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}}\tau^z\rho_j(\tau)\exp(-it\tau)\mathrm{d}\tau\right|\lesssim P(|z|)\min(2^{-j(\mathrm{Re}(z)+1-N)}t^{-\frac{d}{2}-N},2^{-j(\mathrm{Re}(z)+1)}t^{-\frac{d}{2}})$$

であるから，

$$P(|z|)^{-1}t^{\frac{d}{2}+\mathrm{Re}(z)+1}\sum_{j\in J}\int_{\mathbb{R}}\tau^z\rho_j(\tau)\exp(-it\tau)\mathrm{d}\tau$$

は $t$ と $\mathbb{Z}$ の $J$ に関して有界である．したがって，$\mathcal{F}F$ は有界関数である．

$z$ に関する増大を考えることで次の結論が得られる．

**Theorem 3.3.** $N\gg 1$ とする．$-N<\mathrm{Re}(z)<1$ で考える限り $\exp(-z^2)(z+1)(z+2)\cdots(z+N)\varphi(\xi)^2(\tau-|\xi|^2)_+^z$ のフーリエ変換 $T_z^0$ は $x,t$ のみならず $z$ についても有界である．ただし，$z=-1,-2,\dots,-N+1$ では解析接続をして考えている．

補題 3.2 の代わりに補題 3.1 を用いれば，次の結論が得られる．

**Theorem 3.4.** $N\gg 1$ とする．$-N<\mathrm{Re}(z)<1$ で考える限り $\exp(-z^2)(z+1)(z+2)\cdots(z+N)(\tau-|\xi|^2)_+^z$ のフーリエ変換 $T_z$ は $x,t$ のみならず $z$ についても有界である．ただし，$z=-1,-2,\dots,-N+1$ では解析接続をして考えている．

3.3. $UU^*$ について． $U_0f(x,t)=U[Pf](x,t)$ とおくことにする．上記の $T_z^0,T_z$ を考えることにより，$U_0U_0^*$ や $UU^*$ の表示が得られることが分かる．$UU^*$ についてはよく知られていることだから，$U_0U_0^*$ を中心に考えていく．

まず，

$$U_0U_0^*F(x,t)=\int_{\mathbb{R}}e^{i(t-t')\Delta}[P^2F(\cdot,t')](x)\,\mathrm{d}t'.$$

に注意する．$\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\mathcal{F}T_z^0\phi(\xi,\tau)=(z+1)(z+2)\cdots(z+N)\exp(-z^2)(\tau-|\xi|^2)_+^z\mathcal{F}\phi(\xi,\tau)\varphi(\xi)^2$$

とおく．ただし，$z$ は実部が正の実数に対して定義されているものとする．$T_z^0\phi\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ とみなす．このような $z$ に対しては

$$\mathcal{F}T_z^0\phi(\xi,\tau)=\prod_{j=3}^N(z+j)\exp(-z^2)\mathcal{F}\phi(\xi,\tau)\varphi(\xi)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}(\tau-|\xi|^2)_+^{z+1}$$

だから，$\Phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\begin{aligned}&\langle T_z^0\phi,\Phi\rangle\\&=\langle\mathcal{F}T_z^0\phi,\mathcal{F}^{-1}\Phi\rangle\\&=\prod_{j=3}^N(z+j)\exp(-z^2)\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}\xi\int_{|\xi|^2}^\infty(\tau-|\xi|^2)^{z+2}\varphi(\xi)^2\partial_\tau^2[\mathcal{F}\phi(\xi,\tau)\mathcal{F}^{-1}\Phi(\xi,\tau)]\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|^2}^\infty(\tau-|\xi|^2)\partial_\tau^2[\mathcal{F}\phi(\xi,\tau)\mathcal{F}^{-1}\Phi(\xi,\tau)]\mathrm{d}\tau&=-\int_{|\xi|^2}^\infty\partial_\tau[\mathcal{F}\phi(\xi,\tau)\mathcal{F}^{-1}\Phi(\xi,\tau)]\mathrm{d}\tau\\&=\mathcal{F}\phi(\xi,|\xi|^2)\mathcal{F}^{-1}\Phi(\xi,|\xi|^2)\end{aligned}$$

である．したがって，

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}\phi(\xi,|\xi|^2)\mathcal{F}^{-1}\Phi(\xi,|\xi|^2)\\
&\simeq \int_{\mathbb{R}^{2d+2}} \phi(x,t)\Phi(x',t')\exp(-i(x-x')\cdot\xi - i(t-t')|\xi|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}x'\mathrm{d}t'
\end{aligned}
$$

なので，$z=-1$ まで解析接続すれば，

$$
\begin{aligned}
&\langle T^0_{-1}\phi,\Phi\rangle\\
&\simeq \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^{2d+2}} \varphi(\xi)^2\phi(x,t)\Phi(x',t')\exp(-i(x-x')\cdot\xi - i(t-t')|\xi|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}x'\mathrm{d}t'\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

となり，

$$
\begin{aligned}
T^0_{-1}\phi(x',t') &\simeq \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \phi(x,t)\exp(-i(x-x')\cdot\xi - i(t-t')|\xi|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi\\
&\simeq U_0U_0^*\phi(x',t')
\end{aligned}
$$

が得られる．

以上の計算から次の結論が得られた．

**Theorem 3.5.** $U_0U_0^* \simeq T^0_{-1}$ である．同様に $UU^* \simeq T_{-1}$ である．

3.4. **補間公式．** いくつかの補間公式を引用する．

**Theorem 3.6.** [10] $0<\theta\le 1\le p_0,q_0,p_1,q_1<\infty$ とする．このとき，

$$
\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1},\ \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}
$$

を満たす $p,q$ につき，$[L^{p_0}_tL^{q_0}_x, L^{p_1}_tL^{q_1}_x]_{\theta,p} = L^p_tL^{q,p}_x$ が成り立つ．

**Theorem 3.7.** [1, 定理 5.1.2] $0<\theta\le 1\le p_0,q_0,p_1,q_1<\infty$ とする．このとき，

$$
\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1},\ \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}
$$

を満たす $p,q$ につき，$[L^{p_0}_tL^{q_0}_x, L^{p_1}_tL^{q_1}_x]_{\theta} = L^p_tL^{q}_x$ が成り立つ．

**Theorem 3.8.** $0<\theta\le 1\le p_0,q_0,p_1,q_1,r_0,r_1\le\infty$ とする．このとき，

$$
\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1},\ \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1},\ \frac{1}{r}=\frac{1-\theta}{r_0}+\frac{\theta}{r_1}
$$

を満たす $p,q,r$ につき，$[L^{p_0,r_0}_tL^{q_0}_x, L^{p_1,r_1}_tL^{q_1}_x]_{\theta} \subset L^{p,r}_tL^{q}_x$ が成り立つ．

*Proof.* 一般的に複素補間はカルデロン積で書き表すことができ，そのカルデロン積による表示とヘルダーの不等式を組み合わせれば結論が得られる． □

3.5. **O'Neil の不等式．** 1 次元の分数冪積分作用素 $I_\alpha$ につき，次のことが言える．

**Theorem 3.9.** $1<p,q,r,\ 0<\alpha<1$ が $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\alpha$ を満たすとすると，$I_\alpha : L^{p,r}(\mathbb{R})\to L^{q,r}(\mathbb{R})$ が成り立つ．

証明は簡単で，Hardy–Littlewood–Sobolev の不等式と実補間を組み合わせることにより得られる．

## 4. 双対原理

評価 (1.1) を直接示すのは若干難しいが，この評価を同値変形することができる．

**Proposition 4.1.** $p, q \geq 1$，$r, \widetilde{r}, \alpha, \beta \geq 1$ とする．任意の正の数列 $\lambda = (\lambda_j)_j \in \ell^\alpha$ と完全正規直交系 $(f_j)_j \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ に対する一様評価

$$\Big\| \sum_j \lambda_j |Uf_j|^2 \Big\|_{L_t^{p,r} L_x^{q,\widetilde{r}}} \lesssim \|\lambda\|_{\ell^{\alpha,\beta}} \tag{4.1}$$

が成り立つ必要十分条件はすべての $W \in L_t^{2p',2r'} L_x^{2q',2\widetilde{r}'}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ に対して

$$\|WUU^* \overline{W}\|_{\mathcal{C}^{\alpha',\beta'}} \lesssim \|W\|^2_{L_t^{2p',2r'} L_x^{2q',2\widetilde{r}'}} \tag{4.2}$$

である．

この命題の証明は [5, Lemma 3] を我々のローレンツ指数に対する命題として変形したものである．証明はほとんど [5, Lemma 3] と変わらないが，ローレンツ空間になっても同じ証明が通用することを確認するために証明を書いておく．

*Proof.* (4.2) が成り立ったとする．$H$ をヒルベルト空間とするとき，Schatten クラスの性質 $A_0, A_1 \in B(H)$ が $A_0 A_0^* \in \mathcal{C}^{\alpha',\beta'}$ を満たしていれば，$A_0^* A_0 \in \mathcal{C}^{\alpha',\beta'}$ となり，これらのノルムは等しいので，

$$\|U^* \overline{W} W U\|_{\mathcal{C}^{\alpha',\beta'}} \lesssim \|W\|^2_{L_t^{2p',2r'} L_x^{2q',2\widetilde{r}'}}$$

となる．(4.2) を示すべく，有限の完全正規直交系 $(f_j)_{j \in J}$ をとる．すると，

$$\gamma(g) = \sum_{j \in J} \lambda_j \langle g, f_j \rangle_{L^2} f_j \quad (g \in L^2)$$

に対して Schatten クラスのヘルダーの不等式から

$$|\mathrm{Tr}(\gamma U^* \overline{W} W U)| \lesssim \|\gamma\|_{\mathcal{C}^{\alpha,\beta}} \|U^* \overline{W} W U\|_{\mathcal{C}^{\alpha',\beta'}} \lesssim \|\lambda\|_{\ell^{\alpha,\beta}} \|W\|^2_{L_t^{2p',2r'} L_x^{2q',2\widetilde{r}'}}$$

が成り立つ．つまり，$\gamma U^* \overline{W} W U$ はトレースクラスに属する．ここで，$\gamma U^* \overline{W} W U \in \mathcal{C}^1$ であるので，$W U \gamma U^* \overline{W} \in \mathcal{C}^1$ である．さらにこれらのトレースクラスに属する作用素ノルムは同じなので，

$$|\mathrm{Tr}(W U \gamma U^* \overline{W})| \lesssim \|\lambda\|_{\ell^{\alpha,\beta}} \|W\|^2_{L_t^{2p',2r'} L_x^{2q',2\widetilde{r}'}} \tag{4.3}$$

が成り立つ．とくに，

$$\sum_{j \in J} \langle W U \gamma U^* \overline{W} f_j, f_j \rangle_{L^2} \lesssim \|\lambda\|_{\ell^{\alpha,\beta}} \|W\|^2_{L_t^{2p',2r'} L_x^{2q',2\widetilde{r}'}} \tag{4.4}$$

が成り立つ．ここで，

$$\langle W U \gamma U^* \overline{W} f_j, f_j \rangle_{L^2} = \langle \gamma U^* \overline{W} f_j, U^* \overline{W} f_j \rangle_{L^2} = \sum_{j' \in J} \lambda_{j'} \langle U^* \overline{W} f_j, f_{j'} \rangle_{L^2}{}^2$$

であるから，これを $j$ について総和して，

$$\mathrm{Tr}(W U \gamma U^* \overline{W}) = \sum_{j \in J} \langle W U \gamma U^* \overline{W} f_j, f_j \rangle_{L^2} = \sum_{j' \in J} \lambda_{j'} \|W U f_{j'}\|^2_{L^2}$$

が得られる．したがって，

$$\sum_{j \in J} \lambda_j \|W U f_j\|^2_{L^2} \lesssim \|\lambda\|_{\ell^{\alpha,\beta}} \|W\|^2_{L_t^{2p',2r'} L_x^{2q',2\widetilde{r}'}}$$

つまり，

$$\int_{\mathbb{R}^n} |W(x,t)|^2 \sum_{j\in J} \lambda_j |Uf_j(x,t)|^2 dxdt \lesssim \|\lambda\|_{\ell^{\alpha,\beta}} \|W\|^2_{L_t^{2p',2r'} L_x^{2q',2\tilde{r}'}}$$

が得られる．双対を考えることで，$W^2 = w$ と換算すると，

$$\int_{\mathbb{R}^n} |w(x,t)| \sum_{j\in J} \lambda_j |Uf_j(x,t)|^2 dxdt \lesssim \|\lambda\|_{\ell^{\alpha,\beta}} \|w\|_{L_t^{p',r'} L_x^{q',\tilde{r}'}}$$

なので，双対性から，

$$\left\| \sum_{j\in J} \lambda_j |Uf_j(x,t)|^2 \right\|_{L_t^{p,r} L_x^{q,\tilde{r}}} \lesssim \|\lambda\|_{\ell^{\alpha,\beta}}$$

が得られる．この議論を逆にたどれば (4.1) は (4.2) の十分条件であることがわかる． □

$P = \varphi(D)$ で 0 次リトルウッド・ペイリーの局所化を表すことにする．

**Remark 4.2.** $U$ の代わりに $U_0 f(x,t) = U[Pf](x,t)$ を考えることも可能である．この証明を見れば分かるように，$U$ については (1.1) しか使っていないので，同じ有界性を有する $U_0$ についても類似の命題が成り立つ．つまり，$p,q \geq 1$，$r,\tilde{r},\alpha,\beta \geq 1$ とする．任意の正の数列 $\lambda = (\lambda_j)_j \in \ell^\alpha$ と正規直交系 $(f_j)_j \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ に対する一様評価

$$\left\| \sum_j \lambda_j |U_0 f_j|^2 \right\|_{L_t^{p,r} L_x^{q,\tilde{r}}} \lesssim \|\lambda\|_{\ell^{\alpha,\beta}} \tag{4.5}$$

が成り立つ必要十分条件はすべての $W \in L_t^{2p',2r'} L_x^{2q',2\tilde{r}'}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ に対して

$$\|WU_0U_0^*\overline{W}\|_{\mathcal{C}^{\alpha',\beta'}} \lesssim \|W\|^2_{L_t^{2p',2r'} L_x^{2q',2\tilde{r}'}} \tag{4.6}$$

である．

## 5. 定理 2.1 の証明

この定理では辺 $AB$ 上の $A$ 以外の点に限定して考察していた．定理 2.1 の証明する際には O'Neil の不等式は必要としないが，定理 2.2 を証明するためにローレンツ指数をわずかに稼いでおくことが重要になる．$\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q}$ のときに定理 2.1 をわずかに改良しておく．

**Theorem 5.1.** $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q}$ を満たしている $(\frac{1}{q}, \frac{1}{p})$ が $A$ のみを除いた辺 $AB$ にあるとする．$\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = d$，$\alpha = \alpha^*(p,q)$ ならば，$\lambda = (\lambda_j)_j \in \ell^\alpha$ と正規直交系 $(f_j)_j \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ に対する一様評価

$$\left\| \sum_j \lambda_j |e^{it\Delta} f_j|^2 \right\|_{L_t^{p,\alpha} L_x^q} \lesssim \|\lambda\|_{\ell^\alpha}$$

が成り立つ．

これは [2, Proposition 4.2] であるが，[2] にもあるようにハーディー・リトルウッド・ソボレフの不等式の代わりに O'Neil の不等式を用いる以外は [5, 定理 9] と同じである．

*Proof.* $\mathrm{Re}(z)=0$ ならばプランシュレルの定理により $T_z : L^2(\mathbb{R}^{d+1}) \to L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ となり，この作用素ノルムは $z$ によらない数で上から抑えられる．$\alpha = -d-1-2\mathrm{Re}(z)$ とおく．$0<\alpha<1$ の場合を考える．つまり，$0<-d-1-2\mathrm{Re}(z)<1$ と仮定する．$T_z$ の積分核は $|t-t'|^{-\frac{d}{2}-1-\mathrm{Re}(z)}$ で上から抑えられる．したがって，

$$
\begin{aligned}
&(\|W_1^{-z}T_zW_2^{-z}\|_{\mathcal{C}^2})^2\\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \frac{|W_1(x',t')|^{-2\mathrm{Re}(z)}|W_2(x,t)|^{-2\mathrm{Re}(z)}}{|t-t'|^{d+2+2\mathrm{Re}(z)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}} (\|W_1(\cdot,t)\|_{L_x^{-2\mathrm{Re}(z)}})^{-2\mathrm{Re}(z)}(\|W_2(\cdot,t')\|_{L_x^{-2\mathrm{Re}(z)}})^{-2\mathrm{Re}(z)}|t-t'|^{-d-2-2\mathrm{Re}(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

となる．このとき，$1<p<2$ が $\frac{1}{p'}=\frac{1}{p}-\alpha$ を満たすとする．つまり，

$$
\frac{1}{p}=\frac{1+\alpha}{2}=-\frac{d}{2}-\mathrm{Re}(z)
$$

とすると，O'Neil の結果により $I_\alpha : L^{p,2}(\mathbb{R}) \to L^{p',2}(\mathbb{R})$ は有界なので，

$$
\begin{aligned}
&\|W_1^{-z}T_zW_2^{-z}\|_{\mathcal{C}^2}\\
&\lesssim (\|W_1\|_{L_t^{\frac{-2\mathrm{Re}(z)}{-\frac{d}{2}-\mathrm{Re}(z)},-4\mathrm{Re}(z)}L_x^{-2\mathrm{Re}(z)}})^{-\mathrm{Re}(z)}(\|W_2\|_{L_t^{\frac{-2\mathrm{Re}(z)}{-\frac{d}{2}-\mathrm{Re}(z)},-4\mathrm{Re}(z)}L_x^{-2\mathrm{Re}(z)}})^{-\mathrm{Re}(z)}
\end{aligned}
$$

となる．$\dfrac{d}{2}+\dfrac{1}{2}<\lambda_0\le\dfrac{d}{2}+1$ とする．$\theta\in(0,1)$ を

$$
(1-\theta)\lambda_0=1
$$

となるようにとることで，

$$
\|W_1T_{-1}W_2\|_{\mathcal{C}^{\frac{2}{1-\theta}}} \lesssim \|W_1\|_{L_t^{\frac{4\lambda_0}{2\lambda_0-d},4\lambda_0}L_x^{2\lambda_0}}\|W_2\|_{L_t^{\frac{4\lambda_0}{2\lambda_0-d},4\lambda_0}L_x^{2\lambda_0}}
$$

が言える．$p,q,\alpha\in(1,\infty)$ を

$$
2p'=\frac{4\lambda_0}{2\lambda_0-d},\quad 2q'=2\lambda_0,\quad \alpha'=\frac{2}{1-\theta}
$$

と定める．つまり，

$$
\frac{1}{p}=\frac{d}{2\lambda_0},\quad \frac{1}{q}=1-\frac{1}{\lambda_0},\quad \alpha=\frac{2}{1+\theta}
$$

とおく．すると，詳しい計算によると，$\frac{2}{p}+\frac{d}{q}=d$, $\alpha=\alpha^*(p,q)$ である．さらに $\dfrac{d}{2}+\dfrac{1}{2}<\lambda_0\le\dfrac{d}{2}+1$ なので，$\dfrac{1}{p}\ge\dfrac{1}{q}$ である． □

定理 2.1 の証明を完結させる．また，$p=\infty$, $q=1$ のときは $\alpha^*(p,q)=1$ である．この場合は $e^{it\Delta}$ が $L^2(\mathbb{R})$ で等長であるから，$T_{-1}=UU^*: L_t^1L_x^2 \to L_t^\infty L_x^2$ となる．したがって，

$$
\|W_1T_{-1}W_2\|_{\mathcal{C}^\infty} \lesssim \|W_1\|_{L_t^2L_x^\infty}\|W_2\|_{L_t^2L_x^\infty}
$$

は明らかである．上記の不等式と $\lambda_0$ が $\dfrac{d+1}{2}$ よりわずかに大きい場合の定理 5.1 の「改悪版」

$$
\|W_1T_{-1}W_2\|_{\mathcal{C}^{\frac{2}{1-\theta}}} \lesssim \|W_1\|_{L_t^{\frac{4\lambda_0}{2\lambda_0-d}}L_x^{2\lambda_0}}\|W_2\|_{L_t^{\frac{4\lambda_0}{2\lambda_0-d}}L_x^{2\lambda_0}}
$$

と定理 3.7 を用いて結論を得る．

## 6. 局所化された評価

ここからは三角形 $OAB$ の内部での評価である．$|D|^{-s}$ のフーリエ掛け算作用素の multiplier は原点では滑らかではないので，$P=\varphi(D)$ として，局所化された評価を考える．

**Lemma 6.1.** 正規直交系 $(f_j)_j \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ に対する一様評価

$$\Big\| \sum_j \lambda_j |UPf_j|^2 \Big\|_{L_t^\infty L_x^\infty} \lesssim \|\lambda\|_{\ell^\infty} \tag{6.1}$$

を示す．

*Proof.* 右辺に現れる $\ell^\infty$ ノルムのために，全部の $\lambda_j$ が 1 と思ってよい．次に，$(x,t)\in \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$ を固定して，$\psi_{x,t}(\xi)=e^{-i(x\cdot\xi-t|\xi|^2)}\phi_0(\xi)$ とおく．$(f_j)_j$ の $L^2$ 直交性とベッセルの不等式から

$$\sum_j |e^{it\Delta}Pf_j(x)|^2 = \sum_j |\langle \widehat{\psi_{x,t}}, f_j\rangle_{L^2}|^2 \le \|\widehat{\psi_{x,t}}\|_{L^2}^2 = \|\phi_0\|_{L^2}^2$$

が得られるので，(6.1) が従う． □

この証明方法は [2] に載っているが，命題自体は Frank と Sabin によるものである．[6]

**Theorem 6.2.** $(\frac{1}{q},\frac{1}{p})$ が端点 $A$ を除いた辺 $AB$ にあるとする．$\alpha=\alpha^*(p,q)$ ならば，$\lambda=(\lambda_j)_j\in\ell^\alpha$ と正規直交系 $(f_j)_j\subset L^2(\mathbb{R}^d)$ に対する一様評価

$$\Big\| \sum_j \lambda_j |e^{it\Delta}Pf_j|^2 \Big\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|\lambda\|_{\ell^\alpha}$$

が成り立つ．

*Proof.* $P$ があるかないかの違いがあるが，証明は定理 2.1 と同じである． □

補題 6.1 と定理 6.2 を定理 3.3 を用いて複素補間をすることにより，次の結果が得られる．

**Theorem 6.3.** $(\frac{1}{q},\frac{1}{p})$ が $OAB$ の内部にあるとする．$2s=d-(\frac{2}{p}+\frac{d}{q})$，$\alpha=\alpha^*(p,q)$ ならば，$\lambda=(\lambda_j)_j\in\ell^\alpha$ と正規直交系 $(f_j)_j\subset L^2(\mathbb{R}^d)$ に対する一様評価

$$\Big\| \sum_j \lambda_j |e^{it\Delta}|D|^{-s}Pf_j|^2 \Big\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|\lambda\|_{\ell^\alpha}$$

が成り立つ．

## 7. 定理 2.2 の証明

7.1. **局所評価から大域評価への移行．** ブルガン型の次の補間評価を使う．これは周波数について局所化されたものを大域化するときに用いるが，このままでは大域化された評価は弱型としてしか得られない．[3, 7] などに似た評価があるが，ベクトル値版は [2] に載っている．[2] の定式化を再録する．

**Proposition 7.1.** $p_0,p_1>1$，$q,\alpha_0,\alpha_1\ge 1$，$\varepsilon_0,\varepsilon_1>0$，$(g_j)_j\in L_t^{2p_i}L_x^{2q}$ において有界な列とする．ここで，$i=0,1$ とする．

$$\frac{1}{p}=\frac{\theta}{p_0}+\frac{1-\theta}{p_1},$$

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{\theta}{\alpha_0}+\frac{1-\theta}{\alpha_1},$$
$$\theta=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0+\varepsilon_1}$$

とおく．$\widehat{P_k f}(\xi)=\varphi(2^{-k}\xi)\hat{f}(\xi)$ を第 $k$ リトルウッド・ペイリー分解とする．$i=0,1, k\in\mathbb{Z}$ につき，

$$\left\|\sum_j \lambda_j |P_k g_j|^2\right\|_{L_t^{p_i,\infty}L_x^q} \lesssim 2^{(-1)^{i+1}\varepsilon_i k}\|\lambda\|_{\ell^{\alpha_i}} \tag{7.1}$$

が成り立つならば，$\lambda=(\lambda_j)_j\in\ell^{\alpha,1}(\mathbb{C})$ に対して

$$\left\|\sum_j \lambda_j |g_j|^2\right\|_{L_t^{p,\infty}L_x^q} \lesssim \|\lambda\|_{\ell^{\alpha,1}}$$

が成り立つ．

変数変換 $f(x,t)\mapsto f(2^k x, 4^k t)$ と定理 6.3 と命題 7.1 により現時点では，次のことが言えている．

**Lemma 7.2.** $(\frac{1}{q},\frac{1}{p})$ が開三角形 $\triangle OAB$ にあるとする．$2s=d-(\frac{2}{p}+\frac{d}{q})$，$\alpha=\alpha^*(p,q)$ ならば，$\lambda=(\lambda_j)_j\in\ell^\alpha$ と正規直交系 $(f_j)_j\subset L^2(\mathbb{R}^d)$ に対する一様評価

$$\left\|\sum_j \lambda_j |e^{it\Delta}|D|^{-s}f_j|^2\right\|_{L_t^{p,\infty}L_x^q} \lesssim \|\lambda\|_{\ell^{\alpha,1}}$$

が成り立つ．

この時点で定理定理 2.2 に近づいたが，ブルガンの補題を用いたことにより二つの代償を払わなければいけなくなった．ひとつは定義域を小さくしないといけないこと，もうひとつは値域を広げないといけないことである．まずは値域を修正したいので，定理 5.1 を使うことにする．

**Theorem 7.3.** $\frac{1}{p}>\frac{1}{q}$ を満たしている $(\frac{1}{q},\frac{1}{p})$ が三角形 $OAB$ の内部にあるとする．$2s=d-\frac{2}{p}-\frac{d}{q}$，$\alpha=\alpha^*(p,q)$ ならば，$\lambda=(\lambda_j)_j\in\ell^\alpha$ と正規直交系 $(f_j)_j\subset L^2(\mathbb{R}^d)$ に対する一様評価

$$\left\|\sum_j \lambda_j |e^{it\Delta}|D|^{-s}f_j|^2\right\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|\lambda\|_{\ell^{\alpha,1}}$$

が成り立つ．

*Proof.* 理想的には $O$ での大域評価を用いたいが，ブルガンの補題の結論には $O$ の評価を含まないので，ここで与える証明には「穴」がある．しかしながら，定理 3.8 を用いて厳密に示すことができるので，$O$ での評価

$$\left\|\sum_j \lambda_j |e^{it\Delta}f_j|^2\right\|_{L_t^\infty L_x^\infty} \lesssim \|\lambda\|_{\ell^1}$$

を認めて証明する．$O$ を始点として，$(\frac{1}{q},\frac{1}{p})$ を通る半直線が辺 $AB$ と交わる点を $Z$ とすると，$O,Z$ での評価を複素補間することにより，結論よりよい評価が得られる．上述したとおり，$O$ での評価をまともに使うことができないので，$O$ の近い点での評価を用いて結論を得る． □

最後にもうひとつの代償である定義域の小ささを実補間で補正する．

$\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$ を満たしている $(\frac{1}{q}, \frac{1}{p})$ が三角形 OAB の内部にあるとするときは $\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = d - 2s$ 上の点をこの点が間に来るように十分近くとり定理 3.6 を用いて実補間する．その結果得られる結論が

$$\left\| \left( \sum_j |Uf_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_t^{2p} L_x^{2q,2p}(\mathbb{R}^{d+1})} \le C\|\lambda\|_{\ell^{\alpha(p,q),p}}$$

である．$p > \frac{d-1}{d} q$ なので，

$$\frac{d}{\alpha(p,q)} = \frac{1}{p} + \frac{d}{q} < \frac{d}{p}$$

つまり $\alpha(p,q) > p$ である．$p < q$ および $p > \alpha(p,q)$ なので，ローレンツ空間の埋め込みが使える．ローレンツ空間をルベーグ空間に置き換えられるようにこの結論のローレンツ指数を調節できる．つまり，

$$\left\| \left( \sum_j |Uf_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_t^{2p} L_x^{2q}(\mathbb{R}^{d+1})} \le C\|\lambda\|_{\ell^{\alpha(p,q)}}$$

である．最後に $A$ においては評価が自明なので，定理 3.7 を用いて複素補間する．これで定理 2.2 の証明が完結した．

## References


[1] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation Spaces: An Introduction*, Springer–Verlag, New York, 1976.

[2] N. Bez, Y. Hong, S. Lee, S. Nakamura, Y. Sawano, *On the Strichartz estimates for orthonormal systems of initial data with regularity*, Adv. in Math., online.

[3] J. Bourgain, *Estimations de certaines functions maximales*, C. R. Acad. Sci. Paris **310** (1985) 499–502.

[4] R. Frank, M. Lewin, E. Lieb, R. Seiringer, *Strichartz inequality for orthonormal functions*, J. Eur. Math. Soc. **16** (2014), 1507–1526.

[5] R. Frank, J. Sabin, *Restriction theorems for orthonormal functions, Strichartz inequalities, and uniform Sobolev estimates*, Amer. J. of Math., **139** (2017), 1649–1691.

[6] R. Frank, J. Sabin, *The Stein-Tomas inequality in trace ideals*, Séminaire Laurent Schwartz – EPD et applications (2015-2016), Exp. No. XV, 12 pp., 2016.

[7] S. Lee, *Some sharp bounds for the cone multiplier of negative order in* $\mathbb{R}^3$, Bull. London Math. Soc. **35** (2003), 373–390.

[8] M. Lewin, J. Sabin, *The Hartree equation for infinitely many particles. I. Well-posedness theory*, Comm. Math. Phys. **334** (2015), 117–170.

[9] M. Lewin, J. Sabin, *The Hartree equation for infinitely many particles. II. Dispersion and scattering in 2D*, Analysis & PDE **7** (2014), 1339–1363.

[10] J.L. Lions, J. Peetre, *Sur une classe d'epaces d'interpolation*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **19** (1964), 5–68.

(Neal Bez) Department of Mathematics, Graduate School of Science and Engineering, Saitama University, Saitama 338-8570, Japan
*E-mail address*: nealbez@mail.saitama-u.ac.jp

Department of Mathematics, Chung-Ang University, Seoul 06974, Korea
*E-mail address*: yhhong@cau.ac.kr

(Sanghyuk Lee) Department of Mathematical Sciences, Seoul National University, Seoul 151-747, Korea
*E-mail address*: shklee@snu.ac.kr

(Nakamura) Department of Mathematics and Information Sciences, Tokyo Metropolitan University, 1-1 Minami-Ohsawa, Hachioji, Tokyo, 192-0397, Japan
*E-mail address*: nakamura-shouhei@ed.tmu.ac.jp

(Yoshihiro Sawano) Department of Mathematics and Information Sciences, Tokyo Metropolitan University, 1-1 Minami-Ohsawa, Hachioji, Tokyo, 192-0397, Japan
*E-mail address*: ysawano@tmu.ac.jp