

# 変動指数解析の近年の発展と課題

岡山大学大学院教育学研究科・出耒 光夫\*

Mitsuo Izuki  
Faculty of Education,  
Okayama University

2019年2月28日

## 概要

本稿では, Hardy–Littlewood の極大作用素の有界性の観点から, 変動指数解析の理論においてこれまでに示されてきた結果と未解決の課題について紹介する. 出耒–中井–澤野による論説 [33, 34] を軸にしつつ, これらの論説には書かれていない 2014 年以降の研究や BMO との関連についても議論を進めていく.

## 目次

1	はじめに	2
2	変動指数 Lebesgue 空間	4
3	$A_{p(\cdot)}$ ウェイト	8
4	変動指数 Lebesgue 空間におけるモジュラー不等式	9
5	Banach 関数空間とボール Banach 関数空間	10
6	変動指数の $A_\infty$ 条件と Herz 空間への応用	12
7	BMO ノルムの一般化	14
8	Campanato ノルムの一般化	17
9	ボール Banach 関数空間における補外定理	19
	9.1 主結果とその証明 . . . . .	19
	9.2 補題の証明 . . . . .	21

---

\*E-mail: izuki@okayama-u.ac.jp

# 1 はじめに

本稿では、特に断らない限り、 $\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  の測度が正の可測集合とし、 $\Omega$  上定義された複素数に値をとる関数やそれらの成す空間について議論を進めていく。本稿全体で用いる数式や記号をまとめておく。

1. 可測集合  $E \subset \mathbb{R}^n$  に対して、 $|E|$  は Lebesgue 測度、 $\chi_E$  は特性関数を表すものとする。
2.  $|E| > 0$  を満たす可測集合  $E$  と可測関数  $f$  に対して、

$$f(E) := \int_E f(x) dx, \quad f_E := \frac{f(E)}{|E|} = \frac{1}{|E|} \int_E f(x) dx$$

と定める。これらの表記は、特にウェイトや BMO の議論の際によく用いられる。

3.  $C$  は、その場の議論における主要なパラメータに依存しない正の定数を表すものとする。一連の数式において、式ごとに異なる値であっても、同一の文字  $C$  で表す場合もある。

まずは、最も基本的な関数空間と作用素を定義しておきたい。

**定義 1.1.**  $p$  は  $1 \leq p < \infty$  を満たす定数または  $p = \infty$  であるとする。関数  $f$  に対し、

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \begin{cases} \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \text{ess. sup}_{x \in \Omega} |f(x)| & (p = \infty) \end{cases}$$

と定める。 $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$  を満たす  $f$  全体を  $L^p(\Omega)$  と書き、Lebesgue 空間または  $L^p$  空間と呼ぶ。以後、 $\Omega = \mathbb{R}^n$  の場合は、 $(\Omega)$  を省略する。すなわち、 $\|f\|_{L^p(\Omega)}$ ,  $L^p(\Omega)$  をそれぞれ  $\|f\|_{L^p}$ ,  $L^p$  と略記する。

**定義 1.2.** 局所可積分関数  $f$  に対し、作用素  $M$  を

$$Mf(x) := \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_{B \cap \Omega} |f(y)| dy \quad (x \in \Omega)$$

で定める。但し、上限は点  $x$  を含み、 $|B \cap \Omega| > 0$  を満たすすべての開球  $B$  についてとるものとする。この作用素  $M$  を Hardy–Littlewood の極大作用素と呼ぶ。

$M$  は Lebesgue 空間  $L^p$  において次の基本的な有界性を満たしている。

**定理 1.3** (Hardy–Littlewood の極大定理). もし  $1 < p \leq \infty$  ならば、 $M$  は  $L^p$  において有界である。すなわち、すべての  $f \in L^p$  に対して

$$\|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つ。一方、 $L^1$  において  $M$  は有界ではないが、弱  $(1,1)$  型である。すなわち、すべての  $f \in L^1$  と  $\lambda > 0$  に対して

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq C \lambda^{-1} \|f\|_{L^1}$$

が成立する。

Muckenhoupt の荷重理論は、この定理の重み付き関数空間への拡張から発展してきた。これを紹介するために、まずは重み付きの Lebesgue 空間と重要なウェイトのクラスを定義しておきたい。

**定義 1.4.**  $\mathbb{R}^n$  上で局所可積分かつ正の値をとる関数  $w$  をウェイトと呼ぶことにする。  $p$  を  $1 \leq p < \infty$  を満たす定数、  $w$  をウェイトとする。関数  $f$  に対し、

$$\|f\|_{L_w^p} := \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p}$$

と定め、  $\|f\|_{L_w^p} < \infty$  を満たす  $f$  全体を  $L_w^p$  と書く。

**定義 1.5.** ウェイト  $w$  が

$$Mw(x) \leq Cw(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

を満たすとき、  $A_1$  ウェイトという。一方、  $1 < p < \infty$  を定数として、  $w$  が

$$\sup_B \frac{1}{|B|} \|w^{1/p} \chi_B\|_{L^p} \|w^{-1/p} \chi_B\|_{L^{p'}} < \infty$$

を満たすとき、  $A_p$  ウェイトという。但し、上限はすべての開球  $B$  についてとるものとし、  $p'$  は  $1/p + 1/p' = 1$  を満たす数とする。  $1 \leq p < \infty$  について、  $A_p$  ウェイト全体を  $A_p$  と書く。

**注意 1.6.**  $A_1$  ウェイトの定義は、上記のように  $M$  を用いると簡潔に書くことができる。  $M$  を用いずに、ウェイト  $w$  が  $A_1$  ウェイトであることを

$$[w]_{A_1} := \sup_B \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B w(x) dx \cdot \|w^{-1}\|_{L^\infty(B)} \right\}$$

が有限値であることによって定義することもできる。この値  $[w]_{A_1}$  を  $w$  の  $A_1$  定数と呼ぶ。一方、  $1 < p < \infty$  の場合は

$$[w]_{A_p} := \sup_B \left( \frac{1}{|B|} \|w^{1/p} \chi_B\|_{L^p} \|w^{-1/p} \chi_B\|_{L^{p'}} \right)^p$$

を  $w$  の  $A_p$  定数と呼ぶ。

$A_p$  について、包含関係に関する単調性、すなわち、定数  $1 \leq p \leq q < \infty$  に対して、  $A_p \subset A_q$  が成り立つことが知られている。このことから、ウェイトのクラス  $A_\infty$  を次で定義することができる。

**定義 1.7.**  $A_\infty := \bigcup_{1 < p < \infty} A_p$  と定め、各  $w \in A_\infty$  を  $A_\infty$  ウェイトという。

ウェイト  $w$  が  $A_\infty$  に属することが次と同値であることも知られている：ある小さな定数  $\delta > 0$  が存在し、任意の開球  $B$  と任意の  $S \subset B$  に対して、

$$\frac{w(S)}{w(B)} \leq C \left( \frac{|S|}{|B|} \right)^\delta$$

が成り立つ。

次は Muckenhoupt [54] による有名な結果である。

定理 1.8. ウェイト  $w$  について、以下が成り立つ.

1.  $1 < p < \infty$  を定数とする. このとき、以下の 3 条件は同値である :

- (a)  $w \in A_p$  である.
- (b)  $M$  は  $L_w^p$  上有界である. すなわち、すべての  $f \in L_w^p$  に対して、 $\|Mf\|_{L_w^p} \leq C \|f\|_{L_w^p}$  が成り立つ.
- (c)  $M$  は  $L_w^p$  上で弱  $(p, p)$  型である. すなわち、すべての  $f \in L_w^p$  と  $\lambda > 0$  に対して、 $w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\})^{1/p} \leq C \lambda^{-1} \|f\|_{L_w^p}$  が成り立つ.

2. 以下の 2 条件は同値である :

- (a)  $w \in A_1$  である.
- (b)  $M$  は  $L_w^1$  上で弱  $(1, 1)$  型である. すなわち、すべての  $f \in L_w^1$  と  $\lambda > 0$  に対して、 $w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}) \leq C \lambda^{-1} \|f\|_{L_w^1}$  が成り立つ.

上記の定理の証明を含む Muckenhoupt の基本的な理論については、[7, 18, 19, 61] など詳しく解説されている. 次節で、指数  $p$  を可測関数  $p(\cdot)$  に置き換えた変動指数 Lebesgue 空間を定義し、 $M$  の有界性の観点から議論を深めていきたい.

## 2 変動指数 Lebesgue 空間

定義 2.1.  $p(\cdot) : \Omega \rightarrow [1, \infty]$  を可測関数とする. 変動指数 Lebesgue 空間  $L^{p(\cdot)}(\Omega)$  を

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) := \{f : \text{ある } \lambda > 0 \text{ について } \rho_p(f/\lambda) < \infty\}$$

で定義する. 但し、

$$\rho_p(f) := \int_{\{p(x) < \infty\}} |f(x)|^{p(x)} dx + \|f\|_{L^\infty(\{p(x) = \infty\})}. \quad (2.1)$$

さらに、

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} := \inf \{\lambda > 0 : \rho_p(f/\lambda) \leq 1\} \quad (2.2)$$

によって  $L^{p(\cdot)}(\Omega)$  のノルムを与えることができる.

注意 2.2.

1. 初めて式 (2.2) を見た人は、この式でノルムが与えられることを奇妙に感じるかもしれない. しかしながら、 $p(\cdot)$  が定数  $p$  の場合は、通常の  $L^p$  ノルム  $\|f\|_{L^p(\Omega)}$  に一致していることがわかる. 式 (2.2) のノルムを、Luxemburg–中野ノルム、または Kolmogorov–Minkowski ノルムと呼ぶことがある. また、ノルム (2.2) に対して、(2.1) をモジュラーと呼ぶこともある.
2. 以下、変動指数の議論においては、 $p(\cdot) : \Omega \rightarrow [1, \infty]$  に対し、 $p'(\cdot)$  は共役指数を表す. すなわち、 $p'(\cdot)$  は  $1/p(\cdot) + 1/p'(\cdot) \equiv 1$  を満たす関数であって、 $p(\cdot)$  の導関数ではない.



変動指数 Lebesgue 空間の様々な性質や近年の理論の発展については、文献 [7, 15, 34] など学ぶことができる。以下、 $\Omega$  で定義された可測関数  $p(\cdot)$  に対し、

$$p_+ := \text{ess.sup}_{x \in \Omega} p(x), \quad p_- := \text{ess.inf}_{x \in \Omega} p(x)$$

と定め、 $1 < p_- \leq p_+ < \infty$  を満たす  $p(\cdot)$  全体を  $\mathcal{P}(\Omega)$  と書く。変動指数のクラスの議論の際も、 $\Omega = \mathbb{R}^n$  の場合は、 $\mathcal{P} := \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  のように  $(\Omega)$  を省略して表記する。 $M$  の有界性の議論に入る前に、通常の Lebesgue 空間に由来する性質で、頻繁に用いられるものを幾つか紹介しておきたい。

**定理 2.3.**  $p(\cdot) : \Omega \rightarrow [1, \infty]$  に対し、以下が成り立つ：

1. (一般化された Hölder の不等式) 任意の  $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$  と  $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$  に対し、

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \left(1 + \frac{1}{p_-} - \frac{1}{p_+}\right) \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \|g\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)}.$$

2. (双対性)  $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$  において、 $\sup \left\{ \left| \int_{\Omega} f(x)u(x) dx \right| : \|u\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)} \leq 1 \right\}$  は  $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$  と同値なノルムを与える。
3. (稠密性)  $\Omega$  が開集合のとき、 $p_+ < \infty$  ならば、 $\Omega$  上で定義された無限回微分可能かつコンパクトな台をもつ関数全体は  $L^{p(\cdot)}(\Omega)$  において稠密である。

Cruz-Uribe–Fiorenza–Neugebauer [8, 9], Diening [13] により、変動指数に関する次の基本的なクラスが確立された。

**定義 2.4.**

1. 可測関数  $r(\cdot) : \Omega \rightarrow (0, \infty)$  が

$$|r(x) - r(y)| \leq \frac{C}{-\log(|x - y|)} \quad (|x - y| \leq 1/2)$$

を満たすとき、局所 log-Hölder 連続であるという。

2. 可測関数  $r(\cdot) : \Omega \rightarrow (0, \infty)$  が、ある実定数  $r_{\infty}$  について

$$|r(x) - r_{\infty}| \leq \frac{C}{\log(e + |x|)} \quad (x \in \Omega) \tag{2.3}$$

を満たすとき、 $\infty$  において log-Hölder 連続であるという。

3. 局所 log-Hölder 連続な関数全体、 $\infty$  において log-Hölder 連続な関数全体をそれぞれ  $LH_0(\Omega)$ ,  $LH_{\infty}(\Omega)$  と書く。さらに、 $LH(\Omega) := LH_0(\Omega) \cap LH_{\infty}(\Omega)$  と定める。
4.  $M$  が  $L^{p(\cdot)}(\Omega)$  上有界となるような  $p(\cdot) : \Omega \rightarrow [1, \infty]$  全体を  $\mathcal{B}(\Omega)$  と書く。

**注意 2.5.**

1. 可測関数  $r(\cdot) : \Omega \rightarrow (0, \infty)$  について、条件 (2.3) は次と同値である：

$$|r(x) - r(y)| \leq \frac{C}{\log(e + |x|)} \quad (|y| \geq |x|).$$

2.  $p_+ < \infty$  を満たす  $p(\cdot) : \Omega \rightarrow [1, \infty)$  に対して,  $p(\cdot) \in LH(\Omega)$  であることと  $1/p(\cdot) \in LH(\Omega)$  であることは同値である.

$L^{p(\cdot)}(\Omega)$  における  $M$  の有界性について, まずは十分条件に関する有名な結果を紹介する.

**定理 2.6.**

1. (Diening [13]) もし  $\Omega$  が有界領域ならば,  $\mathcal{P}(\Omega) \cap LH_0(\Omega) \subset \mathcal{B}(\Omega)$  が成り立つ.
2. (Cruz-Uribe–Fiorenza–Neugebauer [8, 9]) もし  $\Omega$  が開集合ならば,  $\mathcal{P}(\Omega) \cap LH(\Omega) \subset \mathcal{B}(\Omega)$  が成り立つ.
3. (Cruz-Uribe–Diening–Fiorenza [5], Diening–Harjulehto–Hästö–水田–下村 [16]) もし  $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty]$  が  $1 < p_- \leq p_+ \leq \infty$  かつ  $1/p(\cdot) \in LH$  を満たすならば,  $p(\cdot) \in \mathcal{B}$  である.

必要条件については, 次の結果が知られている.

**定理 2.7** (Diening–Harjulehto–Hästö–水田–下村 [16]).  $\Omega$  が開集合であるとする.  $p(\cdot) : \Omega \rightarrow [1, \infty]$  について, もし  $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\Omega)$  ならば,  $p_- > 1$  でなければならない.

次に, 必要十分条件についての結果を紹介する.

**定理 2.8** (Diening [14]).  $p(\cdot) \in \mathcal{P}$  に対し, 以下の条件は同値である :

(D1)  $p(\cdot) \in \mathcal{B}$ .

(D2)  $p'(\cdot) \in \mathcal{B}$ .

(D3) ある定数  $q \in (1, p_-)$  について,  $p(\cdot)/q \in \mathcal{B}$ .

(D4) 互いに素な開立方体の任意の族  $Y$  と任意の  $f \in L^{p(\cdot)}$  に対し,

$$\left\| \sum_{Q \in Y} |f|_Q \chi_Q \right\|_{L^{p(\cdot)}} \leq C \|f\|_{L^{p(\cdot)}}.$$

(D1) と (D2) の同値性については, 2017 年に Lerner [52] によって, 別証明を含む重み付き関数空間への一般化が与えられている.

以上, 十分条件, 必要条件, 必要十分条件について, それぞれよく知られた結果を紹介した. ここから, さらに考察を深めていきたい. 条件 (D4) において, 開立方体  $Q$  を任意に 1 つとり,  $Y := \{Q\}$ ,  $f := f \chi_Q$  とおくと, (D4) よりも弱い次の条件が得られる :

(A1) 任意の開立方体  $Q$  と任意の  $f \in L^{p(\cdot)}$  に対し,  $\|f\|_Q \chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}} \leq C \|f \chi_Q\|$ .

$L^{p(\cdot)}$  における Hölder の不等式と双対性を用いると, (A1) が次の条件と同値になることがわかる :

(A2)  $\sup_Q \frac{1}{|Q|} \| \chi_Q \|_{L^{p(\cdot)}} \| \chi_Q \|_{L^{p'(\cdot)}} < \infty$ , 但し, 上限はすべての開立方体  $Q$  についてとるものとする.

(A2) の数式が Muckenhoupt の  $A_p$  ウェイトの定義に似ていることから、条件 (A1) あるいは (A2) を変動指数についての Muckenhoupt 条件と呼び、この条件を満たす  $p(\cdot)$  全体を  $\mathcal{A}$  と書くことにする。Muckenhoupt のウェイトに関して成り立つ定理 1.8 と比較し、次の課題を考えてみたい。

**課題 2.9.** 次の 3 条件が同値となるような  $p(\cdot) \in \mathcal{P}$  に関する仮定を求めよ：

(C1)  $p(\cdot) \in \mathcal{A}$ .

(C2)  $p(\cdot) \in \mathcal{B}$ .

(C3)  $M$  は  $L^{p(\cdot)}$  において弱  $(p(\cdot), p(\cdot))$  型である。すなわち、任意の  $f \in L^{p(\cdot)}$  と  $\lambda > 0$  に対して、

$$\|\chi_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}}\|_{L^{p(\cdot)}} \leq C \lambda^{-1} \|f\|_{L^{p(\cdot)}}$$

が成り立つ。

**注意 2.10.** 課題 2.9 に関して、これまでに以下のことが知られている。

1.  $\mathcal{B}$  と  $\mathcal{A}$  の定義より、(C2)  $\Rightarrow$  (C1) は正しい。また、通常の意味で有界ならば弱い意味でも有界だから、(C2)  $\Rightarrow$  (C3) も正しい。さらに、(C3)  $\Rightarrow$  (C1) は簡単な計算で示することができる。したがって、問題となるのは (C1)  $\Rightarrow$  (C2) の成立、あるいは (C1)  $\Rightarrow$  (C3) の成立である。
2.  $p(\cdot)$  がある球の外側では定数である場合、Kopaliani [47] は (C1)  $\Rightarrow$  (C2) が成り立つことを示している。すなわち、この場合は (C1), (C2), (C3) は同値である。
3.  $p(\cdot)$  が対称減少である場合、すなわち、 $p(x) \geq p(y)$  ( $|x| \leq |y|$ ) を満たす場合、Lerner [51] は (C1)  $\Rightarrow$  (C3) が成り立つことを示している。すなわち、この場合は (C1) と (C3) は同値である。
4.  $n \geq 2$  の場合、Kopaliani [48] は次の反例を挙げて、(C1)  $\Rightarrow$  (C3) が正しいとは限らないことを示した。まず、定数  $1 < p_1 < p_2 < \infty$  をとり、 $\mathbb{R}$  上の無限回微分可能な関数  $k$  を次を満たすようにとる：

- (a) 区間  $[0, 3]$  の外では恒等的に  $p_1$  に等しい。
- (b) 区間  $[1, 2]$  では恒等的に  $p_2$  に等しい。
- (c)  $t \in [0, 1] \cup [2, 3]$  に対しては、 $p_1 < k(t) < p_2$ 。

これを用いて、 $\mathbb{R}^n$  上の関数  $p(\cdot)$  を

$$p(x) := k(x_1) \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

と定めると、 $p(\cdot)$  は (C1) を満たすが、(C3) は満たさない。当然ながら、この関数は対称減少ではない。

上で述べた Kopaliani [47] による結果を改めて定理として書いておきたい。この定理については、Lerner [51] によって別証明も与えられている。

**定理 2.11.**  $p(\cdot) \in \mathcal{P}$  に対し、次の 2 条件を仮定する：

(C0)  $p(\cdot)$  はある球の外側では定数である.

(C1)  $p(\cdot) \in \mathcal{A}$ .

このとき,  $p(\cdot) \in \mathcal{B}$  が成り立つ.

出未–中井–澤野 [33] において, Lerner [51] による別証明を少し修正することによって仮定 (C0) を弱くできること, 正確には次の定理が成り立つことが証明されている.

**定理 2.12.**  $p(\cdot) \in \mathcal{P}$  に対し, 次の 2 条件を仮定する :

(C0)'  $p(\cdot) \in LH_\infty$ .

(C1)  $p(\cdot) \in \mathcal{A}$ .

このとき,  $p(\cdot) \in \mathcal{B}$  が成り立つ.

$p(\cdot) \in \mathcal{P}$  の場合と同様に,  $p_- = 1$  の場合についても次の課題を掲げることができるが, この課題も未解決である.

**課題 2.13.**  $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty]$  は  $1 = p_- \leq p_+ < \infty$  を満たすとする. このとき, (C1) と (C3) が同値となるような  $p(\cdot)$  に関する仮定を求めよ.

### 3 $A_{p(\cdot)}$ ウェイト

まずは, 2012 年の Cruz-Uribe–Fiorenza–Neugebauer [10] による  $A_{p(\cdot)}$  の定義と研究結果を紹介する. この定義は  $A_p$  ウェイトの定義の定数指数  $p$  を変動指数  $p(\cdot)$  に置き換えたものである. Diening–Hästö [17] によるもう 1 つの定義に比べれば,  $p_- = 1$  の場合も含んでおり,  $A_p$  の直接的な一般化であるといえる.

**定義 3.1.**  $p(\cdot)$  は  $1 \leq p_- \leq p_+ < \infty$  を満たすとする. ウェイト  $w$  が

$$\sup_B \frac{1}{|B|} \|w^{1/p(\cdot)} \chi_B\|_{L^{p(\cdot)}} \|w^{-1/p(\cdot)} \chi_B\|_{L^{p'(\cdot)}} < \infty$$

を満たすとき,  $A_{p(\cdot)}$  ウェイトであるという. 但し, 上限はすべての開球  $B$  についてとるものとする. また,  $A_{p(\cdot)}$  ウェイト全体を  $A_{p(\cdot)}$  と書く.

重み付き Lebesgue 空間における  $M$  の有界性の変動指数の場合への一般化は, それぞれ Cruz-Uribe–Fiorenza–Neugebauer [10] と Diening–Hästö [17] で独立した証明が与えられている. その結果の紹介の前に, 重み付きの変動指数 Lebesgue 空間を定義しておきたい.

**定義 3.2.**  $p(\cdot)$  は  $1 \leq p_- \leq p_+ < \infty$  を満たすとする. ウェイト  $w$  について,

$$\|f\|_{L_w^{p(\cdot)}} := \|fw^{1/p(\cdot)}\|_{L^{p(\cdot)}}$$

が有限であるような可測関数  $f$  全体を重み付き Lebesgue 空間  $L_w^{p(\cdot)}$  と定める.

重み付き Lebesgue 空間  $L_w^{p(\cdot)}$  はノルム  $\|\cdot\|_{L_w^{p(\cdot)}}$  に関する Banach 空間である. 後述の Banach 関数空間になることも知られている ([45]).

**定理 3.3** (Cruz-Uribe–Fiorenza–Neugebauer [10]).  $p(\cdot)$  は  $p(\cdot) \in LH$  かつ  $1 \leq p_- \leq p_+ < \infty$  を満たすものとし,  $w$  をウェイトとする. このとき, もし  $p(\cdot) \in \mathcal{P}$  ならば, 次の3条件は同値である:

- (a)  $w \in A_{p(\cdot)}$  である
- (b)  $M$  は  $L_w^{p(\cdot)}$  上有界である.
- (c)  $M$  は  $L_w^{p(\cdot)}$  上で弱  $(p(\cdot), p(\cdot))$  である. すなわち, すべての  $f \in L_w^{p(\cdot)}$  と  $\lambda > 0$  に対して,  $\|\chi_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}}\|_{L_w^{p(\cdot)}} \leq C\lambda^{-1} \|f\|_{L_w^{p(\cdot)}}$  が成り立つ.

一方, もし  $p_- = 1$  ならば, (a) と (c) は同値である.

一方, 2011年に公開された Diening–Hästö のプレプリント [17] では, 次の形で変動指数型の  $A_p$  ウェイトの定義が与えられ, 指数が定数の場合に由来する幾つかの基本性質が証明されている. 上で定義された  $A_{p(\cdot)}$  と区別するために  $\tilde{A}_{p(\cdot)}$  と書くことにする.

**定義 3.4.**  $p(\cdot) \in \mathcal{P}$  であると仮定する. ウェイト  $w$  が

$$\sup_B |B|^{-p_B} \|w\chi_B\|_{L^1} \|w^{-1}\chi_B\|_{L^{p(\cdot)/p(\cdot)}} < \infty$$

を満たすとき,  $\tilde{A}_{p(\cdot)}$  ウェイトであるという. 但し, 上限はすべての開球  $B$  についてとるものとし,  $p_B$  は  $B$  における  $p(\cdot)$  の調和平均, すなわち

$$p_B := \left( \frac{1}{|B|} \int_B \frac{1}{p(x)} dx \right)^{-1}$$

である.  $\tilde{A}_{p(\cdot)}$  ウェイト全体を  $\tilde{A}_{p(\cdot)}$  と書く.

この定義に基づいて, Diening–Hästö [17] は次の単調性を示している.

**定理 3.5.**  $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P} \cap LH$  が  $p(\cdot) \leq q(\cdot)$  を満たすとき,

$$A_{p_-} \subset \tilde{A}_{p(\cdot)} \subset \tilde{A}_{q(\cdot)} \subset A_{q_+}$$

が成り立つ.

**定理 3.6** (Diening–Hästö [17]).  $p(\cdot) \in \mathcal{P} \cap LH$  とウェイト  $w$  に対して,  $w \in \tilde{A}_{p(\cdot)}$  であることと  $M$  が  $L_w^{p(\cdot)}$  上有界であることは同値である.

**課題 3.7.** プレプリント [17] で示されたウェイトのクラスの単調性などの基本性質について, より良い自己完結した証明を与えることは可能だろうか? また, Cruz-Uribe–Fiorenza–Neugebauer [10] による  $A_{p(\cdot)}$  の定義の場合に単調性を証明することはできるだろうか?

## 4 変動指数 Lebesgue 空間におけるモジュラー不等式

Lerner [50] は次の興味深い結果を証明している.

定理 4.1.  $p(\cdot) \in \mathcal{P}$  のとき, もしすべての  $f \in L^{p(\cdot)}$  に対して不等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} \{Mf(x)\}^{p(x)} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)} dx \quad (4.1)$$

が成立するならば,  $p(\cdot)$  は定数でなければならない.

$L^{p(\cdot)}$  において  $M$  が有界であるとは, すべての  $f \in L^{p(\cdot)}$  に対するノルム不等式

$$\|Mf\|_{L^{p(\cdot)}} \leq C \|f\|_{L^{p(\cdot)}}$$

が成り立つことをいう. 一方, 積分に関する不等式 (4.1) は, モジュラーを用いれば  $\rho_p(Mf) \leq C \rho_p(f)$  と表される. このようにモジュラーを用いて表される不等式をモジュラー不等式と呼ぶ. 指数が定数の関数空間においては, ノルム不等式とモジュラー不等式は同値である. Lerner の結果は, 両者の差異を示しており, 変動指数関数空間の研究において重要な意味をもつ. この結果に関連して, 現在までに以下のことが知られている. 出采 [24] は, ウェーブレット理論を用いて, 定理 4.1 の別証明を含むウェーブレットに関連した作用素についてのモジュラー不等式の証明を与えた. さらに, 出采 [24] の結果は, 出采-中井-澤野 [35] によって重み付きの場合へ一般化されている. また, 定理 4.1 の別証明は出采-中井-澤野 [33, 34] でも与えられている. 最近, Cruz-Uribe-Di Fratta-Fiorenza [6] によって, 次の形へ一般化されたモジュラー不等式

$$\int_{\Omega} \{Mf(x)\}^{p(x)} dx \leq c_1 \int_{\Omega} |f(x)|^{q(x)} dx + c_2$$

の成立条件が与えられたばかりである.

## 5 Banach 関数空間とボール Banach 関数空間

変動指数関数空間をより一般的な視点からとらえるため, Banach 関数空間を導入する. 以下,  $\mathcal{M}$  を  $\mathbb{R}^n$  上で定義された複素数値可測関数全体とする. まずは, Bennet-Sharpely [2] に基づいて Banach 関数空間の定義をしておきたい.

定義 5.1.  $X$  を  $\mathcal{M}$  の部分空間とする.  $X$  が Banach 関数空間であるとは, 汎関数  $\|\cdot\|_X : X \rightarrow [0, \infty)$  が存在して, すべての  $f, g, f_k \in \mathcal{M}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), 複素数  $\lambda$  および可測集合  $E$  に対して, 次の性質が成り立つことをいう.

(P1) (ノルム性)

(P1-1) (狭義正值性)  $\|f\|_X = 0$  となるのは, ほとんどいたるところで  $f = 0$  である場合に限る.

(P1-2) (斉次性)  $\|\lambda f\|_X = |\lambda| \|f\|_X$ .

(P1-3) (三角不等式)  $\|f + g\|_X \leq \|f\|_X + \|g\|_X$ .

(P2) (格子性) もしほとんどいたるところで  $0 \leq g \leq f$  ならば,  $\|g\|_X \leq \|f\|_X$ .

(P3) (Fatou 性) もしほとんどいたるところで  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$  かつ  $f_k \rightarrow f$  ( $k \rightarrow \infty$ ) ならば,  $\|f_k\|_X \rightarrow \|f\|_X$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

(P4) もし  $|E| < \infty$  ならば,  $\|\chi_E\|_X < \infty$ .

(P5) もし  $|E| < \infty$  ならば,  $\int_E |f(x)| dx \leq C_E \|f\|_X$  が成り立つ. 但し,  $C_E$  は正の定数で,  $E$  には依存するが,  $f$  には依らない.

$(X, \|\cdot\|_X)$  を Banach 関数空間と呼ぶことも多い.

Banach 関数空間の議論で重要となる随伴空間の定義, およびそれに関する基本的な性質を挙げておきたい.

**定義 5.2.** Banach 関数空間  $X$  に対し,  $\|f\|_{X'} < \infty$  を満たす  $f \in \mathcal{M}$  全体を  $X'$  と書き,  $X$  の随伴空間という. 但し,

$$\|f\|_{X'} := \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx \right| : \|g\|_X \leq 1 \right\}$$

であり, これを随伴ノルムと呼ぶ.

**補題 5.3.** Banach 関数空間  $X$  に対し, 次が成り立つ:

1. 随伴空間  $X'$  も Banach 関数空間である.
2. (Lorentz-Luxemberg の定理)  $(X')' = X$  が成り立つ. 特に,  $\|\cdot\|_X$  と  $\|\cdot\|_{(X')}$  は同値なノルムである.
3. (一般化された Hölder の不等式) すべての  $f \in X$  と  $g \in X'$  に対して,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_X \|g\|_{X'}.$$

通常の Lebesgue 空間  $L^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$  は定数) だけでなく, 変動指数 Lebesgue 空間  $L^{p(\cdot)}$  も Banach 関数空間であり, その随伴空間が  $L^{p'(\cdot)}$  であることが知られている ([49]). さらに, Banach 関数空間に適切なウェイトをつけた重み付きの関数空間も Banach 関数空間になることも示されている ([45]).

Banach 関数空間の条件をみたす関数空間は, その枠組みの中で統一的に議論していくことが可能となる. しかしながら, その枠組みでとらえることができない関数空間も存在する. ここで, Morrey 空間を定義しておきたい.

**定義 5.4.**  $\mathbb{R}^n$  の立方体全体の集合を  $\mathcal{Q}$  で表す.  $0 < q \leq p < \infty$  とし,

$$L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^n) := \{f : \text{任意の有界閉集合 } K \subset \mathbb{R}^n \text{ に対して, } f \in L^q(K)\}$$

と定める. Morrey 空間  $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$  を

$$\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}$$

で定める. 但し,

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)} := \sup_{Q \in \mathcal{Q}} |Q|^{1/p-1/q} \left( \int_Q |f(x)|^q dx \right)^{1/q}.$$

一般に, Morrey 空間は Banach 関数空間にはならないことが示されている. この点については, 次の定義のあとで改めて触れる. したがって, Morrey 空間を Banach 関数空間の枠組みでとらえることはできない. そこで, 一般の Morrey 空間を含むようなより広い関数のクラスが求められる. Hakim–澤野 [21] にしたがって, ボール Banach 空間の定義を与えておきたい.

**定義 5.5.** 定義 5.1 において,  $E$  を任意の開球  $B$  に置き換えたとき, すなわち, 条件 (P4), (P5) をそれぞれ次の (P4)', (P5)' で置き換えたとき,  $X$  をボール Banach 関数空間という.

(P4)' 任意の開球  $B$  に対して,  $\|\chi_B\|_X < \infty$ .

(P5)' 任意の開球  $B$  に対して,  $\int_B |f(x)| dx \leq C_B \|f\|_X$  が成り立つ. 但し,  $C_B$  は正の定数で,  $B$  には依存するが,  $f$  には依らない.

ボール Banach 関数空間の随伴空間についても, Banach 関数空間の場合と同様に定義する.

ボール Banach 関数空間の名前は, 定義に開球 (ball) を用いたことに由来する. しかしながら, 上記 2 条件において, 開球を開立方体あるいはコンパクト集合に置き換えることもできる. 澤野–田中 [60] により,  $1 < q < p < \infty$  のとき,  $M_q^p(\mathbb{R}^n)$  は (P5)' をみたすが (P5) をみたさないこと, すなわち, ボール Banach 関数空間であるが Banach 関数空間ではないことが証明されている.

## 6 変動指数の $A_\infty$ 条件と Herz 空間への応用

出束 [25, 26] において, 3 つの指数のうち, 積分指数を変動させた変動指数 Herz 空間が初めて定義された. まずは, その定義を確認しておきたい. Herz 空間の定義のために, 以下の記号を用いる:

1. 整数  $l$  に対して,  $B_l := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2^l\}$ ,  $R_l := B_l \setminus B_{l-1}$ ,  $\chi_l := \chi_{R_l}$  と書く.
2.  $\tilde{\chi}_0 := \chi_{B_0}$ , 自然数  $m$  に対しては  $\tilde{\chi}_m := \chi_{R_m}$  と書く.

**定義 6.1.**  $\alpha$  を実数とし,  $0 < q \leq \infty$ ,  $p(\cdot) \in \mathcal{P}$  とする.

1.  $\Omega$  に含まれるすべてのコンパクト集合  $K$  に対して  $f \in L^{p(\cdot)}(K)$  を満たす関数  $f$  全体を  $L_{\text{loc}}^{p(\cdot)}(\Omega)$  と定める.
2. 斉次 Herz 空間  $\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha, q}$  を

$$\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha, q} := \{f \in L_{\text{loc}}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha, q}} < \infty\}$$

で定める. 但し,

$$\|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha, q}} := \left\| \left\{ 2^{\alpha l} \|f \chi_l\|_{L^{p(\cdot)}} \right\}_{l=-\infty}^{\infty} \right\|_{\ell^q(\mathbb{Z})}.$$



3. 非斉次 Herz 空間  $K_{p(\cdot)}^{\alpha,q}$  を

$$K_{p(\cdot)}^{\alpha,q} := \{f \in L_{\text{loc}}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{K_{p(\cdot)}^{\alpha,q}} < \infty\}$$

で定める。但し,

$$\|f\|_{K_{p(\cdot)}^{\alpha,q}} := \left\| \{2^{\alpha m} \|f \tilde{\chi}_m\|_{L^{p(\cdot)}}\}_{m=0}^{\infty} \right\|_{\ell^q(\mathbb{N}_0)}.$$

Herz 空間上の作用素の有界性を証明するためには,  $R_l$  や  $B_l$  などの特性関数のノルムをいかにうまく評価するかが鍵となる。そのために, 次の補題は重要な役割を果たす。

**補題 6.2.**  $p(\cdot) \in \mathcal{P}$  が定理 2.8 の条件 (D4) を満たすとする。このとき, ある小さな定数  $\delta > 0$  が存在し, すべての開球  $B$  と  $S \subset B$  に対して

$$\frac{\|\chi_S\|_{L^{p(\cdot)}}}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}}} \leq C \left( \frac{|S|}{|B|} \right)^\delta$$

が成り立つ。

この補題の結論の数式が Muckenhoupt の  $A_\infty$  クラスの条件と似ていることから, 変動指数  $p(\cdot)$  についての  $A_\infty$  条件と呼ぶことにする。Diening[14] による 2 つの結果 (本稿の定理 2.8 と次の命題) を用いて, 出未 [26] は補題 6.2 を証明している。

**命題 6.3** (Diening[14]).  $p(\cdot) \in \mathcal{P}$  が定理 2.8 の条件 (D4) を満たすとする。このとき, ある小さな定数  $\delta > 0$  が存在し, 互いに素な開立方体の族  $Y$  を任意にとれば, すべての非負値の数列  $\{t_Q\}_{Q \in Y}$ , および  $f_Q \neq 0$  ( $Q \in Y$ ) を満たすすべての  $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$  に対して

$$\left\| \sum_{Q \in Y} t_Q \left| \frac{f}{f_Q} \right|^\delta \chi_Q \right\|_{L^{p(\cdot)}} \leq C \left\| \sum_{Q \in Y} t_Q \chi_Q \right\|_{L^{p(\cdot)}}$$

が成り立つ。

Cruz-Uribe–Hernández–Martell [11] は, Rubio de Francia のアルゴリズム [12, 57, 58, 59] を用いて, 補題 6.2 の簡潔な別証明を与えている。その別証明は, ノルム  $\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}}$  を一般の Banach 関数空間のノルムに置き換えた場合についても有効である。すなわち, 次の定理が成り立つ。

**定理 6.4.**  $X$  を Banach 関数空間とし,  $M$  が随伴空間  $X'$  上で有界であると仮定する。このとき, ある小さな定数  $\delta > 0$  が存在し, すべての開球  $B$  と  $S \subset B$  に対して

$$\frac{\|\chi_S\|_X}{\|\chi_B\|_X} \leq C \left( \frac{|S|}{|B|} \right)^\delta$$

が成り立つ。

Banach 関数空間  $X$  として, 特に重み付きの変動指数 Lebesgue 空間を考えることもできる。したがって, この結果を重み付き変動指数 Herz 空間における作用素の有界性の証明へ応用することも可能である (出未–野井 [36, 37, 38, 39])。また, BMO 関数を伴うコミューテーターの Herz 空間における有界性を証明するためには, 次節で議論する BMO ノルムの一般化が不可欠である (出未 [27, 29])。

**注意 6.5.** 補題 6.2 を用いて Herz 空間における作用素の有界性を証明する際には、 $\delta$  の存在が重要であり、これを用いて指数  $\alpha$  の範囲を決めることになる。しかしながら、 $\delta$  を具体的に書くことは非常に難しく、 $\alpha$  の範囲が不明確であるという欠点がある (出末 [26, 28, 30])。Almeida–Drihem[1] は、 $\alpha$  と  $p$  を変動指数にした新たな Herz 空間を定義した。そこでの作用素の有界性の証明において、 $p(\cdot)$  に log-Hölder 連続条件を仮定し、 $p_\infty$  を用いて  $\alpha$  の範囲を決めることでこの欠点を克服した結果を示している。両者の比較のために、非斉次 Herz 空間における  $M$  の有界性の結果を紹介しておきたい。以下、 $0 < q \leq \infty, p(\cdot) \in \mathcal{P}$  とする。

1. (出末 [26])  $p(\cdot) \in \mathcal{B}$  を仮定し、定数  $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1)$  を、すべての開球  $B$  と  $S \subset B$  に対して

$$\frac{\|\chi_S\|_{L^{p(\cdot)}}}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}}} \leq C \left( \frac{|S|}{|B|} \right)^{\delta_1}, \quad \frac{\|\chi_S\|_{L^{p'(\cdot)}}}{\|\chi_B\|_{L^{p'(\cdot)}}} \leq C \left( \frac{|S|}{|B|} \right)^{\delta_2}$$

を満たすようにとる。さらに、 $-n\delta_1 < \alpha < n\delta_2$  を仮定する。このとき、 $M$  は  $K_{p(\cdot)}^{\alpha, q}$  上で有界である。

2. (Almeida–Drihem[1]) まずは  $\alpha(\cdot) \in L^\infty$  を仮定し、 $\alpha$  と  $p$  が変動する Herz 空間  $K_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot), q}$  を

$$K_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot), q} := \left\{ f \in L_{\text{loc}}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{K_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot), q}} := \left\| \left\{ \|2^{m\alpha(\cdot)} f \tilde{\chi}_m\|_{L^{p(\cdot)}} \right\}_{m=0}^\infty \right\|_{\ell^q(\mathbb{N}_0)} < \infty \right\}$$

で定める。さらに、 $p(\cdot) \in LH$ ,  $\alpha(\cdot) \in LH_\infty$  および  $-\frac{n}{p_\infty} < \alpha_\infty < \frac{n}{(p')_\infty}$  を仮定する。但し、 $p_\infty, \alpha_\infty, (p')_\infty$  は定数で、それぞれ指数  $p(\cdot), \alpha(\cdot), p'(\cdot)$  に対する  $\infty$  における log-Hölder 連続条件 (2.3) に現れるものとする。このとき、 $M$  は  $K_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot), q}$  上で有界である。

## 7 BMO ノルムの一般化

**定義 7.1.** 局所可積分関数  $b$  で、次のセミノルム

$$\|b\|_{\text{BMO}} := \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(x) - b_Q| dx = \sup_Q \frac{1}{\|\chi_Q\|_{L^1}} \|(b - b_Q)\chi_Q\|_{L^1}$$

が有限であるもの全体を BMO と書き、BMO 空間という。但し、上限は開立方体  $Q$  全体についてとるものとする。セミノルム  $\|b\|_{\text{BMO}}$  を BMO ノルムと呼ぶ。

定数  $1 \leq p < \infty$  に対し、

$$\|b\|_{\text{BMO}_{L^p}} := \sup_Q \frac{1}{\|\chi_Q\|_{L^p}} \|(b - b_Q)\chi_Q\|_{L^p}$$

と定める。 $\|b\|_{\text{BMO}_{L^p}}$  は上で定義したセミノルム  $\|b\|_{\text{BMO}}$  と同値であることが古くから知られている。 $\|b\|_{\text{BMO}} \leq \|b\|_{\text{BMO}_{L^p}}$  が成り立つことは、Hölder の不等式から簡単にわかる。逆の評価、すなわち  $C \|b\|_{\text{BMO}_{L^p}} \leq \|b\|_{\text{BMO}}$  の成立については自明ではない。この証明に用いられるのが次に紹介する John–Nirenberg の不等式 [44] と呼ばれる有名な結果である。

定理 7.2. 定数  $c_1, c_2 > 0$  が存在し, 任意の  $\lambda > 0$ , 開立方体  $Q$ ,  $b \in \text{BMO}$  に対し,

$$|\{x \in Q : |b(x) - b_Q| > \lambda\}| \leq c_1 |Q| \exp\left(-\frac{c_2 \lambda}{\|b\|_{\text{BMO}}}\right)$$

が成り立つ.

本節では,  $\|b\|_{\text{BMO}}$  のさらなる一般化について議論する. まずは,  $\|b\|_{\text{BMO}_{L^p}}$  の定数  $p$  を変動指数  $p(\cdot)$  で置き換えた量

$$\|b\|_{\text{BMO}_{L^{p(\cdot)}}} := \sup_Q \frac{1}{\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}}} \|(b - b_Q)\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}}$$

を考える. これと元々のセミノルムとの同値性について, これまでに幾つかの結果が知られている. 出束 [26] は  $p(\cdot) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{B}$  の場合に, Diening による命題 6.3 を用いて同値性を証明した. さらに, 出束-澤野 [41], 出束-澤野-筒井 [43] で, より一般の  $p(\cdot)$  に関しても同値性を証明した. これらの結果を整理すると, 次のようになる:

1. (出束 [26]) もし  $p(\cdot) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{B}$  ならば,  $\|b\|_{\text{BMO}_{L^{p(\cdot)}}}$  と  $\|b\|_{\text{BMO}}$  は同値である.
2. (出束-澤野 [41]) もし  $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty)$  が  $p_- = 1, p_+ < \infty$  および  $p(\cdot) \in LH$  を満たすならば,  $\|b\|_{\text{BMO}_{L^{p(\cdot)}}}$  と  $\|b\|_{\text{BMO}}$  は同値である.
3. (出束-澤野-筒井 [43]) もし  $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty)$  が  $p_+ < \infty$  を満たし, さらに  $M$  が  $L^{p(\cdot)}$  において弱  $(p(\cdot), p(\cdot))$  型であるならば,  $\|b\|_{\text{BMO}_{L^{p(\cdot)}}}$  と  $\|b\|_{\text{BMO}}$  は同値である.

特に, 出束-澤野-筒井 [43] の結果は, 次に紹介する定理 7.3 に含まれるものではないことに注意しておきたい.

次に, 指数だけではなく, 関数空間そのものの置き換えを考える. 2012 年に Ho[22] は, Banach 関数空間を用いた原子分解の一般化の副産物として, 次の定理を得た.

定理 7.3. Banach 関数空間  $X$  に対し,

$$\|b\|_{\text{BMO}_X} := \sup_Q \frac{1}{\|\chi_Q\|_X} \|(b - b_Q)\chi_Q\|_X$$

と定める. もし Hardy-Littlewood の極大作用素  $M$  が随伴空間  $X'$  上有界ならば,  $\|b\|_{\text{BMO}_X}$  と  $\|b\|_{\text{BMO}}$  は同値である. すなわち, 定数  $C \geq 1$  が存在し, すべての  $b \in \text{BMO}$  に対して

$$C^{-1} \|b\|_{\text{BMO}_X} \leq \|b\|_{\text{BMO}} \leq C \|b\|_{\text{BMO}_X}$$

が成り立つ.

この定理について, 出束 [31] は Rubio de Francia のアルゴリズムを用いた簡潔な別証明を与えた. この論文で与えた証明は,  $X$  がボール Banach 関数空間の場合や, 次節で紹介する Campanato 空間の特徴付けへも応用できる (出束-澤野 [42] 参照).

注意 7.4. BMO ノルムの一般化について, Orlicz ノルムを用いた次の結果も知られている. 結果の紹介の前に, 幾つかの定義をしておきたい.

1. 関数  $\Phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  が Young 関数であるとは、 $\Phi$  が凸関数かつ左連続で、さらに

$$\Phi(0) = \lim_{r \rightarrow +0} \Phi(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \Phi(r) = +\infty$$

を満たすことをいう。

2.  $\Phi$  を Young 関数とする。  $\mathbb{R}^n$  上の局所可積分関数  $f$  で、ある  $\lambda > 0$  について

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx < +\infty$$

を満たすものの全体を  $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$  と書き、Orlicz 空間と呼ぶ。

3. Young 関数  $\Phi$  について、ある定数  $k > 1$  が存在し、すべての  $r > 0$  に対して  $\Phi(2r) \leq k\Phi(r)$  が成り立つとき、 $\Phi$  は  $\Delta_2$  条件を満たすという。

Orlicz 空間  $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$  は、ノルム

$$\|f\|_{L^\Phi} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}$$

に関する Banach 空間となる。また、Orlicz 空間  $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$  は通常の Lebesgue 空間  $L^p(\mathbb{R}^n)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) の一般化である。実際、 $1 \leq p < \infty$  として、次の 2 つの Young 関数

$$\Phi_1(r) := r^p, \quad \Phi_2(r) := \begin{cases} 0 & (0 \leq r \leq 1) \\ +\infty & (r > 1) \end{cases}$$

を考えてみる。このとき、 $L^{\Phi_1}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ 、 $L^{\Phi_2}(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$  が成立する。

Young 関数  $\Phi$  と Orlicz ノルム  $\|\cdot\|_{L^\Phi}$  を用いて、次のような BMO ノルムの一般化

$$\|b\|_{\text{BMO}_\Phi} := \sup_Q \frac{1}{\|\chi_Q\|_{L^\Phi}} \|(b - b_Q)\chi_Q\|_{L^\Phi}$$

を考える。2014 年に Guliev–Deringoz [20] によって、もし  $\Phi$  が  $\Delta_2$  条件を満たすならば、 $\|b\|_{\text{BMO}_\Phi}$  が従来の BMO ノルムと同値になることが示されている。しかしながら、この結果は 2012 年に Ho[22] によって証明された定理 7.3 に含まれている。Young 関数  $\Phi$  が  $\Delta_2$  条件を満たすときに  $X = L^\Phi(\mathbb{R}^n)$  が定理 7.3 の仮定を満たすことは Kokilashvili–Krbeč [46] で示されている。

一方、2014 年に Ho[23] は、次に紹介する John–Nirenberg の不等式の変動指数への一般化を証明している。

**定理 7.5.**  $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty]$  が  $p_+ < \infty$  かつ  $p(\cdot) \in LH$  を満たすとする。このとき、定数  $c_1, c_2 > 0$  が存在し、任意の  $\lambda > 0$ 、開立方体  $Q$ 、 $b \in \text{BMO}$  に対し、

$$\left\| \chi_{\{x \in Q : |b(x) - b_Q| > \lambda\}} \right\|_{L^{p(\cdot)}} \leq c_1 \|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}} \exp\left(-\frac{c_2 \lambda}{\|b\|_{\text{BMO}}}\right)$$

が成り立つ。

論文 [23] の最後で、上記の定理における  $p(\cdot)$  に関する仮定の緩和の可能性が示唆されている。

**課題 7.6.** 定理 7.3 の逆については、まだ明らかになっていない。すなわち、適当な Banach 関数空間 (あるいはボール Banach 関数空間)  $X$  について、定理 7.3 の結論が正しいならば、 $X$  はどのような空間でなければならないだろうか？

## 8 Campanato ノルムの一般化

本稿の最後に、Campanato ノルムの一般化について議論する。

**定義 8.1.**  $0 < \theta \leq 1$ ,  $1 \leq p < \infty$  を定数とする。また、開立方体  $Q$  に対し、 $\ell(Q)$  は  $Q$  の辺の長さを表すものとする。このとき、

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p,\theta}} := \sup_Q \ell(Q)^{-\theta} \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^p dx \right)^{1/p} = \sup_Q \ell(Q)^{-\theta} \frac{\|(f - f_Q)\chi_Q\|_{L^p}}{\|\chi_Q\|_{L^p}}$$

が有限となる  $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  全体を  $\mathcal{L}^{p,\theta}$  と書き、Campanato 空間という。但し、上限は開立方体  $Q$  全体についてとるものとする。

上で定めた  $\|f\|_{\mathcal{L}^{p,\theta}}$  について、次の同値性

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{1,\theta}} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^{p,\theta}} \leq c_p \|f\|_{\mathcal{L}^{1,\theta}}$$

が成り立つことが知られている (Campanato [3], Meyers [53], 中井 [55], Peetre [56] など参照)。

$\|f\|_{\mathcal{L}^{p,\theta}}$  の定義において、 $L^p$  を一般のボール Banach 関数空間  $X$  に置き換えた量を考える。  $X$  に関する適切な条件のもとで、この量は元々の Campanato ノルムと同値となる。

**定理 8.2** (出未-澤野 [42]).  $0 < \theta \leq 1$  を定数、 $X$  をボール Banach 関数空間とし、

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{X,\theta}} := \sup_Q \ell(Q)^{-\theta} \frac{\|(f - f_Q)\chi_Q\|_X}{\|\chi_Q\|_X}$$

と定める。また、Hardy–Littlewood の極大作用素  $M$  が随伴空間  $X'$  上有界であると仮定する。このとき、定数  $C \geq 1$  が存在し、すべての  $f \in \mathcal{L}^{1,\theta}$  に対して

$$C^{-1} \|f\|_{\mathcal{L}^{X,\theta}} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^{1,\theta}} \leq C \|f\|_{\mathcal{L}^{X,\theta}}$$

が成り立つ。

定理 8.2 は次の定理から導かれる。

**定理 8.3** (出未-澤野 [42]).  $X$  をボール Banach 関数空間とし、Hardy–Littlewood の極大作用素  $M$  が随伴空間  $X'$  上有界であると仮定する。このとき、定数  $C \geq 1$ ,  $1 < p < \infty$  が存在し、

$$C^{-1} |f|_Q \leq \frac{1}{\|\chi_Q\|_X} \|f\chi_Q\|_X \leq C \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

が成り立つ。

**証明.** 本稿では、Rubio de Francia のアルゴリズムがどこでどのように用いられているかに着目した証明の概略を述べる。証明の詳細については、[42] の 3 節を参照されたい。

結論の左側の不等号は、Banach 関数空間に由来するボール Banach 関数空間の基本的な性質、および  $M$  の有界性から簡単に示すことができる。以下、右側の不等号を示す。関数  $f$  と立方体  $Q$  を任意にとる。補題 5.3 より

$$\|f\chi_Q\|_X = \|f\chi_Q\|_{(X)'} = \sup \left\{ \left| \int_Q f(x)g(x) dx \right| : g \in X', \|g\|_{X'} \leq 1 \right\}$$

となる.  $\|g\|_{X'} \leq 1$  を満たす  $g \in X'$  を任意にとり, 以下, ある  $C > 0, 1 < p < \infty$  について

$$\left| \int_Q f(x)g(x) dx \right| \leq C \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \|\chi_Q\|_X \quad (8.1)$$

が成り立つことを示す. ほとんどいたるところで  $g = 0$  の場合に (8.1) が成り立つのは明らかなので, 以下ではそうでない  $g$  について考える.  $B := \|M\|_{X' \rightarrow X'}$  とおき, 関数  $Rg$  を

$$Rg(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k g(x)}{(2B)^k}$$

によって定義する. 但し

$$M^k g := \begin{cases} |g| & (k=0) \\ Mg & (k=1) \\ M(M^{k-1}g) & (k \geq 2) \end{cases}$$

である. 関数  $Rg$  は以下の性質をもつ:

1.  $\mathbb{R}^n$  上ほとんどいたるところで  $|g| \leq Rg$ .
2.  $\|Rg\|_{X'} \leq 2\|g\|_{X'} \leq 2$ .
3.  $M(Rg)(x) \leq 2B Rg(x)$ .

特に, 3番目の性質から  $Rg$  が  $A_1$  ウェイトであることがわかる. さらに, 右辺の定数  $2B$  に注目すると,  $A_1$  ウェイト固有の量である  $A_1$  定数が  $g$  に依らない値で評価できることもわかる. このことから,  $Q$  だけでなく  $g$  にも依らない2つの定数  $q > 1, C > 0$  について, 逆 Hölder 不等式

$$\left( \frac{1}{|Q|} \int_Q Rg(x)^q dx \right)^{1/q} \leq \frac{C}{|Q|} Rg(Q)$$

が得られる. 以下,  $p := q'$  と書くことにする. この結果と通常の Hölder の不等式および一般化された Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} \left| \int_Q f(x)g(x) dx \right| &\leq \int_Q |f(x)|Rg(x) dx \\ &\leq \|f\chi_Q\|_{L^p} \|(Rg)\chi_Q\|_{L^q} \\ &= \|f\chi_Q\|_{L^p} \cdot |Q|^{1/q} \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q Rg(x)^q dx \right)^{1/q} \\ &\leq \|f\chi_Q\|_{L^p} \cdot |Q|^{1/q} \cdot \frac{C}{|Q|} Rg(Q) \\ &\leq \|f\chi_Q\|_{L^p} \cdot C |Q|^{-1/p} \|Rg\|_{X'} \|\chi_Q\|_X \\ &\leq 2C |Q|^{-1/p} \|f\chi_Q\|_{L^p} \cdot \|\chi_Q\|_X \end{aligned}$$

が得られる. したがって, (8.1) が成立することがわかる. □

## 9 ボール Banach 関数空間における補外定理

前節の定理 8.3 のように, Banach 関数空間の場合に成立している結果の中には, その証明において条件 (P4), (P5) をそれぞれ (P4)', (P5)' に置き換えても差し支えないもの, つまりボール Banach 関数空間の場合についても成立する結果がある. 出束 [32] においても, 出束-澤野 [40] におけるサンプリング定理のボール Banach 関数空間への一般化を解説している.

本節では, Cruz-Uribe [4] および Cruz-Uribe-Martell-Pérez [12] を参考にしつつ, ボール Banach 関数空間における補外定理を解説する. 以下  $\mathcal{F}$  は,  $\mathbb{R}^n$  上ほとんどいたるところで, 0 以上かつ恒等的に 0 ではない可測関数  $f, g$  の組  $(f, g)$  全体を表すものとする.

### 9.1 主結果とその証明

Banach 関数空間における補外定理 [4, Theorem 10.1] を次のようにボール Banach 関数空間の場合へ拡張することができる.

**定理 9.1.**  $X$  はボール Banach 関数空間であり,  $M$  は  $X$  上有界かつ  $X'$  上有界であるとする. また, ある定数  $1 \leq p < \infty$  が存在し, 各  $w \in A_p$  について,  $f \in L_w^p$  を満たす任意の  $(f, g) \in \mathcal{F}$  に対し,

$$\|f\|_{L_w^p} \leq C \|g\|_{L_w^p}$$

が成り立つと仮定する. このとき,  $f \in X$  を満たす任意の  $(f, g) \in \mathcal{F}$  に対し,

$$\|f\|_X \leq C \|g\|_X$$

が成り立つ.

定理 9.1 の証明のために, 次の 2 つの補題を用いる. 最初の補題は, Jones の因数分解定理と呼ばれる Muckenhoupt の  $A_p$  ウェイトに関する有名な結果である.

**補題 9.2.** 定数  $1 < p < \infty$  とウェイト  $w$  について, 次の 2 条件は同値である:

- (a)  $w \in A_p$ .
- (b)  $w = w_1 w_2^{1-p}$  を満たす  $w_1, w_2 \in A_1$  が存在する.

次の補題は, 定数指数の重み付き Lebesgue 空間における補外定理である.

**補題 9.3.** ある定数  $1 \leq p_0 < \infty$  が存在し, 各  $w_0 \in A_{p_0}$  について,  $f \in L_{w_0}^{p_0}$  を満たす任意の  $(f, g) \in \mathcal{F}$  に対し,

$$\|f\|_{L_{w_0}^{p_0}} \leq C \|g\|_{L_{w_0}^{p_0}}$$

が成り立つと仮定する. このとき, 各  $1 < p < \infty$  および各  $w \in A_p$  について,  $f \in L_w^p$  を満たす任意の  $(f, g) \in \mathcal{F}$  に対し,

$$\|f\|_{L_w^p} \leq C \|g\|_{L_w^p}$$

が成り立つ.

定理 9.1 の証明. 補題 9.3 より, 定理 9.1 の仮定がどのような  $1 \leq p < \infty$  についても正しいことがわかる. 特に,  $p = 2$  について正しいことに注意しておきたい.

以下,  $X_1 := X, X_2 := X'$  と書くことにする. この記号にしたがって, 各  $j = 1, 2$  に対し,  $B_j := \|M\|_{X_j \rightarrow X_j}$  とおき,  $0 < \|h_j\|_{X_j} < \infty$  を満たす  $h_j$  について関数  $R_j h_j$  を

$$R_j h_j := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k h_j}{(2B_j)^k}$$

で定める. このとき, 以下が成立する:

(A)  $|h_j| \leq R_j h_j$ .

(B)  $\|R_j h_j\|_{X_j} \leq 2 \|h_j\|_{X_j}$ .

(C)  $R_j h_j$  は  $[R_j h_j]_{A_1} \leq 2B_j$  を満たす  $A_1$  ウェイトである. 特に, 定数  $2B_j$  は関数  $h_j$  のとり方に依らない.

いま,  $0 < \|f\|_X < \infty$  かつ  $0 < \|g\|_X < \infty$  を満たす  $(f, g) \in \mathcal{F}$  を任意に 1 組とり, 以下

$$h_1 := \frac{f}{\|f\|_X} + \frac{g}{\|g\|_X}$$

について考える. 三角不等式より,  $\|h_1\|_X \leq 2$  がわかる. 一方,  $\|f\|_X$  を

$$\|f\|_X = \|f\|_{(X')'} = \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) h_2(x) dx \right| : h_2 \in X', \|h_2\|_{X'} \leq 1 \right\}$$

と書き換えることができる. ここで,  $0 < \|h_2\|_{X'} \leq 1$  を満たす  $h_2 \in X'$  を任意に 1 つとる. このとき,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) h_2(x) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} f(x) R_2 h_2(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) R_1 h_1(x)^{-1/2} R_2 h_2(x)^{1/2} \cdot R_1 h_1(x)^{1/2} R_2 h_2(x)^{1/2} dx \\ &\leq \sqrt{I_1} \sqrt{I_2} \end{aligned} \quad (9.1)$$

が成り立つ. 但し

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^2 R_1 h_1(x)^{-1} R_2 h_2(x) dx, \\ I_2 &:= \int_{\mathbb{R}^n} R_1 h_1(x) R_2 h_2(x) dx \end{aligned}$$

である.  $I_2$  については, 次のように簡単に評価できる:

$$I_2 \leq \|R_1 h_1\|_X \|R_2 h_2\|_{X'} \leq 2 \|h_1\|_X \cdot 2 \|h_2\|_{X'} \leq 8. \quad (9.2)$$

次に  $I_1$  の評価を行う. まず,  $w_0(x) := R_1 h_1(x)^{-1} R_2 h_2(x)$  とおくと, 補題 9.2 より  $w_0 \in A_2$  となることがわかる. 一方,  $0 \leq f \leq \|f\|_X h_1 \leq \|f\|_X R_1 h_1$  より

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 w_0(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (\|f\|_X R_1 h_1(x))^2 w_0(x) dx = \|f\|_X^2 I_2 \leq 8 \|f\|_X^2 < \infty, \quad (9.3)$$



すなわち,  $f \in L_{w_0}^2$  が成立する. したがって,  $p = 2$  かつ  $w = w_0 \in A_2$  について定理の仮定が成り立つので, 特に  $\|f\|_{L_{w_0}^2} \leq C \|g\|_{L_{w_0}^2}$  が成立する. また, (9.3) において  $f$  を  $g$  に置き換えた議論により,  $\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2 w_0(x) dx \leq 8 \|g\|_X^2$  が得られる. 以上のことから,

$$I_1 = \|f\|_{L_{w_0}^2}^2 \leq C \|g\|_X^2 \quad (9.4)$$

が成り立つ. よって, (9.1), (9.2), (9.4) より定理の結論が導かれる.  $\square$

## 9.2 補題の証明

主結果の証明で用いた2つの補題も下記のように Rubio de Francia のアルゴリズムを用いて証明することができる.

**補題 9.2** の証明. (b) $\Rightarrow$ (a) については  $A_p$  ウェイト ( $1 \leq p < \infty$ ) の定義と Hölder の不等式より簡単に導くことができる. 以下, (a) を仮定し, Rubio de Francia のアルゴリズムを用いて (b) が成り立つことを示す.  $1 < p < \infty$  と  $w \in A_p$  を固定し,  $q := pp'$  とおくと,  $1 < q < \infty$  である. 作用素  $S_1$  を

$$S_1 f(x) := w(x)^{1/p} M(f^{p'} w^{-1/p})(x)^{1/p'}$$

で定めると, すべての  $f \in L^q$  に対し

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} S_1 f(x)^q dx &= \int_{\mathbb{R}^n} w(x) M(f^{p'} w^{-1/p})(x)^p dx \\ &\leq B_1^p \int_{\mathbb{R}^n} w(x) \left| f(x)^{p'} w(x)^{-1/p} \right|^p dx \\ &= B_1^p \|f\|_{L^q}^q \end{aligned}$$

が成り立つ. 但し,  $B_1 := \|M\|_{L_w^p \rightarrow L_w^p}$  である. 特に,  $S_1$  が  $\|S_1\|_{L^q \rightarrow L^q} \leq B_1^{1/p'}$  を満たす  $L^q$  上の有界劣線型作用素であることがわかる. 一方  $\sigma := w^{1-p'}$  とおくと,  $\sigma \in A_{p'}$  である. 同様に,  $B_2 := \|M\|_{L_\sigma^{p'} \rightarrow L_\sigma^{p'}}$  とおき,

$$S_2 f(x) := \sigma(x)^{1/q} M(f^p \sigma^{-1/p'})(x)^{1/p}$$

と定めると,  $S_2$  は  $\|S_2\|_{L^q \rightarrow L^q} \leq B_2^{1/p}$  を満たす  $L^q$  上の有界劣線型作用素である. さらに作用素  $S$  を  $S := S_1 + S_2$  で定めると,  $S$  は  $B_0 := \|S\|_{L^q \rightarrow L^q} \leq B_1^{1/p'} + B_2^{1/p}$  を満たす  $L^q$  上の有界劣線型作用素である. これを用いて, 作用素  $R$  を

$$Rh(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^k h(x)}{(2B_0)^k}$$

で定めると,  $R$  は  $\|R\|_{L^q \rightarrow L^q} \leq 2$  を満たす  $L^q$  上の有界作用素である. いま, ほとんどいたるところで0にならない  $h \in L^q$  を1つ固定すると,  $Rh$  がほとんどいたるところで有限値をとることに注意する. このとき,

$$w_1 := (Rh)^p \sigma^{-1/p'}, \quad w_2 := (Rh)^{p'} w^{-1/p}$$

と定めると、 $w = w_1 w_2^{1-p}$  を満たすことがわかる。最後に、 $w_1, w_2 \in A_1$  であることを示す。 $\mathbb{R}^n$  上ほとんどいたるところで

$$w^{1/q} (Mw_2)^{1/p'} = w^{1/q} \left( (Rh)^{p'} w^{-1/p} \right)^{1/p'} = S_1(Rh) \leq S(Rh) \leq 2B_0 Rh$$

が成り立つ。各辺に  $w^{-1/q}$  をかけて最左辺と最右辺を比較すると  $(Mw_2)^{1/p'} \leq 2B_0 (Rh) w^{-1/q}$  がわかる。さらに両辺を  $p'$  乗すれば  $Mw_2 \leq (2B_0)^{p'} w_2$  となり、 $w_2 \in A_1$  が得られる。 $w_1 \in A_1$  についても同様に導かれる。□

**補題 9.3 の証明.**  $1 < p_0 < \infty$  の場合について議論を進めていく。 $p_0 = 1$  の場合についても、下記の議論を微修正することで結論が導かれる。

定数  $1 < p < \infty$  と  $w \in A_p$  を固定する。 $\sigma := w^{1-p'}$ ,  $X_1 := L_w^p$ ,  $X_2 := L_\sigma^{p'}$  と書くことにする。各  $j = 1, 2$  について、 $B_j := \|M\|_{X_j \rightarrow X_j}$  と定め、 $0 < \|h_j\|_{X_j} < \infty$  を満たす  $h_j$  について、関数  $R_j h_j$  を

$$R_j h_j := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k h_j}{(2B_j)^k}$$

で定義すると、以下が成り立つ：

- (A)  $|h_j| \leq R_j h_j$ .
- (B)  $\|R_j h_j\|_{X_j} \leq 2 \|h_j\|_{X_j}$ .
- (C)  $R_j h_j$  は  $[R_j h_j]_{A_1} \leq 2B_j$  を満たす  $A_1$  ウェイトである。

いま、 $0 < \|f\|_{L_w^p} < \infty$  かつ  $0 < \|g\|_{L_w^{p'}} < \infty$  を満たす  $(f, g) \in \mathcal{F}$  を任意に 1 組とる。以下、

$$h_1 := \frac{f}{\|f\|_{L_w^p}} + \frac{g}{\|g\|_{L_w^{p'}}$$

について考える。この  $h_1$  は  $\|h_1\|_{L_w^p} \leq 2$  を満たしている。双対性により、ノルムを

$$\|f\|_{L_w^p} = \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) h_2(x) dx \right| : h_2 \in L_\sigma^{p'}, \|h_2\|_{L_\sigma^{p'}} \leq 1 \right\}$$

と書き換えることができる。ここで、 $0 < \|h_2\|_{L_\sigma^{p'}} \leq 1$  を満たす  $h_2 \in L_\sigma^{p'}$  を任意にとる。このとき

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) h_2(x) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} f(x) R_1 h_1(x)^{-1/p_0'} R_1 h_1(x)^{1/p_0'} R_2 h_2(x) dx \\ &\leq I_1^{1/p_0} I_2^{1/p_0'} \text{ が成り立つ。} \end{aligned}$$

但し

$$I_1 := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{p_0} R_1 h_1(x)^{1-p_0} R_2 h_2(x) dx, \quad I_2 := \int_{\mathbb{R}^n} R_1 h_1(x) R_2 h_2(x) dx$$

である。 $I_2$  については

$$I_2 \leq \|R_1 h_1\|_{L_w^p} \|R_2 h_2\|_{L_\sigma^{p'}} \leq 2 \|h_1\|_{L_w^p} \cdot 2 \|h_2\|_{L_\sigma^{p'}} \leq 8$$

と評価できる. 次に,  $I_1$  の評価を行う. まずは,  $w_0(x) := R_1 h_1(x)^{1-p_0} R_2 h_2(x)$  とおくと, 補題 9.2 より  $w_0 \in A_{p_0}$  であることに注意しておきたい. また,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{p_0} w_0(x) dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (\|f\|_{L_w^p} h_1(x))^{p_0} w_0(x) dx \\
&\leq \|f\|_{L_w^p}^{p_0} \int_{\mathbb{R}^n} R_1 h_1(x)^{p_0} \cdot R_1 h_1(x)^{1-p_0} R_2 h_2(x) dx \\
&= \|f\|_{L_w^p}^{p_0} I_2 \\
&\leq 8 \|f\|_{L_w^p}^{p_0} \\
&< \infty,
\end{aligned} \tag{9.5}$$

すなわち,  $f \in L_{w_0}^{p_0}$  であることがわかる. よって, 補題の仮定より  $\|f\|_{L_{w_0}^{p_0}} \leq C \|g\|_{L_{w_0}^{p_0}}$  が成り立つ. さらに, (9.5) と同様の評価が関数  $g$  に対しても成り立つ. したがって,

$$I_1 = \|f\|_{L_{w_0}^{p_0}}^{p_0} \leq C \|g\|_{L_{w_0}^{p_0}}^{p_0} \leq C \cdot 8 \|g\|_{L_w^p}^{p_0}$$

が導かれる. 以上のことから, 補題の結論が得られる.  $\square$

## 謝辞

本研究は日本学術振興会の科学研究費補助金基盤研究 (C) 15K04928 の助成を受けたものです. 貴重な講演の機会をくださった松岡勝男先生に感謝申し上げます. 中井英一先生と小野高裕氏からは, 本研究に直接関わる BMO ノルムの特徴付けについての有益なご意見を頂きました. お二方から教えて頂いた内容を注意 7.4 に記載致しました.

## 参考文献

- [1] A. Almeida and D. Drihem, Maximal, potential and singular type operators on Herz spaces with variable exponents, *J. Math. Anal. Appl.* **394** (2012), 781–795.
- [2] C. Bennet and R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Pure and Applied Mathematics **129**, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.
- [3] S. Campanato, Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni. (Italian), *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3) **17** (1963), 175–188.
- [4] D. Cruz-Uribe, Extrapolation and factorization, arXiv:1706.02620.
- [5] D. Cruz-Uribe, L. Diening and A. Fiorenza, A new proof of the boundedness of maximal operators on variable Lebesgue spaces, *Bull. Unione Mat. Ital.* (9) **2** (2009), 151–173.
- [6] D. Cruz-Uribe, G. Di Fratta and A. Fiorenza, Modular inequalities for the maximal operator in variable Lebesgue spaces, *Nonlinear Anal.* **177** (2018), 299–311.

- [7] D. V. Cruz-Urbe and A. Fiorenza, Variable Lebesgue Spaces. Foundations and Harmonic Analysis, Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser/Springer, Heidelberg, 2013.
- [8] D. Cruz-Urbe, A. Fiorenza and C. J. Neugebauer, The maximal function on variable  $L^p$  spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn., Math.* **28** (2003), 223–238.
- [9] D. Cruz-Urbe, A. Fiorenza and C. J. Neugebauer, Corrections to “The maximal function on variable  $L^p$  spaces” [*Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **28** (2003), 223–238], *Ann. Acad. Sci. Fenn., Math.* **29** (2004), 247–249.
- [10] D. Cruz-Urbe, A. Fiorenza and C. J. Neugebauer, Weighted norm inequalities for the maximal operator on variable Lebesgue spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **394** (2012), 744–760.
- [11] D. Cruz-Urbe, E. Hernández and J. M. Martell, Greedy bases in variable Lebesgue spaces, *Monatsh. Math.* **179** (2016), 355–378.
- [12] D. Cruz-Urbe, J. M. Martell and C. Pérez, Weights, Extrapolation and the Theory of Rubio de Francia. *Operator Theory: Advances and Applications*, **215**. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.
- [13] L. Diening, Maximal function on generalized Lebesgue spaces  $L^{p(\cdot)}$ , *Math. Inequal. Appl.* **7** (2004), 245–253.
- [14] L. Diening, Maximal function on Musielak-Orlicz spaces and generalized Lebesgue spaces, *Bull. Sci. Math.* **129** (2005), 657–700.
- [15] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö and M. Růžička, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Springer, *Lecture Notes in Mathematics* **2017**, Springer, 2011.
- [16] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, Y. Mizuta and T. Shimomura, Maximal functions in variable exponent spaces: limiting cases of the exponent, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **34** (2009), 503–522.
- [17] L. Diening and P. Hästö, Muckenhoupt weights in variable exponent spaces, Preprint, 2011. available at [http://www.helsinki.fi/~hasto/pp/p75\\_submit.pdf](http://www.helsinki.fi/~hasto/pp/p75_submit.pdf)
- [18] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*. Graduate Studies in Math., **29**. Amer. Math. Soc., Providence, 2001.
- [19] J. García-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*. North-Holland Mathematics Studies, **116**. *Notas de Matemática [Mathematical Notes]*, 104. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985.
- [20] V. S. Guliev and F. Deringoz, On the Riesz potential and its commutators on generalized Orlicz-Morrey spaces, *J. Funct. Spaces* **2014**, Article ID 617414, 11 pages.

- [21] D.-I. Hakim and Y. Sawano, Interpolation of generalized Morrey spaces, *Rev. Mat. Complut.* **29** (2016), 295–340.
- [22] K.-P. Ho, Atomic decomposition of Hardy spaces and characterization of BMO via Banach function spaces, *Anal. Math.* **38** (2012), 173–185.
- [23] K.-P. Ho, John-Nirenberg inequalities on Lebesgue spaces with variable exponents, *Taiwanese J. Math.* **18** (2014), 1107–1118.
- [24] M. Izuki, Wavelets and modular inequalities in variable  $L^p$  spaces, *Georgian Math. J.* **15** (2008), 281–293.
- [25] M. Izuki, Herz and amalgam spaces with variable exponent, the Haar wavelets and greediness of the wavelet system, *East J. Approx.* **15** (2009), 87–109.
- [26] M. Izuki, Boundedness of sublinear operators on Herz spaces with variable exponent and application to wavelet characterization, *Anal. Math.* **36** (2010), 33–50.
- [27] M. Izuki, Boundedness of commutators on Herz spaces with variable exponent, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)* **59** (2010), 199–213.
- [28] M. Izuki, Fractional integrals on Herz–Morrey spaces with variable exponent, *Hiroshima Math. J.* **40** (2010), 343–355.
- [29] M. Izuki, Commutators of fractional integrals on Lebesgue and Herz spaces with variable exponent, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)* **59** (2010), 461–472.
- [30] M. Izuki, Vector-valued inequalities on Herz spaces and characterizations of Herz–Sobolev spaces with variable exponent, *Glasnik Mat.* **45** (2010), 475–503.
- [31] M. Izuki, Another proof of characterization of BMO via Banach function spaces, *Rev. Un. Mat. Argentina* **57** (2016), 103–109.
- [32] 出耒光夫, Hardy–Littlewood の極大作用素を用いない実解析, 日本数学会『数学』, 岩波書店出版, 掲載決定.
- [33] M. Izuki, E. Nakai and Y. Sawano, The Hardy-Littlewood maximal operator on Lebesgue spaces with variable exponent, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B42** (2013), 51–94.
- [34] M. Izuki, E. Nakai and Y. Sawano, Function spaces with variable exponents –an introduction–, *Sci. Math. Jpn.* **77** (2014), 187–315.
- [35] M. Izuki, E. Nakai and Y. Sawano, Wavelet characterization and modular inequalities for weighted Lebesgue spaces with variable exponent, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **40** (2015), 551–571.
- [36] M. Izuki and T. Noi, Boundedness of fractional integrals on weighted Herz spaces with variable exponent, *J. Inequal. Appl.* **2016**, 2016:199, 15 pp.

- [37] M. Izuki and T. Noi, The Hardy–Littlewood maximal operator on some critical weighted Herz spaces with variable exponent, *Jaen J. Approx.* **8** (2016), 97–112.
- [38] M. Izuki and T. Noi, An intrinsic square function on weighted Herz spaces with variable exponent, *J. Math. Inequal.* **11** (2017), 799–816.
- [39] M. Izuki and T. Noi, Two weighted Herz spaces with variable exponents, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, to appear.
- [40] M. Izuki and Y. Sawano, A criterion of sampling theorems on Banach function spaces, *Tokyo J. Math.* **36** (2013), 131–145.
- [41] M. Izuki and Y. Sawano, Variable Lebesgue norm estimates for BMO functions, *Czechoslovak Math. J.* **62(137)** (2012), 717–727.
- [42] M. Izuki and Y. Sawano, Characterization of BMO via ball Banach function spaces, *Vestn. St.-Peterbg. Univ. Mat. Mekh. Astron.* **4(62)** (2017), 78–86.
- [43] M. Izuki, Y. Sawano and Y. Tsutsui, Variable Lebesgue norm estimates for BMO functions. II, *Anal. Math.* **40** (2014), 215–230.
- [44] F. John and L. Nirenberg, On functions of bounded mean oscillation, *Comm. Pure Appl. Math.* **14** (1961), 415–426.
- [45] A. Yu Karlovich and I. M. Spitkovsky, The Cauchy singular integral operator on weighted variable Lebesgue spaces, *Concrete operators, spectral theory, operators in harmonic analysis and approximation*, 275–291, *Oper. Theory Adv. Appl.*, **236**, Birkhäuser/Springer, Basel, 2014.
- [46] V. Kokilashvili and M. Krbeč, *Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces*, World Scientific, Singapore, 1991.
- [47] T. S. Kopaliani, Infimal convolution and Muckenhoupt  $A_{p(\cdot)}$  condition in variable  $L^p$  spaces, *Arch. Math. (Basel)* **89** (2007), 185–192.
- [48] T. Kopaliani, On the Muckenhoupt condition in variable Lebesgue spaces, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* **148** (2008), 29–33.
- [49] O. Kováčik and J. Rákosník, On spaces  $L^{p(x)}$  and  $W^{k,p(x)}$ , *Czechoslovak Math. J.* **41** (1991), 592–618.
- [50] A. K. Lerner, On modular inequalities in variable  $L^p$  spaces, *Arch. Math. (Basel)* **85** (2005), 538–543.
- [51] A. K. Lerner, On some questions related to the maximal operator on variable  $L^p$  spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **362** (2010), 4229–4242.
- [52] A. K. Lerner, On a dual property of the maximal operator on weighted variable  $L^p$  spaces, *Contemp. Math.* **693** (2017), 283–300.

- [53] N. G. Meyers, Mean oscillation over cubes and Hölder continuity, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 717–721.
- [54] B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, Trans. Am. Math. Soc. **165** (1972), 207–226.
- [55] E. Nakai, A generalization of Hardy spaces  $H^p$  by using atoms, Acta Math. Sin. **24** (2008), 1243–1268.
- [56] J. Peetre, On the theory of  $L_{p,\lambda}$  spaces, J. Funct. Anal. **4** (1969), 71–87.
- [57] J. L. Rubio de Francia, Factorization and extrapolation of weights, Bull. Am. Math. Soc. (N.S.) **7** (1982), 393–395.
- [58] J. L. Rubio de Francia, A new technique in the theory of  $A_p$  theory. In: Topics in Modern Harmonic Analysis, vol. I, II (Turin/Milan, 1982), pp. 571–579, Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi, Rome, 1983.
- [59] J. L. Rubio de Francia, Factorization theory and  $A_p$  weights, Amer. J. Math. **106** (1984), 533–547.
- [60] Y. Sawano and H. Tanaka, The Fatou property of block spaces, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **22** (2015), 663–683.
- [61] E. M. Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton Mathematical Series, No. 30 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1970.