定傾曲線，Jacobi の定理およびそのシンプレクティック的側面*1

小　林　　　治

Osamu Kobayashi*2

0　はじめに

高階微分の幾何学への興味から曲線の第 3 曲率に注目して得られた若干の結果を報告したい．研究の動機および目的は多様体の幾何学にある [4, 6] が，ここでは曲線論に限った考察を述べる．

$\mathbf{R}^3$ の曲線 $x = x(t)$ が一般性条件 $\dot{x} \wedge \ddot{x} \neq 0$ を満たすとき，$(\dot{x}, \ddot{x}, \dot{x} \times \ddot{x})$ を正規直交化し Frenet 枠 $u = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ を得る．枠の全体は群構造をもたないが参照枠 (x に沿って平行性を持つ枠を選ぶ) を固定することにより群 $SO(3)$ と同一視される．こうして Frenet 方程式

$$u^{-1}\dot{u} = |\dot{x}| \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \in so(3) \simeq \Lambda^2\mathbf{R}^3$$

を得る．$(|\dot{x}|, \kappa, \tau)$ ははめこみ x の合同類の完全不変量となる．右辺の歪対称行列は 1 次元の核をもち，$\vec{X} = \tau\vec{e}_1 + \kappa\vec{e}_3$ で張られる．$\dot{x}$ の $\vec{X}^\perp$ に対する傾きは $\tan\theta = \tau/\kappa$, $\theta = \angle(\vec{e}_1, \vec{X}^\perp)$ と計算され，定傾条件 $\tau/\kappa = \mathrm{const}$ を得る．次の結果はよく知られている．

定傾曲線定理． $\tau/\kappa = \mathrm{const} \iff$ (i) $\theta = \mathrm{const}$; (ii) $\vec{X}/|\vec{X}| = \mathrm{const}$; (iii) このような $\vec{X}$ 方向は一意的.

(i) だけでなく (ii), (iii) も含めて**定傾条件** (constant-slope conditions) と考える．一見関係のなさそうな次の定理は定傾曲線定理と相補うものになっている．

Jacobi の定理 (1842). x が閉曲線のとき S^2 の閉曲線 $\vec{e}_2$ は S^2 を同面積に (ホモロジーの意味で*3) 2 分する．

Frenet 公式 (1847) は基本的であるので Euclid 空間での一般形を述べておく．$\mathbf{R}^n$ の曲線 $x = x(t)$ が**一般性条件** (genericness condition)

$$\dot{x} \wedge \cdots \wedge x^{(n-1)} \neq 0 \tag{0.1}$$

を満たすとき Frenet 枠 $u = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n) \in SO(n)$ が定まり．Frenet 方程式 $u^{-1}\dot{u} = |\dot{x}|F_K \in so(n) \simeq \Lambda^2\mathbf{R}^n$ を得る．ここで **Frenet 行列** $F = F_K$ は次の形をしている．

$$F_K = \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & & 0 \\ k_1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & 0 & -k_{n-1} \\ 0 & & k_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University

*1 Constant-slope curves, Jacobi's theorem and a symplectic aspect of them

*2 E-mail: (please ask the organizer)

*3 $\partial U_1 = \vec{e}_2$ をみたす 2-鎖 U_1 は mod $[S^2]$ で決まり $H_2(S^2)$ で $S^2 = U_1 + U_2$ となるように分ける．

第 i 曲率 k_i は k_{n-1} (捩率, torsion, と呼ぶ) を除いて正値である．$(|\dot{x}|, K)$ がはめこみ x の合同類の完全不変量となる，ここで $K = (k_1, \ldots, k_{n-1})$. 以後断りなしに $|\dot{x}| = 1$ を仮定することがある．(0.1) より $\operatorname{rank} F_K \geq n-2$ (*cf.* 補題 6.1(ii))．n が偶数のとき Pfaff 行列式は次で与えられ，特に $\operatorname{sgn}(\operatorname{pf} F_K) = (-1)^{n/2}\operatorname{sgn}(k_{n-1})$.

$$\operatorname{pf} F_K = (-1)^{n/2} k_1 k_3 \cdots k_{n-1}. \tag{0.2}$$

1　一般化の前に

簡単のため捩率 $\neq 0$ とする．$n = 2m+1$ のとき F の余因子行列 (§6.2) は $\hat{F} = X\,{}^tX$. ここで $X = \frac{1}{m!} *(F \wedge \cdots \wedge F) \in \ker F$, 右辺は m 乗．$\vec{X} = \sum X_i \vec{e}_i$ に対して定傾条件 (ii) は $(k_{n-1}/k_{n-2}, \ldots, k_4/k_3, k_2/k_1) = \mathrm{const} \in \mathbf{R}^m$ となるが，$n \geq 5$ のとき残りの定傾条件を導かない．$n = 2m$ が偶数のとき $X = \frac{1}{(m-1)!} *(F \wedge \cdots \wedge F) \in so(n) \simeq \Lambda^2 \mathbf{R}^n$ とすると $\hat{F} = XFX$ であり，$\Xi = \sum_{i<j} X_{ij} \vec{e}_i \wedge \vec{e}_j$ に対して

$$\operatorname{span} \Xi = \mathrm{const} \subset \Lambda^2 \mathbf{R}^n \iff [k_1 : k_2 : \cdots : k_{n-1}] = \mathrm{const} \in \mathbf{R}\mathrm{P}^{n-2}. \tag{1.1}$$

この曲率比条件が定傾条件の一般化と考えられることを以下で示したい．以後 $n = 2m$ とする．

2　用語の準備

• **曲率比例．**平面曲線 x, y の曲率をそれぞれ K_x, K_y と書く．$|\dot{x}|/|\dot{y}|$, K_x/K_y がともに定数のとき，x は y に曲率比例 (proportional in curvature) するという．例えば微分可能関数 $h(t)$ を $e^{2t} \cos h(t) = 1 + \sin h(t)$, $h(0) = 0$ で定めると，曲線

$$x_{(\lambda)}(t) = \int_0^t (\cosh^2 u)\, e^{i\lambda h(u)}\, du \in \mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2 \tag{2.1}$$

は $|\dot{x}_{(\lambda_1)}|/|\dot{x}_{(\lambda_2)}| = 1$, $K_{\lambda_1}/K_{\lambda_2} = \lambda_1/\lambda_2$, 自己交点数は $\lceil (|\lambda| - 1)/2 \rceil$, の性質をもつ．[*4] 曲率比例関係にある x, y が $K_x|\dot{x}| = K_y|\dot{y}|$ を満たせば相似になる．x が閉曲線のとき $r(x) = \frac{1}{2\pi} \oint K_x |\dot{x}|\, dt$ は閉曲線 $\dot{x}$ の基本群 $\pi_1(T\mathbf{R}^2 \setminus 0) \cong \mathbf{Z}$ における度数を表し**回転数** (rotation number) という．

• **Frenet 形式．**$\mathbf{R}^n$ の正則曲線 $x = x(t)$ は一般性条件 (0.1) を満たすとする．Frenet 形式

$$\omega_K = -\sum_{i=1}^{n-1} k_i \vec{e}_i \wedge \vec{e}_{i+1} \tag{2.2}$$

は曲線 x の（自己交差を除いて）まわりの閉形式に拡張できる．Frenet 方程式は次の形になる

$$(\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j)^{\cdot} = [\omega_K, \vec{e}_i \wedge \vec{e}_j]. \qquad (\Lambda^2 \mathbf{R}^n \cong so(n) \text{ の同一視をしている}) \tag{2.3}$$

ここまでは n が奇数でもよい．以下 $n = 2m$ とする．Q, $Q_* \in SO(m)$ によって

$$\omega_K = -\sum_{i=1}^{m} \mu_i \vec{\xi}_i \wedge \vec{\eta}_i, \qquad \begin{cases} (\vec{\xi}_1 \, \ldots \, \vec{\xi}_m) = (\vec{e}_1 \, \vec{e}_3 \, \ldots \, \vec{e}_{n-1}) Q \\ (\vec{\eta}_1 \, \ldots \, \vec{\eta}_m) = (\vec{e}_2 \, \vec{e}_4 \, \ldots \, \vec{e}_n) Q_* \end{cases} \tag{2.4}$$

の形にできる．μ_i は $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_{m-1} \geq |\mu_m|$, $\operatorname{sgn}(\mu_m) = \operatorname{sgn}(\operatorname{pf} F_K)$ (*cf.* (0.2)) の条件で一意的に定まる．簡便さのためこの順序付けを仮定することがある．

$$|\mu_1|, \ldots, |\mu_m| \text{ が互いに異なる} \tag{2.5}$$

[*4] λ が整数のとき $x_{(\lambda)}$ は代数曲線だろうか?

を分離性条件 (separability) という．$\alpha_i = \vec{\xi_i} \wedge \vec{\eta_i} \simeq \mathrm{span}\{\vec{\xi_i}, \vec{\eta_i}\}$, $\xi = \vec{\xi_1} \wedge \cdots \wedge \vec{\xi_m} \simeq \mathrm{span}\{\vec{\xi_1}, \ldots, \vec{\xi_m}\}$, $\eta = \vec{\eta}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{\eta}_m \simeq \mathrm{span}\{\vec{\eta}_1, \ldots, \vec{\eta}_m\}$ とおくと，次の相補的な直交分解を得る．

$$T_x \simeq \mathbf{R}^n = \alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_m = \xi \oplus \eta. \tag{2.6}$$

• **Maslov 回転数.** シンプレクティック線形空間 $\mathbf{R}^{2m}$ の Lagrange 部分空間の全体は $U(m)/O(m)$ ($\subset G_m(\mathbf{R}^{2m})$) で次元は $\frac{m(m+1)}{2}$ $\left(\leq m^2 = \dim G_m(\mathbf{R}^{2m})\right)$．ファイバー束 $U(m)/O(m) \xrightarrow{\det^2} U(1)$ が基本群の同型 $\pi_1(U(m)/O(m)) \cong \mathbf{Z}$ を与える ($m > 1$ のとき $\pi_1(G_m(\mathbf{R}^{2m})) = \mathbf{Z}/2$)．$\xi(t)$ が Lagrange 部分空間であるような閉曲線 x に対し ξ の $\pi_1(U(m)/O(m))$ での度数 $m(x)$ を **Maslov 回転数** (Maslov degree) と呼ぶ．

3 主結果

$n = 2m$ とし，$\mathbf{R}^n$ の正則曲線 $x = x(t)$ は一般性条件 (0.1) をみたすものとする．

定理 A. $x = x(t)$ はさらに分離性条件 (2.5) を満たすとする．このとき $[k_1 : \cdots : k_{n-1}] \in \mathbf{R}\mathrm{P}^{n-2}$ が一定であるための必要十分条件は x が曲率比例の関係にある互いに相似でない平面曲線 x_i の直積の対角曲線 $(x_1(t), \ldots, x_m(t))$ と合同になること．

平面曲線 x_i の中で相似なものがあれば x は余次元 2 以上のアフィン部分空間内に位置し一般性条件に反する．分離性条件は不要と思われる (*cf.* §4)．

定理 B. $\mathbf{R}^4$ の閉曲線 x に対して有向 Grassmann 多様体 $\tilde{G}_2(\mathbf{R}^4) \cong S^2 \times S^2$ の曲線 ξ の Hodge $*$ に関する $\pm$ 成分，つまり各 S^2 への射影は S^2 を等しい面積の 2 領域に分ける．

振率 0 曲線を考えれば，定理 A は $n = 4$ のとき定傾曲線定理，定理 B は Jacobi の定理 [1] となる．Jacobi の定理の一般化はさらに高次元でも考えられるが，定傾曲線定理およびその一般化である定理 A のように必要十分条件の形で述べることが難しいため，どのような定式化にしたらよいか決めかねるところがある．

定理 C. 振率 $\neq 0$ の曲線について定理 A の条件は，任意の t, t' に対して $\xi(t)$ が $\omega_K(t')$ に関して Lagrange 的であることと同値．このとき x が閉曲線ならば (定理 A の記法で) $m(x) = 2\sum_{i=1}^m r(x_i)$．

閉曲線が定理 A の条件をみたせば振率 $\neq 0$ となることに注意する．(0.2) より振率 $\neq 0$ のとき ω_K はシンプレクティック形式である．

4 証明の方法

4.1 $\Lambda^2\mathbf{R}^n$ の曲線としての ω_K

Frenet 形式 $\omega_K = \omega_K(t)$ について次の条件を考える: (a) ω_K は定点; (b) ω_K は直線 (または定点); (c) ω_K は $\Lambda^2\mathbf{R}^n$ 内のアフィン平面内に含まれる．1 階微分 $\dot{\omega}_K$ の計算から (a) は x が螺旋であることと同値，$\ddot{\omega}_K$ からは (b) と曲率比条件 (1.1) の同値性，さらに $\dddot{\omega}_K$ から (c) も (1.1) と同値であることが示される．4 階微分 $\ddddot{\omega}_K$ の計算結果として定理 C が証明される ($n = 4$ の場合は 2 階微分 $\ddot{\omega}_K$ で十分)．

これらは曲線 ω_K の制約として著しいが，それは曲線 ω_K を決定するための不変量がもとの曲線 x の Euclid 不変量より少ないためと考えられる (*cf.* §5)．

4.2　$so(n)$ の曲線としての ω_K

(2.4) に (2.3) を用いて曲線 ω_K の $\mathrm{Ad}(SO(n))$ 不変な性質を見る．鍵となるのは

補題 4.1. $\dot{\alpha}_i = 0 \iff \dot{Q} = \dot{Q}_* = 0 \Rightarrow [k_1 : \cdots : k_{n-1}] = \mathrm{const} \in \mathbf{R}\mathrm{P}^{n-2}$.

はじめの条件が定傾条件 (ii)，次の条件が定傾条件 (i) に対応する．逆について

補題 4.2. $[k_1 : \cdots : k_{n-1}] = \mathrm{const} \in \mathbf{R}\mathrm{P}^{n-2}$ かつ分離性条件 (2.5) $\Rightarrow \dot{Q} = \dot{Q}_* = 0$.

分離性条件は不要と思われる．$n = 4$ のときは §6 (6.1) 式から具体的に確かめられる．$a_i = {k_{2i-1}}^2$, $b_i = {k_{2i}}^2$ とおき，m 次多項式 $p_m(t)$ を

$$p_0(t) = 1, \quad p_{m+1}(t) = (t - (a_{m+1} + b_m))p_m(t) - a_m b_m p_{m-1}(t) \tag{4.1}$$

で定義する (*cf.* §5)．p_m の判別式 $D(p_m)$ は $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_{m-1}$ の $2(m-1)$ 次式である．

補題 4.3. 一般性条件 (0.1) のもと，分離性条件 (2.5) $\iff D(p_m) \neq 0$

$m = 2$ および $m = 3$ で振率 $k_5 = 0$ の場合にこの判別式条件は容易に確かめられ，したがって定理 A での分離性条件は不要．曲線 x の定平面 α_i への射影を x_i とすることにより定理 A が示される．なお分離性条件は定傾条件 (iii) に相当する (§7).

4.3　曲線 ξ

定理 A が接空間 T_x の α_i 分解に関するものであるのに対して，定理 B は ξ, $\xi^\perp = \eta$ 分解に対するものである．$n = 4$ のとき，曲線 $\xi(t) \in \tilde{G}_2(\mathbf{R}^4) \subset \Lambda^2\mathbf{R}^4$ の Euclid 曲率からはよい性質が見えない．$\Lambda^2\mathbf{R}^4 = \Lambda^{(+)} \oplus \Lambda^{(-)}$ を Pfaff 計量 $\mathrm{pf}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} *(\alpha \wedge \beta)$ (符号 $+{+}{+}{-}{-}{-}$) で考えることにより Jacobi の定理とまったく同様に定理 B が得られる (面積条件は Gauss-Bonnet から)．Pfaff 計量に関して $\langle \dot{\xi}, \dot{\xi} \rangle = \mathrm{pf}\, F_K$. よって (0.2) より曲線 ξ が光的となるための必要十分条件は振率 $k_3 = 0$，つまり 3 次元での Jacobi の定理の場合である．

5　考察

1. $\mathbf{R}^n \cong \mathbf{R}^m \otimes \mathbf{R}^2$ と考え，m 次行列 A を $F_K = A \otimes \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) - {}^tA \otimes \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ で定める．具体的表示は

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & -k_2 & & & 0 \\ & k_3 & -k_4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & k_{n-3} & -k_{n-2} \\ 0 & & & & k_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(4.1) の多項式 $p_m(t)$ は ${}^tAA$ の特性多項式である．A を用いると Frenet 方程式は

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_{n-1}) & = |\dot{x}|(\vec{e}_2, \vec{e}_4, \ldots, \vec{e}_n)A \\ \frac{d}{dt}(\vec{e}_2, \vec{e}_4, \ldots, \vec{e}_n) & = -|\dot{x}|(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_{n-1}){}^tA \end{cases} \tag{5.1}$$

となり，解析力学の Hamilton 方程式とよく似ている．表題の「シンプレクティック側面」はこの観察による．$\xi = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_{n-1}$, $\eta = \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_4 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_n$ にも注意する．Lagrange 部分多様体のシンプレクティック幾何での役割は重要であるが，Lagrange 性は共形シンプレクティック*5 不変であり，定理 C についてもシンプレクティック形式として ω_K 以外の選択肢がある．例えば §7 の 三.

2. 自然に (5.1) の周期解に興味が導かれる．これは閉曲線の考察に対応する．曲率比例の関係にある閉曲線の組を求めることも意外と難しい．定理 B および定理 C の後半は閉曲線に関する結果であるが Frenet 枠のスピン持上げも興味ある問題である．Frenet 方程式のスピン持上げは $\mathrm{Spin}(n)$ と $SO(n)$ の Lie 代数が同じであるから本質的に変わるところはない．閉曲線の Frenet 枠のスピン持上げが可能かどうかは見るべき点で，ここにスピン表現を用いることに興味がある*6.
3. 高階微分不変量は特異点の問題および小畠方程式 (1962, 1965, 1971,. . .) にも関係する．曲線の特異点は Bouquet 方式のブローアップ，伸開線・縮閉線の方法 (*e.g.* [7]) などにより特異性を解消した後の高次曲率がその性質をよく表す．このような操作でしばしば幾何学（その構造群）の交替がおきる．小畠方程式についても同様な観察があることを小畠守生教授ご自身が生前述べており，Riemann 多様体の質量 [5] の考察もその一端としてある．
4. §4.1 で述べたように $\omega_K = \omega_K(t)$ は Euclid 幾何より大きな構造群をもつ幾何で扱うのが適しているように思われる．アフィン曲線論は候補の一つであるが高次元で指針となる結果を筆者は知らない．アフィンシンプレクティック曲線論はあまり知られてないが高次元でも 2 次元アフィン曲線論のような精巧さがあり，この方法での試みにも関心がある．適切な幾何学への変換が得られれば，[4] (論文版は準備中) における L 変換（共形不変量を Laguerre 幾何学を用いて Lorentz 幾何の等長不変量に読替える）のような応用が期待できる．
5. そのためには多様体 M 上での定式化も必要となる．一般的手順は，まず Lie 群 $G \subset GL(V)$ を指定し，主 G 束 $P \to M$，付随する V ベクトル束 $E \to M$ に G 接続 (ω^α_β) を用意する (Riemann 幾何であれば $G = O(n)$, $E = TM$, (ω^i_j) は Levi-Civita 接続)．M 上の曲線 $x = x(t)$ に対して構造群 G に適合的な媒介変数を定め，そのような助変数に t を限定する (Riemann 幾何ならば弧長変数)．'Frenet 枠' $u = (e_\alpha)$ を P の曲線として構成し，その双対枠を (e^β) とする (Riemann 幾何の場合同一視可能)．$E \otimes E^*$ の曲線 $\omega^\alpha_\beta(\dot{u}) e_\alpha \otimes e^\beta$ を考える (Riemann 幾何では $\Lambda^2 TM \hookrightarrow TM \otimes T^*M$ の曲線 ω_K)．前節までの議論を Riemann 幾何あるいはスピン化するために M の向きつけ可能性，スピン条件は必ずしも必要ではない (曲線に沿うスピンリフトは 2 次のコホモロジーの障害にかからない)．
6. その他の考察については [6].

6　補足

6.1　4 次元の場合

$F_K = A \otimes \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) - {}^tA \otimes \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} k_1 & -k_2 \\ 0 & k_3 \end{smallmatrix}\right)$ に注意する．${}^tAA$ の固有値は $\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(k_1+k_3)^2 + {k_2}^2} \pm \sqrt{(k_1-k_3)^2 + {k_2}^2}\right)^2$ で，$\mu_1 = \sqrt{\lambda_+}$, $\mu_2 = \mathrm{sgn}(k_3)\sqrt{\lambda_-}$. *7 以下 $T = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ に対し $\phi_T(t) = \frac{at+b}{ct+d}$ とする．$\Lambda = \frac{k_1 k_2}{{k_1}^2 - \lambda_-} = \frac{\lambda_+ - {k_1}^2}{k_1 k_2} > 0$, $\Lambda^* = \frac{k_2 k_3}{\lambda_+ - {k_3}^2} = \frac{{k_3}^2 - \lambda_-}{k_2 k_3}$ とおくと，$k_1 \Lambda - k_2 = k_3 \Lambda^*$, $k_1/\Lambda + k_2 = k_3/\Lambda^*$.

*5 単純に考えると共形性は定数倍に限られ，これでは自明なため Carathéodory の方法などがある [9].

*6 [3] に $\mathrm{Spin}(3) \to SO(3)$ に関係する議論があるが，そこでのようにスピン幾何を用いずにすませることもできる．

*7 したがって $k_2 > 0$ より分離性条件 (2.5) は満たされる．

よって

$$\begin{cases}\phi_A(\Lambda)=\Lambda^* \\ \phi_A(-1/\Lambda)=-1/\Lambda^*\end{cases}, \quad \begin{cases}\phi_{{}^tA}(\Lambda^*)=\Lambda \\ \phi_{{}^tA}(-1/\Lambda^*)=-1/\Lambda\end{cases}.$$

これより $\phi_{{}^tAA}(\Lambda)=\Lambda$, $\phi_{A\,{}^tA}(\Lambda^*)=\Lambda^*$ が得られ，次の関係式にいたる．

$$[k_1:k_2:k_3]=[\sin 2\theta : 2\sin(\theta+\theta_*)\sin(\theta-\theta_*) : \sin 2\theta_*] \in \mathbf{R}\mathrm{P}^2. \tag{6.1}$$

$\Lambda^*/\Lambda=\frac{\lambda_-}{k_1k_3}=\frac{k_1k_3}{\lambda_+}=\mu_2/\mu_1$ から $\mu_1=k_1\frac{\cos\theta_*}{\cos\theta}=k_3\frac{\sin\theta}{\sin\theta_*}$, $\mu_2=k_1\frac{\sin\theta_*}{\sin\theta}=k_3\frac{\cos\theta}{\cos\theta_*}$. よって $Q=e^{-i\theta}$, $Q_*=e^{-i\theta_*}\in U(1)\cong SO(2)$ とすると $\Lambda=\tan\theta$, $\Lambda^*=\tan\theta_*$ である．

$[k_1:k_2:k_3]\in\mathbf{R}\mathrm{P}^2$ が一定であるための条件は $(\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,\tilde{k}_3)=(\sin 2\theta, 2\sin(\theta+\theta_*)\sin(\theta-\theta_*), \sin 2\theta_*)$ とおけば $\tilde{k}_1d\tilde{k}_2-\tilde{k}_2d\tilde{k}_1=\tilde{k}_1d\tilde{k}_3-\tilde{k}_3d\tilde{k}_1=0$ であり，これは

$$\begin{pmatrix}1-\cos 2\theta\cos 2\theta_* & -\sin 2\theta\sin 2\theta_* \\ -\cos 2\theta\sin 2\theta_* & \sin 2\theta\cos 2\theta_*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot\theta \\ \dot\theta_*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

と表せる．$k_1k_2\neq 0$ より左辺の 2×2 行列の行列式 $=\tilde{k}_1\tilde{k}_2\neq 0$. よって $\dot\theta=\dot\theta_*=0$.

Frenet 方程式から $\dot\alpha_1=(\vec\xi_1\wedge\vec\eta_1)\dot{}=\dot{\vec\xi_1}\wedge\vec\eta_1+\vec\xi_1\wedge\dot{\vec\eta_1}=-\dot\theta\vec\xi_2\wedge\vec\eta_1-\dot\theta_*\vec\xi_1\wedge\vec\eta_2$. よって $\dot\theta=\dot\theta_*=0$ は α_1, $\alpha_2={\alpha_1}^\perp$ が定平面であるための必要十分条件.

以上のように (6.1) が議論の要となっている．橋本・大橋 [8] は同じ結果を四元数を用いて示している．

6.2 余因子変換

標準同型 $V_1\otimes V_2\simeq V_2\otimes V_1$ により $T\in V_1\otimes V_2$ は転置 ${}^tT\in V_2\otimes V_1$ に対応する．$T\colon V_1\to V_2$ を $T\in V_2\otimes V_1^*$ と考えると[*8]，$V_2=V_2^{**}$ ($\iff \dim V_2<\infty$) であれば ${}^tT$ は引き戻し $T^*\colon V_2^*\to V_1^*$ と一致する．以下 $\dim V=n$, $A\colon V\to V$ とする．A は $A_*\colon\Lambda^{n-1}V\to\Lambda^{n-1}V$ を誘導する ($n=1$ のとき $A_*=1$).

$\omega\in\Lambda^nV^*\setminus 0$ は同型 $\omega\colon\Lambda^{n-1}V\to V^*$; $\alpha\mapsto\omega(\alpha\wedge\cdot)$ を導く．行列式 $\det A=A^*\omega/\omega$，余因子変換 (cofactor transformation) $\hat{A}=\omega\circ A_*\circ\omega^{-1}\colon V^*\to V^*$ は ω の取り方によらない ($n=1$ のとき $\hat{A}=1$).

$$\begin{array}{ccc}\Lambda^{n-1}V & \xrightarrow{A_*} & \Lambda^{n-1}V \\ \downarrow\omega & & \downarrow\omega \\ V^* & \xrightarrow{\hat{A}} & V^*\end{array}$$

補題 6.1. (i) $\widehat{AB}=\hat{A}\hat{B}$, $\widehat{cA}=c^{n-1}\hat{A}$, ${}^t\hat{A}=\widehat{{}^tA}$. (ii) $\operatorname{rank}A\le n-2\iff\hat{A}=0$. (iii) $A_*\alpha\wedge X=\alpha\wedge{}^t\hat{A}X$.

特に $(\det A)\alpha\wedge X=A_*(\alpha)\wedge A(X)=\alpha\wedge{}^t\hat{A}A(X)$ より Laplace 展開 $\det A={}^t\hat{A}A$ を得る．

命題 6.2. (i) (Cramer) $\det A\neq 0\Rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\,{}^t\hat{A}$. (ii) $\det A=0\Rightarrow\hat{A}=X\,{}^tY$, $\exists X\in\ker{}^tA\subset V^*$, $\exists Y\in\ker A\subset V=V^{**}$. 特に $\operatorname{rank}\hat{A}\le 1$. (iii) $\hat{\hat{A}}=(\det A)^{n-2}A$. (iv) $\widehat{P^{-1}AP}={}^tP\hat{A}\,{}^tP^{-1}$.

$\hat{P}=\pm P$ をみたす行列は次の通り．$n=1$ のとき $P=\pm 1$; $n\ge 2$ では $P=0$ または $P=cQ$, ここで $c^{n-2}=1$, ${}^tQQ=1$, $\det Q=\pm 1$. 特に $n\neq 2$ のとき実行列 $P\neq 0$ に対しては $P\in O(n)$, $\det P=\pm 1$.

計量線形空間では，計量による同一視 $V\simeq V^*$ のもと $\hat{A}$ は Hodge $*$ を用いて次の可換図式で表される．この $\hat{A}$ は計量の共形類にしかよらない．

$$\begin{array}{ccc}\Lambda^{n-1}V & \xrightarrow{A_*} & \Lambda^{n-1}V \\ \downarrow * & & \downarrow * \\ V & \xrightarrow{\hat{A}} & V\end{array}$$

[*8] 行列の添字記法で (a^i_j) が (a_{ij}) に対応する習慣に従った．

同一視 $V \simeq V^*$ は若干の混乱を招くため，双線形形式 $T \in V^* \otimes V^* \simeq \mathrm{Hom}(V, V^*)$ の余因子形式 $\hat{T} \in V \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(V^*, V)$ について補足する．$\omega^* \in \Lambda^n V$ を $\omega(\omega^*) = 1$ で定める．$\det T = \det_\omega T = T^*\omega^*/\omega$, 余因子形式 $\hat{T} = \omega^* \circ T_* \circ \omega^{-1}$ はいずれも ω 依存となる．

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{n-1}V & \xrightarrow{T_*} & \Lambda^{n-1}V^* \\ \downarrow \omega & & \downarrow \omega^* \\ V^* & \xrightarrow{\hat{T}} & V \end{array}$$

補題 6.3. [*9] (i) $\det_{c\omega} T = c^{-2} \det_\omega T$, ω を c 倍すると $\hat{T}$ も c^{-2} 倍される．(ii) ${}^t\hat{T}T = \widehat{{}^tT}T = \det T$.

7　第 1 節に戻って

§1 の Ξ は次のように表される (この計算に必要な事項は §6.2).

$$\Xi = (\mathrm{pf}\, F_K)\left(\frac{1}{\mu_1}\alpha_1 + \cdots + \frac{1}{\mu_m}\alpha_m\right), \quad \alpha_i = \vec{\xi}_i \wedge \vec{\eta}_i. \tag{7.1}$$

α_i が一定のとき，連比 $[\mu_1 : \cdots : \mu_m]$ も一定になることが示され，したがって $\mathrm{span}\,\Xi = \mathrm{const}$. よって曲率比 $[k_1 : \cdots : k_{n-1}]$ は一定となる (補題 4.1)．しかし逆を考えるとき，たとえば $\mu_i = \mu_j$, $i \neq j$ であれば $\alpha_i/\mu_i + \alpha_j/\mu_j$ の直交分解は一意的に定まらず，これが補題 4.2 で分離性条件を必要とする理由になっている (分離性条件を仮定しなくても，α_i, α_j を取り直すことで修繕可能と思われるが分離性条件を示すことができればより好ましいと考える)．§1 では感触をつかむため捩率 $\neq 0$ を仮定したが，実際には一般性条件 (0.1) で十分である．

文　献

[1] C. G. J. Jacobi, "Über einige merkwürdige Curventheoreme," Schum. Astr. Nachr. 20 (1842) 115–120.

[2] O. Kobayashi, "A variational problem for affine connections", Arch. Math. 86 (2006) 464–469.

[3] —, "The conformal rotation number", Kodai Math. J 38 (2015), 166–171.

[4] —, "Conformal length through Laguerre geometry", 2015, Kagurazaka; "Weyl's gauge theory, the Schwarzian derivative and a sphere theorem", MSJ autumn meeting 2017, Geom. sec. 41–47 (in Japanese).

[5] —, "Mass in Riemannian geometry—Schwarzschild construction, mass formula, negative mass and singularity", Geometry symp. 65, Sendai, (2018) 177–184, (in Japanese).

[6] —, "A generalization of constant-slope curve theorem" (résumé in Japanese), DG sem. Osaka-city univ., March 2019; "Factorable curves in Euclidean n-space", (in preparation).

[7] — and M. Umehara, "Geometry of scrolls", Osaka J. Math. 33 (1996), 441–473.

[8] H. Hashimoto and M. Ohashi, "On generalized cylindrical helices and Lagrangian surfaces in $\mathbf{R}^4$", J. Geom. 106 (2015), 405–420.

[9] A. Weinstein, "Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds," Adv. in Math. 6 (1971), 329–346.

(2019 年 8 月 6 日提出)

(こばやし　おさむ)

[*9] [2] では Ricci 曲率の対称性を仮定しているため転置を明示してない．