

3次元球面内の平坦トーラスの剛性と直径

宇都宮大学・教育学部 北川 義久

Yoshihisa Kitagawa

Department of Mathematics, Utsunomiya University

3次元単位球面 S^3 内の2次元トーラスは、 S^3 から誘導されるリーマン計量の曲率が0であるとき、 S^3 内の平坦トーラスとよばれる。 S^3 内の平坦トーラスの典型的な例として Clifford トーラスが知られているが、Clifford トーラスが剛性を持つかどうかという基本的な問題は今のところ未解決である。ところで、この問題は S^3 内の平坦トーラスの外的直径が円周率 π に等しいであろうという予想（直径予想）と密接な関係にあり、直径予想が正しければ Clifford トーラスの剛性問題は肯定的に解決することが知られている。一方、 S^3 内の任意の平坦トーラスは2次元単位球面 S^2 上の閉曲線対から構成できることが知られており（表現定理）、この定理を用いることにより、直径予想は S^2 上の閉曲線対に関するある種の予想（2重接触予想）と同値であることが証明されている。ここでは、Clifford トーラスの剛性問題を解決するための有望な方法である上記のアイデアについて解説し、2重接触予想に関する最新の研究結果（榎本一之氏、梅原雅顕氏との共同研究）を紹介したい。

1. S^3 内の平坦トーラスの例

3次元単位球面 S^3 内の（はめ込まれた）2次元トーラス M を考える。 S^3 の標準的なリーマン計量から M に誘導されるリーマン計量の曲率が0であるとき、 M を S^3 内の平坦トーラスとよぶ。

例 1.1. $0 < \theta < \pi/2$ をみたす定数 θ に対して、 $M_\theta \subset S^3$ を

$$M_\theta = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = \cos \theta, x_3^2 + x_4^2 = \sin \theta\}$$

と定めると、 M_θ は S^3 内の平坦トーラスである。これを S^3 内の **Clifford トーラス** という。

例 1.2. $p : S^3 \rightarrow S^2$ を Hopf 写像とする。 S^2 上の正則閉曲線 γ に対して、逆像 $p^{-1}(\gamma)$ は S^3 内の平坦トーラスである。これを γ に対応する **Hopf トーラス** という ([9])。

注 1.1. もし γ が S^2 上の円であれば, Hopf トーラス $p^{-1}(\gamma)$ は Clifford トーラス M_θ と合同である. ただし, γ の長さを L とすると, θ は $2\pi \sin 2\theta = L$ をみたす.

注 1.2. S^2 上のある種の閉曲線対から S^3 内の平坦トーラスを構成する方法が知られており, この構成法により, S^3 内に Hopf トーラスと合同でない平坦トーラスを作ることができる (注 3.2(3) 参照).

2. CLIFFORD トーラスの剛性に関する問題

S^3 内の平坦トーラスの剛性について考えよう. 剛性を持つ平坦トーラスは等長の変形不可能である. ところで, 等長の変形不可能な S^3 内の平坦トーラスは Clifford トーラスの被覆に限ることが知られており ([5]), さらに, 等長の変形が不可能となる被覆の特徴付けも与えられている ([6]). 特に, Clifford トーラスは等長の変形不可能であり, S^3 内の平坦トーラスの剛性については, 次の問題が基本的である.

問題 (Clifford トーラスの剛性). $M_\theta \subset S^3$ を Clifford トーラス, $i_\theta : M_\theta \rightarrow S^3$ を包含写像とする. このとき, 任意の等長はめ込み $f : M_\theta \rightarrow S^3$ に対して, $f = T \circ i_\theta$ であるような S^3 の等長変換 $T : S^3 \rightarrow S^3$ が存在するか?

この問題は今のところ未解決であるが, f が「埋め込み」である場合は, 肯定的に解決されている. すなわち, 次の定理が成り立つ.

定理 2.1 ([2]). $f : M_\theta \rightarrow S^3$ が等長埋め込みならば, $f = T \circ i_\theta$ をみたす S^3 の等長変換 T が存在する.

証明の概略. 表現定理 (定理 3.1) により, S^3 内の平坦トーラスはすべて S^2 上の閉曲線対 (γ_1, γ_2) から構成できる. 一方, 結び目理論を用いることにより, (γ_1, γ_2) から構成された平坦トーラスが自己交叉を持たないならば, γ_1 と γ_2 の自己交点数はともに偶数であることが証明できる (注 3.2(2) 参照). その結果, S^3 内に埋め込まれた平坦トーラスは S^3 の対心変換 $\sigma : S^3 \rightarrow S^3$ により不変であることが分かる (注 3.2(1) 参照). ただし, $\sigma(x) = -x$ である. したがって, 特に, $f(M_\theta)$ の直径は円周率 π に等しい. よって, 定理 2.1 の主張は次の補題から得られる. \square

補題 2.1 ([2]). 等長はめ込み $f : M_\theta \rightarrow S^3$ の像 $f(M_\theta)$ の直径が円周率 π に等しければ, S^3 の等長変換 T が存在し $f = T \circ i_\theta$ が成り立つ.

この補題により, 上記の剛性問題を解決するには, 次の予想を解決すればよいことが分かる.

予想 (直径予想). M を平坦トーラス, $f : M \rightarrow S^3$ を等長はめ込みとすると, 像 $f(M)$ の直径は π に等しい.

3. S^3 内の平坦トーラスの構成法と表現定理

ここでは、直径予想を解決するためのアイデアを述べる準備として、 S^3 内の平坦トーラスの構成法と表現定理について説明しよう。

\mathbb{H} を 4 元数全体の集合とし、 \mathbb{R}^4 と \mathbb{H} を同一視する。

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longleftrightarrow x_1 + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k}.$$

このとき、3次元単位球面 $S^3 = \{x \in \mathbb{H} : |x| = 1\}$ は 4 元数の積によって群になる。また、2次元単位球面 $S^2 = \{x \in \text{Im } \mathbb{H} : |x| = 1\}$ に対して、写像 $p : S^3 \rightarrow S^2$ を

$$p(g) = g\mathbf{i}g^{-1} = \text{Ad}(g)\mathbf{i}$$

と定めると、 $p : S^3 \rightarrow S^2$ は Hopf 写像である。以下、 S^2 の単位接束 US^2 を $S^2 \times S^2$ の部分集合とみなす。すなわち、 $US^2 = \{(x, v) \in S^2 \times S^2 : x \perp v\}$ とし、自然な射影 $p_1 : US^2 \rightarrow S^2$ を $p_1(x, v) = x$ と定める。さらに、 $p_2 : S^3 \rightarrow US^2$ を

$$(3.1) \quad p_2(g) = (\text{Ad}(g)\mathbf{i}, \text{Ad}(g)\mathbf{j})$$

により定めると、 $p = p_1 \circ p_2$ が成り立つ。また、写像 p_2 は 2 重被覆であり

$$(3.2) \quad p_2(-g) = p_2(g)$$

をみたとす。ここで、周期的正則曲線 $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S^2$ を考えよう。曲線 $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow US^2$ を

$$\hat{\gamma}(s) = (\gamma(s), \gamma'(s)/|\gamma'(s)|)$$

と定め、 $c : \mathbb{R} \rightarrow S^3$ を 2 重被覆 $p_2 : S^3 \rightarrow US^2$ による $\hat{\gamma}$ のリフトとする。 $l > 0$ を γ の基本周期とし、 US^2 内の閉曲線 $\hat{\gamma} : [0, l] \rightarrow US^2$ が属するホモロジー類を $I(\gamma) \in H_1(US^2)$ とする。 $H_1(US^2) \cong \mathbb{Z}_2$ だから、 $I(\gamma)$ は 0 または 1 であり、(3.2) から

$$(3.3) \quad c(s+l) = \begin{cases} c(s) & \cdots I(\gamma) = 0, \\ -c(s) & \cdots I(\gamma) = 1 \end{cases}$$

であることが分かる。 $I(\gamma)$ を γ の \mathbb{Z}_2 -rotation index とよぶ。

注 3.1. 正則閉曲線 $\gamma[0, l]$ がジェネリック (すべての自己交点が横断的な二重点) である場合、 $I(\gamma) = 0$ (resp. $I(\gamma) = 1$) であるための必要十分条件は、 $\gamma[0, l]$ の自己交点数が奇数 (resp. 偶数) となることである。

定義 3.1. $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ が **periodic admissible pair** (p.a.p.) であるとは、各 $\gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow S^2$ は周期的正則曲線であり、次の条件 (a) と (b) が成り立つことである。

(a) 任意の $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ について $\kappa_1(s_1) > \kappa_2(s_2)$,

(b) $(1 + \kappa_i(s)^2)|\gamma'_i(s)|^2 = 4$,

ただし $\kappa_i(s)$ は $\gamma_i(s)$ の測地的曲率である。

以下, $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ を p.a.p. とし, Γ から S^3 内の平坦トーラスを構成する方法を説明しよう. 曲線 $c_i: \mathbb{R} \rightarrow S^3$ を p_2 による $\hat{\gamma}_i: \mathbb{R} \rightarrow US^2$ のリフトとし, S^3 の群構造を用いて, 写像 $F_\Gamma: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^3$ を

$$(3.4) \quad F_\Gamma(s_1, s_2) = c_1(0)^{-1}c_1(s_1)c_2(s_2)^{-1}c_2(0)$$

と定める. F_Γ は, はめ込み写像であり, F_Γ により \mathbb{R}^2 に誘導されるリーマン計量 g_Γ の曲率は 0 である (注 3.2(4) 参照). また, F_Γ はリフト c_i の選び方によらない. 次に \mathbb{R}^2 の微分同相写像全体を $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ とし, 群 $G(\Gamma)$ を

$$G(\Gamma) = \{\varphi \in \text{Diff}(\mathbb{R}^2) : F_\Gamma \circ \varphi = F_\Gamma\}$$

と定める. 群 $G(\Gamma)$ の元は \mathbb{R}^2 の平行移動であることが証明でき, $G(\Gamma)$ は自然に \mathbb{R}^2 の部分群となる. さらに $G(\Gamma)$ は \mathbb{R}^2 の lattice であることも分かり, 平坦トーラス

$$M_\Gamma = (\mathbb{R}^2, g_\Gamma)/G(\Gamma)$$

が得られる. ここで, $\pi_\Gamma: \mathbb{R}^2 \rightarrow M_\Gamma$ を自然な射影とすれば, $f_\Gamma \circ \pi_\Gamma = F_\Gamma$ をみたく等長はめ込み $f_\Gamma: M_\Gamma \rightarrow S^3$ が得られる. 実は, S^3 内の平坦トーラスは, すべてこのようにして構成できる. すなわち, 次の表現定理が成り立つ.

定理 3.1 ([3]). M を平坦トーラス, $f: M \rightarrow S^3$ を等長はめ込みとする. このとき, p.a.p. Γ , 被覆写像 $\rho: M \rightarrow M_\Gamma$ および S^3 の等長変換 A が存在し $A \circ f = f_\Gamma \circ \rho$ が成り立つ.

注 3.2. $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ を p.a.p. とする.

- (1) もし $I(\gamma_1) = 1$ または $I(\gamma_2) = 1$ ならば, (3.3) と (3.4) により, f_Γ の像は S^3 の対心変換 $\sigma: S^3 \rightarrow S^3$ で不変である.
- (2) もし $f_\Gamma: M_\Gamma \rightarrow S^3$ が埋め込みならば, M_Γ 上の円板の境界を S^3 内の結び目とみなし, その Arf 不変量を調べることにより, $I(\gamma_1) = I(\gamma_2) = 1$ であることが証明できる ([4]).
- (3) f_Γ の像が Hopf トーラスと合同であるための必要十分条件は, γ_1 または γ_2 が円となることである. よって, S^3 内に Hopf トーラスと合同でない平坦トーラスを作ることができる.
- (4) $F_\Gamma: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^3$ の第一基本形式 I , 第二基本形式 II は

$$I = ds_1^2 + 2 \cos \omega ds_1 ds_2 + ds_2^2, \quad II = 2 \sin \omega ds_1 ds_2$$

をみたく. ただし, $\omega = \cot^{-1}(\kappa_1(s_1)) + \cot^{-1}(-\kappa_2(s_2))$ である. なお, 定義 3.1 の条件 (a) から, $0 < \omega < \pi$ であることが分かる.

注 3.3. 任意の p.a.p. $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ に対して, 正数 μ および p.a.p. $\bar{\Gamma} = (\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2)$ が存在し, $f_{\bar{\Gamma}}$ の像と f_Γ の像は合同であり, $\min_{s_1} \bar{\kappa}_1(s_1) > \mu > \max_{s_2} \bar{\kappa}_2(s_2)$ をみたく ([1]).

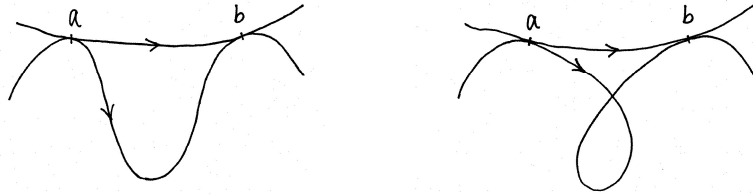
4. 2重接触予想

定義 4.1. $\gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow S^2$, ($i = 1, 2$) を正則曲線とする. 次の (イ) と (ロ) をみたす実数 a_i, b_i ($a_i < b_i$) が存在するとき, γ_1 と γ_2 は**第一種** (resp. **第二種**) の**2重接触**を持つという.

(イ) $\hat{\gamma}_1(a_1) = \hat{\gamma}_2(a_2)$, $\hat{\gamma}_1(b_1) = \hat{\gamma}_2(b_2)$ であり,

(ロ) US^2 内の二つの道 $\hat{\gamma}_1[[a_1, b_1]]$ と $\hat{\gamma}_2[[a_2, b_2]]$ は両端点を固定したホモトピーで同値である (resp. 同値でない).

例 4.1. 第一種の2重接触 (左図) と第二種の2重接触 (右図)



補題 4.1 ([7]). $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ を p.a.p. とすると, 次の (1) と (2) は同値である.

- (1) S^2 の等長変換 $\alpha \in SO(3)$ が存在し, $\alpha\gamma_1$ と γ_2 は第二種の2重接触を持つ,
- (2) $f_\Gamma : M_\Gamma \rightarrow S^3$ の像の直径は π である.

証明. まず, (1) \Rightarrow (2) を示そう. (1) より, 実数 a_i, b_i ($a_i < b_i$) が存在し

(イ) $\widehat{\alpha\gamma_1}(a_1) = \hat{\gamma}_2(a_2)$, $\widehat{\alpha\gamma_1}(b_1) = \hat{\gamma}_2(b_2)$ であり,

(ロ) US^2 内の二つの道 $\widehat{\alpha\gamma_1}[[a_1, b_1]]$ と $\hat{\gamma}_2[[a_2, b_2]]$ はホモトピー同値でない.

ところで, $\alpha \in SO(3)$ だから, $\text{Ad}(g) = \alpha$ をみたす $g \in S^3$ が存在する. ここで, $c_i : \mathbb{R} \rightarrow S^3$ を2重被覆 $p_2 : S^3 \rightarrow US^2$ による $\hat{\gamma}_i$ のリフトとすると, gc_1 は p_2 による $\widehat{\alpha\gamma_1}$ のリフトである. このとき, $\widehat{\alpha\gamma_1}(a_1) = \hat{\gamma}_2(a_2)$ より $gc_1(a_1) = \pm c_2(a_2)$ であるが, 必要なら c_1 を $-c_1$ に変更することにより, $gc_1(a_1) = c_2(a_2)$ としてよいことが分かる. また, $\widehat{\alpha\gamma_1}(b_1) = \hat{\gamma}_2(b_2)$ より $gc_1(b_1) = \pm c_2(b_2)$ であるが, (ロ) より $gc_1(b_1) = -c_2(b_2)$ である. よって, (3.4) より $F_\Gamma(a_1, a_2) = -F_\Gamma(b_1, b_2)$ であり, F_Γ の像の直径は π である. したがって, (2) が成り立つ.

次に, (2) \Rightarrow (1) を示そう. (2) より, 2点 $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ が存在し, $F_\Gamma(a_1, a_2) = -F_\Gamma(b_1, b_2)$ をみたす. このとき, $c_i : \mathbb{R} \rightarrow S^3$ の周期性により, $a_i < b_i$ としてよい. ここで, $g = c_2(a_2)c_1(a_1)^{-1}$ とおき, $\alpha = \text{Ad}(g) \in SO(3)$ と定めれば, (イ) と (ロ) が成り立つことが分かり, (1) が得られる. \square

この補題と定理 3.1 より, 直径予想は次の予想と同値であることが分かる.

予想 (2重接触予想). 任意の p.a.p. (γ_1, γ_2) に対して, S^2 の等長変換 $\alpha \in SO(3)$ が存在し, $\alpha\gamma_1$ と γ_2 は第二種の2重接触を持つ.

この予想が正しいかどうかは現在未解決であるが、次の結果が知られている。

定理 A ([7]). $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ を p.a.p. とし, $\kappa_i(s)$ を $\gamma_i(s)$ の測地的曲率とする. もし

$$(4.1) \quad \kappa_1(s_1)\kappa_2(s_2) < -1 \quad \forall (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$$

が成り立てば, (γ_1, γ_2) に対する 2 重接触予想は正しい.

注 4.1. 条件 (4.1) は $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ に対応する等長はめ込み $f_\Gamma : M_\Gamma \rightarrow S^3$ の平均曲率が零点を持たないことに対応している. したがって, 定理 3.1 と定理 A により, 平坦トーラス M の等長はめ込み $f : M \rightarrow S^3$ の平均曲率が符号を変えない場合, 像 $f(M)$ の直径は円周率 π に等しいことが分かる ([7]).

5. 2 重接触予想に関する最新の研究結果

最近, 榎本氏および梅原氏との共同研究により, 2 重接触予想に関する新しい結果が得られた (定理 B). 以下, それを紹介しよう.

(γ_1, γ_2) を p.a.p. とし, κ_i を γ_i の測地的曲率とする. (γ_1, γ_2) に対する 2 重接触予想を解決するためには, 補題 4.1 と注 3.2(1) より, $I(\gamma_1) = I(\gamma_2) = 0$ としてよい. よって, 注 3.1 と注 3.3 より, γ_i が次の条件をみたす場合を考えれば十分である.

$$(5.1) \quad \begin{cases} \gamma_1 \text{ と } \gamma_2 \text{ はジェネリックであり, 自己交点数はともに奇数,} \\ \text{正数 } \mu \text{ が存在し } \min_{s_1} \kappa_1(s_1) > \mu > \max_{s_2} \kappa_2(s_2). \end{cases}$$

以下, (γ_1, γ_2) は (5.1) をみたすとす.

定理 B ([1]). もし γ_1 が negative shell を含み, γ_2 が positive shell を含むならば, (γ_1, γ_2) に対する 2 重接触予想は正しい.

定義 5.1. $\sigma : [a, b] \rightarrow S^2$ を正則曲線とする. σ が単純閉曲線であり, 接ベクトル $\sigma'(a)$ と $\sigma'(b)$ が 1 次独立であるとき σ を **shell** とよび, 点 $N = \sigma(a) = \sigma(b)$ を σ の **node** とよぶ. さらに, σ から定まる二つの領域のうち, node における内角が π 未満である領域を σ の**内部**とよぶ. また, σ の内部が σ の進行方向左側 (resp. 右側) にあるとき, σ を **positive shell** (resp. **negative shell**) という.

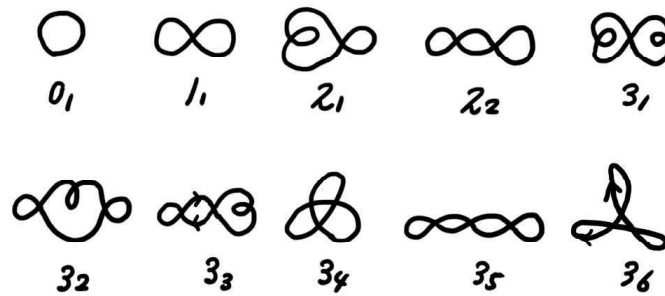
例 5.1. 2 つの positive shell (左) と 2 つの negative shell (右)



注 5.1. 自己交点数が 1 である正則閉曲線は, positive shell と negative shell の両方を含む. よって, γ_1 と γ_2 の自己交点数がともに 1 の場合, 定理 B の仮定はみたされる.

注 5.2. 自己交点数が 3 である正則閉曲線は, $3_3, 3_6$ 型でなければ, positive shell と negative shell の両方を含む (下図参照). よって, γ_1 と γ_2 の自己交点数がともに 3 以下の場合, 次の条件が成り立てば, 定理 B の仮定はみたされる.

- γ_1 は $3_3, 3_6$ 型でなく,
- γ_2 は 3_3 型 (下図と逆向き) でなく, 3_6 型 (下図と同じ向き) でもない.



3 個以下の交点をもつジェネリックな球面閉曲線のリスト (小林・梅原 [8])

6. 定理 B の証明 (概略)

最後に, 定理 B の証明の概略を述べよう. C を S^2 上の有向円とし, $P \in C$ とする. P から最も遠い C 上の点を P^* とすれば, $C \setminus \{P, P^*\}$ は二つの部分 (P の前方と後方) に分かれる. 点 P の前方部分を $C_+(P)$, 後方部分を $C_-(P)$ とかく.

補題 6.1 ([7]). μ を正定数とし, $\gamma : [a, b] \rightarrow S^2$ を測地的曲率が $\min_s \kappa(s) > \mu$ をみたす正則曲線, C を S^2 上の μ -円 (測地的曲率が μ である有向円) とする. もし

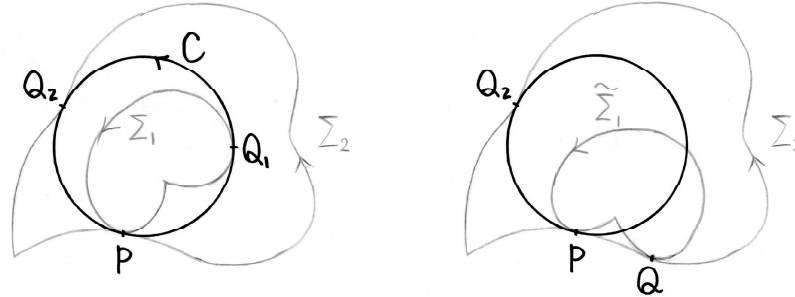
- $\gamma : [a, b] \rightarrow S^2$ が単射,
- $\gamma(a), \gamma(b) \in C$ であり, これ以外の点 $\gamma(s)$ はすべて C の内部にある

ならば, $\gamma(b) \in C_-(\gamma(a))$ である.

補題 6.2 ([7]). Σ を shell とすると, Σ 上の点 x が存在し, x における Σ の曲率円は Σ の内部の閉包に含まれる.

定理 B の証明. S^2 上の μ -円を一つ選び C とする. Σ_1 を γ_1 に含まれる negative shell とし, Σ_2 を γ_2 に含まれる positive shell とする. (5.1) より, $\min_{s_1} \kappa_1(s_1) > \mu > \max_{s_2} \kappa_2(s_2)$ だから, 補題 6.1 と補題 6.2 を用いることにより, Σ_1 と Σ_2 は, はじめから

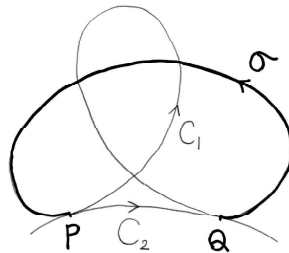
下図 (左) のような配置になっているとしてよいことが分かる. ただし, $Q_1 \in C_+(P)$ であり $Q_2 \in C_-(P)$ である.



ここで, S^2 の等長変換 $\alpha \in SO(3)$ に対して $\tilde{\Sigma}_1 = \alpha(\Sigma_1)$ とおき, $\tilde{\Sigma}_1$ と Σ_2 が点 P において接する状態のまま α を単位元 $1 \in SO(3)$ から連続的に動かす. その際, $\tilde{\Sigma}_1$ の node が定点 P に近づくように α を動かすことにすると, 最終的に $\tilde{\Sigma}_1$ は Σ_2 からはみ出てしまうので, 途中で上図 (右) の配置ができる. ただし, Q は $\tilde{\Sigma}_1$ と Σ_2 の新たな接点であり, $\alpha\gamma_1$ と γ_2 は P, Q において 2 重接触を持つ. この 2 重接触が第二種であることを示そう. 閉区間 $[a_i, b_i]$ を

$$P = \alpha\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2), \quad Q = \alpha\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$$

であるように選び, $c_1 = \alpha\gamma_1|[a_1, b_1]$, $c_2 = \gamma_2|[a_2, b_2]$ とおく. さらに, $\alpha\gamma_1$ から c_1 を取り除き Q から P に至る曲線弧 σ を作る (下図参照).



ここで, c_i と σ をつなげてできる正則閉曲線を $c_i + \sigma$ とすれば, $c_1 + \sigma$ は $\alpha\gamma_1$ であり, $c_2 + \sigma$ は単純閉曲線である. よって

(6.1) $c_1 + \sigma$ の自己交点数は奇数であり, $c_2 + \sigma$ の自己交点数は偶数である.

ところで, もし P, Q における $\alpha\gamma_1$ と γ_2 の 2 重接触が第一種なら, 定義 4.1 より, 曲線 c_1 は両端の接ベクトルを固定した状態のまま c_2 に正則変形できる. したがって, 閉曲線 $c_1 + \sigma$ と $c_2 + \sigma$ は正則ホモトピー同値である. これは, (6.1) に反する. \square

参考文献

- [1] K. Enomoto, Y. Kitagawa and M. Umehara, *Extrinsic diameter of immersed flat tori in the 3-sphere II*, arXiv:1906.00523.
- [2] K. Enomoto, Y. Kitagawa and J. L. Weiner, *A rigidity theorem for the Clifford tori in S^3* , Proc. A.M.S., **124** (1996), 265–268.
- [3] Y. Kitagawa, *Periodicity of the asymptotic curves on flat tori in S^3* , J. Math. Soc. Japan, **40** (1988), 457–476.
- [4] Y. Kitagawa, *Embedded flat tori in the unit 3-sphere*, J. Math. Soc. Japan, **47** (1995), 275–296.
- [5] Y. Kitagawa, *Isometric deformations of flat tori in S^3 with nonconstant mean curvature*, Tohoku Math. J., **52** (2000), 283–298.
- [6] Y. Kitagawa, *Deformable flat tori in S^3 with constant mean curvature*, Osaka J. Math., **40** (2003), 103–119.
- [7] Y. Kitagawa and M. Umehara, *Extrinsic diameter of immersed flat tori in S^3* , Geometriae Dedicata **155** (2011), 105–140. *Erratum to Extrinsic diameter of immersed flat tori in S^3* , Geometriae Dedicata **171** (2013), 407–412.
- [8] O. Kobayashi and M. Umehara, *Geometry of Scrolls*, Osaka J. Math. **33** (1996), 441–473.
- [9] U. Pinkall, *Hopf tori in S^3* , Invent. math., **81** (1985), 379–386.