Fourier 乗子作用素と擬微分作用素について

宮地晶彦 (東京女子大学現代教養学部数理科学科)

Fourier 乗子作用素と擬微分作用素に関する古典的な結果を概観してから，双線形擬微分作用素等に関する冨田直人氏加藤睦也氏と講演者との最近の共同研究の一部を紹介する．

1 Calderón-Zygmund 作用素

$a = a(\xi)$ が $\mathbb{R}^n$ 上の与えられた関数のとき，$\mathbb{R}^n$ 上の関数 f に対して

$$T_a f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} a(\xi)\widehat{f}(\xi)\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

で定義される作用素 T_a を，$a(\xi)$ を**乗子**（multiplier）とする **Fourier 乗子作用素**と言う．ただし $\widehat{f}$ は f の Fourier 変換である．乗子 a の Fourier 逆変換を

$$K(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} a(\xi)\, d\xi$$

とすれば，$T_a f$ は

$$T_a f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f(y)\, dy$$

と合成積の形に書くことができる．一般には K は可積分関数とは限らないから，上の合成積は超関数の意味でとらなくてはならない．

Fourier 乗子作用素の一般化として，$a = a(x,\xi)$ が $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上の与えられた関数のとき，

$$T_a f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x,\xi)\widehat{f}(\xi)\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

で定義される作用素 T_a を $a(x,\xi)$ を**シンボル**とする**擬微分作用素**と言う．シンボル $a(x,\xi)$ の ξ に関する Fourier 逆変換を

$$K(x,z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i z\cdot\xi} a(x,\xi)\, d\xi$$

とすれば，$T_a f$ は形式的には

$$T_a f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, x-y) f(y)\, dy$$

と積分の形に書くことができる．

調和解析でしばしば現れる線形作用素 T は次の定義で言う積分核を持つものである．

定義 1.1. T は $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ の有界作用素とする．$K(x, y)$ が $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \setminus \{(0, 0)\}$ 上の滑らかな関数で，コンパクトな台を持つすべての $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対し，ほとんどすべての $x \notin \operatorname{support} f$ において

$$Tf(x) = \int K(x, y) f(y)\, dy$$

が成り立つとき，$K(x, y)$ は T の**積分核**であると言う．

適当な積分核を持つ作用素の L^p 有界性に関して次の定理がよく知られている．

定理 1.2. T が $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ の線形作用素で $\|Tf\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq A\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ が成り立ち，T の積分核 $K(x, y)$ で

$$\begin{aligned}
&|K(x, y)| \leq A|x - y|^n, \\
&\int_{|x-y|>2|y-y_0|} |K(x, y) - K(x, y_0)|\, dx \leq A, &(1)\\
&\int_{|x-y|>2|x-x_0|} |K(x, y) - K(x_0, y)|\, dy \leq A &(2)
\end{aligned}$$

をみたすものが存在するならば，$1 < p < \infty$ なるすべての p に対して

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c_p A\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n),$$

が成り立つ．

この定理の証明については例えば Stein [24] を参照されたい．積分核の条件 (1), (2) は，Hörmander [12] が導入したので，**Hörmander 条件**と呼ばれている．

上の定理を用いて次の定理が導かれる．

定理 1.3. 乗子 a が

$$|\partial_\xi^\alpha a(\xi)| \leq c_\alpha |\xi|^{-|\alpha|} \tag{3}$$

という条件をみたすならば，Fourier 乗子作用素 T_a はすべての $1 < p < \infty$ について $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ で有界になる．

この定理は Mikhlin [17]，Hörmander [12] によって示されたので，条件 (3) は Hörmander-Mikhlin の条件を呼ばれる．同様な定理は擬微分作用素に対しても成り立つ．

定理 1.2, 1.3 の創始となったのは，$\mathbb{R}^n$ 上で或る種の特異積分作用素の L^p 有界性を示した Calderón と Zygmund の論文 [4] である．論文 [4] では，現在 Calderón-Zygmund 分解と呼ばれている補題を示し，作用素の弱型評価と実補間法を利用して，L^p 評価を証明した．この方法で扱える特異積分作用素は **Calderón-Zygmund 作用素**と呼ばれている．

Calderón-Zygmund 作用素に対しては $L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ 有界性は一般に成り立たないが，$L^1(\mathbb{R}^n)$ を Fefferman-Stein [9] の Hardy 空間 $H^1(\mathbb{R}^n)$ で置き換えれば，$H^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ 有界性は成り立つ．さらに，$0 < p < 1$ の場合にも Hardy 空間 H^p を用いれば，滑らかな積分核を持つ作用素に対しては，$H^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界性が成り立つ．また，Calderón-Zygmund 作用素では $L^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 有界性も一般に成り立たないが，$L^\infty(\mathbb{R}^n)$ の代わりに John-Nirenberg [13] の BMO 空間を用いれば，$L^\infty(\mathbb{R}^n) \to BMO(\mathbb{R}^n)$ 有界性が成り立つ．

2　特異な Fourier 乗子作用素と擬微分作用素

Hörmander-Mikhlin の条件 (3) の代わりに $0 \leq \rho < 1$ として

$$|\partial_\xi^\alpha a(\xi)| \leq c_\alpha |\xi|^{m-\rho|\alpha|} \tag{4}$$

という条件をみたす乗子を扱う場合がある．擬微分作用素では，

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leq c_{\alpha,\beta} |\xi|^{m+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}, \quad m \in \mathbb{R}, \ \ 0 \leq \delta \leq \rho \leq 1, \tag{5}$$

をみたすシンボル a のクラス $S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n)$ が Hörmander により導入されている．乗子またはシンボルがこれらの条件をみたす Fourier 乗子作用素や擬微分作用素に対しては，L^p や H^p での有界性は，m, ρ, δ, n で決まるある範囲の p に対してしか成り立たない．シャープな p の範囲での有界性は次の定理で与えられる．

定理 2.1. $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$ かつ $\delta < 1$ で $a \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n)$ ならば，擬微分作用素 T_a は $|1/p - 1/2| \leq -m/\{n(1-\rho)\}$ をみたす $p \in (1,\infty)$ に対して $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ で有界である．

　この定理の $0 \leq \rho < 1$ の場合の証明には，Calderón-Zygmund の理論に納まらない方法が必要である．論文 Calderón-Vaillancourt [3], Fefferman [8], Coifman-Meyer [5], Sjölin [23], Miyachi [18] を参照されたい．

3　$e^{i|\xi|}a(\xi)$ の形の Fourier 乗子など

波動方程式の初期値問題

$$\begin{aligned} &\partial_t^2 u = \Delta_x u, \\ &u(0,x) = f(x), \quad \partial_t u(0,x) = g(x) \end{aligned}$$

の解は

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} \left(\widehat{f}(\xi) \cos 2\pi t|\xi| + \widehat{g}(\xi) \frac{\sin 2\pi t|\xi|}{2\pi|\xi|} \right) d\xi$$

で与えられる．ここに出てくる Fourier 乗子

$$\cos 2\pi t|\xi|, \quad \frac{\sin 2\pi t|\xi|}{2\pi|\xi|} \tag{6}$$

は前節の条件 (4) を $\rho = 0$ としてみたすが，前節の定理 2.1 の $\rho = 0$ の場合を使ったのでは，$f \mapsto u(t,\cdot)$ のシャープな評価は得られない．乗子 (6) の Fourier 逆変換 $K(x)$ は $|x| = 1$ に沿って特異性を持ち，乗子の Fourier 逆変換が $x = 0$ にのみ特異性をもつ Calderón-Zygmund 作用素とは事情が異なるのである．これらの Fourier 乗子をカバーする次の定理が知られている．

定理 3.1. ϕ が $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上の滑らかな実数値の 1 次斉次関数で，a が

$$|\partial_\xi^\alpha a(\xi)| \leq C_\alpha (1+|\xi|)^{m-|\alpha|}$$

をみたす $\mathbb{R}^n$ 上の滑らかな関数ならば，$e^{i\phi(\xi)}a(\xi)$ を乗子とする Fourier 乗子作用素は，$|1/p - 1/2| \leq -m/(n-1)$ をみたす $p \in (1,\infty)$ に対して $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ で有界である．

この定理の $\phi(\xi) = |\xi|$ の場合は Miyachi [19] で示されているが，$\phi(\xi)$ が任意の 1 次斉次関数の場合は，Seeger-Sogge-Stein [22] が **Fourier 積分作用素**と呼ばれる

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\Phi(x,\xi)} a(x,\xi) \widehat{f}(\xi)\, d\xi$$

の形の作用素（関数 $\Phi(x,\xi)$ は ξ について 1 次斉次の実数値関数で，$a(x,\xi)$ は (5) の条件を $\rho = 1, \delta = 0$ でみたす）に対して示した．[22] の方法は，作用素の積分核に対して Hörmander 条件を変形した形の条件を示すことであった．

4　双線形の Fourier 乗子作用素と擬微分作用素

以下，$0 < p \le 1$ のとき $H^p(\mathbb{R}^n)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の Hardy 空間を表し，$1 < p \le \infty$ のときは $H^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ と約束しておく．

双線形擬微分作用素とは，$\mathbb{R}^n$ 上の関数 f, g に対して

$$T_\sigma(f,g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot(\xi+\eta)} \sigma(x,\xi,\eta)\, \widehat{f}(\xi)\, \widehat{g}(\eta)\, d\xi d\eta, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

で定義される作用素である．ここで $\sigma(x,\xi,\eta)$ は $x,\xi,\eta \in \mathbb{R}^n$ の与えられた関数で，やはりシンボルと呼ばれる．シンボル $\sigma(x,\xi,\eta)$ の (ξ,η) に関する Fourier 逆変換を

$$K(x,z,w) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(z\cdot\xi + w\cdot\eta)} \sigma(x,\xi,\eta)\, d\xi d\eta$$

とすれば，形式的には

$$T_\sigma(f,g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, x-y, x-z) f(y) g(z)\, dydz$$

と書ける．シンボル $\sigma(x,\xi,\eta)$ が x によらず ξ,η だけの関数の場合には**双線形 Fourier 乗子作用素**と呼ばれる．

双線形の Fourier 乗子作用素や擬微分作用素の研究は Coifman-Meyer [5] に始まる．次の結果は，[5], [6], [7], [16], [10], [11] で確立された．

定理 4.1. シンボルが

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_\eta^\gamma \sigma(x,\xi,\eta)| \le c_{\alpha,\beta,\gamma}(1 + |\xi| + |\eta|)^{-|\beta|-|\gamma|}$$

をみたすならば，σ をシンボルとする双線形擬微分作用素 T_σ は，$1/p + 1/q = 1/r$ をみたす $p,q,r \in (0,\infty]$ に対して $H^p(\mathbb{R}^n) \times H^q(\mathbb{R}^n) \to L^r(\mathbb{R}^n)$ で有界となる．ただし，$p = q = r = \infty$ のときには $H^p(\mathbb{R}^n) \times H^q(\mathbb{R}^n) \to L^r(\mathbb{R}^n)$ を $L^\infty(\mathbb{R}^n) \times L^\infty(\mathbb{R}^n) \to BMO(\mathbb{R}^n)$ で置き換える．

5　特異な双線形擬微分作用素

次の定義の双線形擬微分作用素のシンボルのクラスは，Bényi-Maldonado-Naibo-Torres [2], Bényi-Bernicot-Maldonado-Naibo-Torres [1] によって導入されたものである．

定義 5.1. $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$ とする．$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上の滑らかな関数 σ で

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_\eta^\gamma \sigma(x, \xi, \eta)| \leq c_{\alpha,\beta,\gamma}(1 + |\xi| + |\eta|)^{m+\delta|\alpha|-\rho|\beta|-\rho|\gamma|}$$

をみたすもの全体を $BS^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ と定義する．

$0 \leq \rho = \delta < 1$ の場合にクラス $BS^m_{\rho,\rho}(\mathbb{R}^n)$ に属すシンボルを持つ双線形擬微分作用素の有界性については，線形の擬微分作用素の場合から形の上で単純に類推されるものとは異なる状況が生じる．次の定理が成り立つ．

定理 5.2 (Miyachi-Tomita [20], [21])**.** $0 \leq \rho < 1$, $p, q \in (0, \infty]$ とする．r を $1/r = 1/p + 1/q$ で定め，$m_\rho(p, q)$ を

$$m_\rho(p, q) = -n(1 - \rho) \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{p}, \frac{1}{q}, 1 - \frac{1}{r}, \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \right\}.$$

で定める．このとき，$m = m_\rho(p, q)$ ならば，すべての $\sigma \in BS^m_{\rho,\rho}(\mathbb{R}^n)$ に対して，σ をシンボルとする双線形擬微分作用素 T_σ は $H^p(\mathbb{R}^n) \times H^q(\mathbb{R}^n) \to L^r(\mathbb{R}^n)$ で有界である．ただし，$p = q = r = \infty$ のときには $H^p(\mathbb{R}^n) \times H^q(\mathbb{R}^n) \to L^r(\mathbb{R}^n)$ を $L^\infty(\mathbb{R}^n) \times L^\infty(\mathbb{R}^n) \to BMO(\mathbb{R}^n)$ で置き換える．

この定理の $m = m_\rho(p, q)$ はシャープな指数であって，$m > m_\rho(p, q)$ の場合には定理の有界性は成り立たない．$0 \leq \rho < 1$ のときにはすべての $p, q \in (0, \infty]$ に対して $m_\rho(p, q) \leq -n(1 - \rho)/2 < 0$ であることに注意されたい．

上記定理で $\rho = 0$ で $H^p(\mathbb{R}^n)$ または $H^q(\mathbb{R}^n)$ が $L^2(\mathbb{R}^n)$ の場合の結果を精密化した結果が，最近 Kato-Miyachi-Tomita [14], [15] で得られている．

References

[1] Á. Bényi, F. Bernicot, D. Maldonado, V. Naibo and R. Torres, On the Hörmander classes of bilinear pseudodifferential operators II, Indiana Univ. Math. J. **62** (2013), 1733–1764.

[2] Á. Bényi, D. Maldonado, V. Naibo and R. Torres, On the Hörmander classes of bilinear pseudodifferential operators, Integral Equations Operator Theory **67** (2010), 341–364.

[3] A. P. Calderón and R. Vaillancourt, A class of bounded pseudo-differential operators, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **69** (1972), 1185–1187.

[4] A. P. Calderón and A. Zygmund, On the existence of certain singular integrals, Acta Math. **88** (1952), 85–139.

[5] R. R. Coifman and Y. Meyer, Au delà des opérateurs pseudo-différentiels, Astérisque Vol. 57, Société Math. de France, 1978.

[6] R. R. Coifman, and Y. Meyer, Nonlinear harmonic analysis, operator theory and P.D.E., Beijing Lectures in Harmonic Analysis (Beijing, 1984), pp. 3–45, Princeton University Press, Princeton, 1986.

[7] R. R. Coifman, and Y. Meyer, Wavelets: Calderón-Zygmund and Multilinear Operators, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[8] C. Fefferman, L^p bounds for pseudo-differential operators, Israel J. Math. **15** (1973), 44–52.

[9] C. Fefferman and E. M. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math. **129** (1972), 137–193.

[10] L. Grafakos and N. Kalton, Multilinear Calderón-Zygmund operators on Hardy spaces, Collect. Math. **52** (2001), 169–179.

[11] L. Grafakos and R. Torres, Multilinear Calderón-Zygmund theory, Adv. Math. **165** (2002), 124–164.

[12] L. Hörmander, Estimates for translation invariant operators in L^p spaces, Acta Math. **104** (1960), 93–140.

[13] F. John and L. Nirenberg, On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 415–426.

[14] T. Kato, A. Miyachi, and N. Tomita, Bilinear pseudo-differential operators of $S_{0,0}$-type, submitting, http://arxiv.org/abs/1901.07237

[15] T. Kato, A. Miyachi, and N. Tomita, Boundedness of Multilinear pseudo-differential operators of $S_{0,0}$-type in L^2-based amalgam spaces, submitting, http://arxiv.org/abs/1908.11641

[16] C. Kenig and E. M. Stein, Multilinear estimates and fractional integration, Math. Res. Lett. **6** (1999), 1–15.

[17] S. G. Mikhlin, On the multipliers of Fourier integrals (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) **109** (1956), 701–703.

[18] A. Miyachi, On some Fourier multipliers for $H^p(\mathbb{R}^n)$, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, **27** (1980), 157–179.

[19] A. Miyachi, On some estimates for the wave equation in L^p and H^p, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, **27** (1980), 331–354.

[20] A. Miyachi and N. Tomita, Bilinear pseudo-differential operators with exotic symbols, to appear in Ann. Inst. Fourier (Grenoble), arXiv:1801.06744

[21] A. Miyachi and N. Tomita, Bilinear pseudo-differential operators with exotic symbols, II, to appear in Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications, http://link.springer.com/article/10.1007/s11868-018-0251-2, arXiv:1801.06745.

[22] A. Seeger, C. D. Sogge, and E. M. Stein, Regularity properties of Fouirer integral operators, Ann of Math. **134** (1991), 231–251.

[23] P. Sjölin, An H^p inequality for strongly singular integrals, Math. Z. **165** (1979), 231–238.

[24] E. M. Stein, *Harmonic Analysis, Real Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, Princeton, 1993.