

Generalized Hadamard matrices with a hole and projective planes of prime order

秋山献之 (福岡大学), 末竹千博
Kenzi Akiyama (Fukuoka University), Chihiro Suetake

§1 導入

任意の素数 p に対して, 位数 p の射影平面は存在する。例えばデザルグ平面 $PG(2, p)$ は位数 p の射影平面である。しかしながら $PG(2, p)$ 以外の位数 p の射影平面は知られていない。素数位数の非デザルグ平面は存在するか否か, という問いは有名である。

π を任意の有限射影平面とし, その位数を n とする。 π は部分結合構造として maximal holes を持つ対称可除デザイン $SDD_1[n, n-1, n+1]$ \mathcal{D} を含む。(逆に任意の maximal holes を持つ $SDD_1[n, n-1, n+1]$ は位数 n のある射影平面に一意的に拡大できる。) もし, π が中心と軸を共有する homology group G (π のある特別な自己同型群) を持つならば, G が自己同型群として遺伝するような, maximal holes を持つ $SDD_1[n, n-1, n+1]$ \mathcal{D} を構成することが出来る。 G の位数は小さくて, $|G|(n-1)$ であることがわかる。そこで n が素数 p であるとき, $|G|(p-1)$ であるような 中心と軸を共有する homology group G を持つ, maximal holes を持つ $SDD_1[n, n-1, n+1]$ \mathcal{D} を調べれば, 素数位数 p の射影平面について何らかの情報が得られるのではないか, というのが我々の研究の視点である。

クラス正則な対称可除デザイン $SDD_\lambda[k, u, k+1]$, $k = u\lambda + 1$ には generalized conference matrices が対応していることが知られている。我々はこのような SDD の全自己同型群を計算する方法とこのような SDD 間の同型非同型を判定する方法を提案する。特に $SDD_\lambda[2\lambda+1, 2, 2\lambda+2]$, $\lambda =$ 奇数に対しては, これが maximal holes を持ち, 位数 $2\lambda+2$ の歪対称アダマール行列に対応していることを証明する。

なお, 先行研究の情報については, 宗政先生に色々と教えていただいた。そこでこのノートのタイトルは, Symmetric divisible designs and generalized conference matrices とすべきだったかも知れない。小さい自己同型群を持つ素数位数の射影平面の研究は, まだスタート地点である。

§2 対称可除デザイン

定義 2.1 m, u, k を正の整数, $k \geq 2$, λ_1, λ_2 を非負整数とする。 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を結合構造とする。点 $p \in \mathcal{P}$ とブロック $B \in \mathcal{B}$ に対して, $(p) =$

$\{X \in \mathcal{B} \mid pIX\}$, $(B) = \{x \in \mathcal{P} \mid xIB\}$ とおく。このとき次の条件を満たす \mathcal{D} は $(m, u, k, \lambda_1, \lambda_2)$ -**可除デザイン (divisible design)** と呼ばれる。

- (i) 任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して, $|(B)| = k$
(ii) 次の条件を満たす \mathcal{P} の分割 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1 \cup \dots \cup \mathcal{P}_{m-1}$ が存在する。

- $|\mathcal{P}_i| = u$ ($0 \leq i \leq m-1$)
- 任意の異なる $p, q \in \mathcal{P}$ に対して,

$$|(p) \cap (q)| = \begin{cases} \lambda_1 & \text{もし } p, q \in \mathcal{P}_i \text{ ある } 0 \leq i \leq m-1 \text{ に対して} \\ \lambda_2 & \text{その他} \end{cases}$$

$(\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_{m-1})$ は \mathcal{D} の**点クラス (point classes)** と呼ばれる。

注意 2.2 上の定義において $|\mathcal{P}| = um$,

$$|\mathcal{B}| = \frac{um\{(u-1)\lambda_1 + u(m-1)\lambda_2\}}{k(k-1)},$$

$$|(p)| = \frac{(u-1)\lambda_1 + u(m-1)\lambda_2}{k-1} \quad (p \in \mathcal{P}) \text{ が成り立つ。}$$

定義 2.3 m, u, k を正の整数, $k \geq 2$, λ_1, λ_2 を非負整数とする。 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を $(m, u, k, \lambda_1, \lambda_2)$ -可除デザインとする。もし \mathcal{D} の双対構造 \mathcal{D}^{dual} もまた $(m, u, k, \lambda_1, \lambda_2)$ -可除デザインであるならば, \mathcal{D} は**対称可除デザイン (symmetric divisible design)** と呼ばれる。ここで, \mathcal{D}^{dual} の点クラスは \mathcal{D} の**ブロッククラス (block classes)** と呼ばれる。特に, 正整数 m, u, k, λ ($k \geq 2$) に対して, 対称 $(m, u, k, 0, \lambda)$ -可除デザインは簡単のため $SDD_\lambda[k, u, m]$ と書かれる。 \mathcal{D} の点クラス全体からなる集合, ブロッククラス全体からなる集合をそれぞれ $\Omega(\mathcal{D})$, $\Delta(\mathcal{D})$ と書くことにする。

補題 2.4 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を $SDD_\lambda[k, u, m]$ ($k \geq 2$) とする。
このとき $|\mathcal{P}| = |\mathcal{B}| = mu$, $k(k-1) = u\lambda(m-1)$, $m \geq k \geq 2$

系 2.5 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を $SDD_\lambda[k, u, m]$ ($k \geq 2$) とする。このとき

- (i) $k \geq u\lambda$
(ii) $m = k \iff k = u\lambda$
この場合 $SDD_\lambda[k, u, m] = STD_\lambda[k, u]$ (STD は対称横断デザイン (symmetric transversal design) を意味する)
(iii) $m = k+1 \iff k = u\lambda + 1$
この場合 $SDD_\lambda[k, u, m] = SDD_\lambda[u\lambda + 1, u, u\lambda + 2]$

定義 2.6 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を $SDD_\lambda[k, u, k+1]$ ($k = u\lambda + 1$) とする。 $\Omega(\mathcal{D}) = \{\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_k\}$, $\Delta(\mathcal{D}) = \{\mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_k\}$ とおく。 \mathcal{P}_i と \mathcal{B}_j が, すべての $p \in \mathcal{P}_i$ に対して, $(p) \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$ を満たすとき, $(\mathcal{P}_i, \mathcal{B}_j)$ を \mathcal{D} の **hole** という。特に任意の $0 \leq i \leq k$ に対して, $(\mathcal{P}_i, \mathcal{B}_j)$ が hole となるような $0 \leq j \leq k$ が存在するとき, \mathcal{D} は **maximal holes** を持つという。この場合 $i \mapsto j$ は $\{0, 1, \dots, k\}$ 上

の全単射な写像を導入する。

注意 2.7 定義 2.6 において次が成り立つことを注意しておく。

$h \in \text{Sym}\{0, 1, \dots, k\}$ とする。

すべての $p \in \mathcal{P}_i$ とすべての $B \in \mathcal{B}_{ih}$ に対して $p \not\perp B$ ($0 \leq i \leq k$)

\iff すべての $p \in \mathcal{P}_i$ に対して $(p) \cap \mathcal{B}_{ih} = \emptyset$ ($0 \leq i \leq k$)

\iff すべての $B \in \mathcal{B}_j$ に対して $(B) \cap \mathcal{P}_{jh^{-1}} = \emptyset$ ($0 \leq j \leq k$)

補題 2.8 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を $\text{SDD}_\lambda[k, u, m]$ とする。

ここで $k(k-1) = u(m-1)\lambda$, $m \geq k \geq 2$

$\Omega(\mathcal{D}) = \{\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_{m-1}\}$, $\Delta(\mathcal{D}) = \{\mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_{m-1}\}$ とおく。更に

$\mathcal{P}_i = \{p_{iu}, p_{iu+1}, \dots, p_{(i+1)u-1}\}$, $\mathcal{B}_j = \{B_{ju}, B_{ju+1}, \dots, B_{(j+1)u-1}\}$ ($0 \leq i, j \leq m-1$) とする。点集合とブロック集合のこれらの番号付けに対応する \mathcal{D} の結合行列を

$$L = \begin{pmatrix} L_{0,0} & \dots & L_{0,m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{m-1,0} & \dots & L_{m-1,m-1} \end{pmatrix}$$

とする。ここで各 $L_{i,j}$ は各行、各列に 1 を高々 1 個含むような $\{0, 1\}$ 上の u 次の正方行列である。このとき

$$(*) \quad LL^T = L^T L = \begin{pmatrix} kE & \lambda J & \dots & \lambda J \\ \lambda J & kE & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda J \\ \lambda J & \dots & \lambda J & kE \end{pmatrix}.$$

注意 2.9 補題 2.8 で、 \mathcal{D} が maximal holes を持つ $\text{SDD}_\lambda[k, u, k+1]$ であるならば、 $L_{i,ih} = O$, ($0 \leq i \leq k$) であるような $h \in \text{Sym}\{0, 1, \dots, k\}$ が存在する。このとき、他のすべての $L_{i,j}$ は u 次の置換行列である。

このノートでは $\text{SDD}_\lambda[k, u, m]$ ($k \geq 2$, $u \geq 2$) を扱う。

§3 λ が奇数である $\text{SDD}_\lambda[2\lambda+1, 2, 2\lambda+2]$

この節では $\text{SDD}_\lambda[2\lambda+1, 2, 2\lambda+2]$ が maximal holes を持つか否かという問題について考える。

$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を $\text{SDD}_\lambda[k, u, m]$ とする。 $\Omega(\mathcal{D}) = \{\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_{m-1}\}$, $\Delta(\mathcal{D}) = \{\mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_{m-1}\}$ とする。更に $u = 2$, $m = k+1$ と仮定する。このとき $k = 2\lambda+1$, $m = 2\lambda+2$

$\mathcal{P}_0 = \{p_0, p_1\}$, $\mathcal{P}_1 = \{p_2, p_3\}, \dots, \mathcal{P}_{2\lambda+1} = \{p_{4\lambda+2}, p_{4\lambda+3}\}$,

$\mathcal{B}_0 = \{B_0, B_1\}$, $\mathcal{B}_1 = \{B_2, B_3\}, \dots, \mathcal{B}_{2\lambda+1} = \{B_{4\lambda+2}, B_{4\lambda+3}\}$ と \mathcal{D} の点とブ

ロックに番号を付ける。これらの番号付けに対応する \mathcal{D} の結合行列を $L = (l_{i,j})_{0 \leq i,j \leq 4\lambda+3}$ とする。また $L = (L_{r,s})_{0 \leq r,s \leq 2\lambda+1}$ とする。

$$\text{ここで } L_{r,s} = \begin{pmatrix} l_{2r,2s} & l_{2r,2s+1} \\ l_{2r+1,2s} & l_{2r+1,2s+1} \end{pmatrix}$$

次の補題は定理 3.2 の証明でしばしば用いられる。

補題 3.1 $0 < t < k = 2\lambda + 1$ を固定しておく。

(i) $0 \leq i_1 \neq i_2 \leq k$ とする。

$\{2i_1, 2i_1 + 1\} = \{r_1, r_2\}$, $\{2i_2, 2i_2 + 1\} = \{s_1, s_2\}$ とする。

$L_{i_1,t}, \dots, L_{i_1,k}, L_{i_2,t}, \dots, L_{i_2,k} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ とする。

このとき

$$l_{r_1,0}l_{s_1,0} + \dots + l_{r_1,t-1}l_{s_1,t-1} = 0 \implies l_{r_2,0}l_{s_2,0} + \dots + l_{r_2,t-1}l_{s_2,t-1} = 0$$

(ii) $0 \leq j_1 \neq j_2 \leq k$ とする。

$\{2j_1, 2j_1 + 1\} = \{r_1, r_2\}$, $\{2j_2, 2j_2 + 1\} = \{s_1, s_2\}$ とする。

$L_{t,j_1}, \dots, L_{k,j_1}, L_{t,j_2}, \dots, L_{k,j_2} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ とする。

このとき

$$l_{0,r_1}l_{0,s_1} + \dots + l_{t-1,r_1}l_{t-1,s_1} = 0 \implies l_{0,r_2}l_{0,s_2} + \dots + l_{t-1,r_2}l_{t-1,s_2} = 0$$

定理 3.2 λ が奇数のとき、すべての $\text{SDD}_\lambda[2\lambda + 1, 2, 2\lambda + 2]$ は maximal holes を持つ。

注意 3.3 $\text{SDD}_2[5, 2, 6]$ は maximal holes を持つ (計算機で調べた)。 $\lambda \geq 4$ が偶数のとき、 $\text{SDD}_\lambda[2\lambda + 1, 2, 2\lambda + 2]$ が maximal holes を持つかどうかかわかっていない。

§4 クラス正則 $\text{SDD}_\lambda[u\lambda + 1, u, u\lambda + 2]$ と generalized conference matrices

この節で述べられていることは、補題 4.2 と 定義 4.3 の一部を除いて [J] の中に書かれている。

補題 4.1 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を $\text{SDD}_\lambda[k, u, m]$ とする。 $\Omega = \Omega(\mathcal{D})$, $\Delta = \Delta(\mathcal{D})$ とおく。このとき \mathcal{D} の任意の自己同型写像 φ は Ω 上の置換と Δ 上の置換を導入する。すなわち、任意の $\mathcal{P}_0 \in \Omega$, $\mathcal{P}_0^\varphi \in \Omega$ で、任意の $\mathcal{B}_0 \in \Delta$, $\mathcal{B}_0^\varphi \in \Delta$ である。

Hine and Mavron [HM](1983) におけるのと同じ議論は次の補題を導く。

補題 4.2 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を $\text{SDD}_\lambda[k, u, m]$ ($k(k-1) = u(m-1)\lambda$, $m \geq$

$k \geq 2$) とする。 \mathcal{D} の自己同型群 G が $\Omega(\mathcal{D})$ と $\Delta(\mathcal{D})$ に自明に作用するとする。このとき G は \mathcal{P} と \mathcal{B} 上半正則に作用する。

定義 4.3 λ, k, u, m を $k(k-1) = u(m-1)\lambda$, $m \geq k \geq 2$ を満たす正の整数とする。 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を $\text{SDD}_\lambda[k, u, m]$ とし, G を \mathcal{D} 自己同型群とする。 G が $\Omega(\mathcal{D})$ と $\Delta(\mathcal{D})$ 上自明に作用するとき, 補題 4.2 より, G は \mathcal{P} と \mathcal{B} 上半正則に作用する。従って, G は各点クラスと各ブロッククラス上半正則に作用し, $|G|u$ である。特に, G が各点クラスと各ブロッククラス上正則に作用するとき, \mathcal{D} は G に関して **クラス正則 (class regular)** という。この場合 $|G| = u$

注意 4.4 クラス正則 $\text{SDD}_\lambda[k, u, k+1]$ ($k = u\lambda + 1$) は maximal holes を持つ。

命題 4.5 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を $\text{SDD}_\lambda[k, u, k+1]$ ($k = u\lambda + 1, u \geq 2$) とする。 $\Omega(\mathcal{D}) = \{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k\}$, $\Delta(\mathcal{D}) = \{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k\}$ とする。 \mathcal{D} が自己同型群 G に関してクラス正則とする ($\therefore |G| = u$)。各 $0 \leq i \leq k$ に対して, \mathcal{P}_i から 1 点 p_i を取り固定しておく。各 $0 \leq j \leq k$ に対して, \mathcal{B}_j から 1 ブロック B_j を取り固定しておく。この場合, 任意の $p \in \mathcal{P}_i$ と任意の $B \in \mathcal{B}_{i^h}$ に対して, $p \not I B$ ($0 \leq i \leq k$) であるような $h \in \text{Sym}\{0, 1, \dots, k\}$ が存在する。 $0 \leq i, j \leq k$ に対して

$$D_{i,j} = \{\varphi \in G \mid p_i \varphi I B_j\}$$

とおく。条件より, $|D_{i,j}| = \begin{cases} 1 & \text{もし } i^h \neq j, \\ 0 & \text{もし } i^h = j \end{cases}$ となる。

$D_{i,j} = \{\varphi_{i,j}\}$ ($0 \leq i, j \leq k$) とする。ここで, $\varphi_{i,i^h} = 0$ ($0 \leq i \leq k$) とする。

$$H = H(\mathcal{D}) = \begin{pmatrix} \varphi_{0,0} & \varphi_{0,1} & \cdots & \varphi_{0,k} \\ \varphi_{1,0} & \varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{k,0} & \varphi_{k,1} & \cdots & \varphi_{k,k} \end{pmatrix}$$

(H は群環 $\mathbb{Z}[G]$ 上の行列と考える。また, $0^{-1} = 0$ と定義する) とおく。このとき H は次の性質を満たす。

(i) $0 \leq i_1 \neq i_2 \leq k$ に対して

$$\varphi_{i_1,0} \varphi_{i_2,0}^{-1} + \varphi_{i_1,1} \varphi_{i_2,1}^{-1} + \cdots + \varphi_{i_1,k} \varphi_{i_2,k}^{-1} = \lambda G$$

(ii) $0 \leq j_1 \neq j_2 \leq k$ に対して

$$\varphi_{0,j_1}^{-1} \varphi_{0,j_2} + \varphi_{1,j_1}^{-1} \varphi_{1,j_2} + \cdots + \varphi_{k,j_1}^{-1} \varphi_{k,j_2} = \lambda G$$

この命題の逆が成り立つ。

命題 4.6 $u, \lambda \in \mathbb{N}$, $u \geq 2$, $k = u\lambda + 1$ とする。 G を位数 u の有限群とする。 $h \in \text{Sym}\{0, 1, \dots, k\}$, $\varphi_{i,j} \in G$ ($0 \leq i^h \neq j \leq k$), $\varphi_{i,i^h} = 0$ ($0 \leq i \leq k$) とし

$$H = \begin{pmatrix} \varphi_{0,0} & \varphi_{0,1} & \cdots & \varphi_{0,k} \\ \varphi_{1,0} & \varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{k,0} & \varphi_{k,1} & \cdots & \varphi_{k,k} \end{pmatrix}$$

が命題 4.5 の (i),(ii) を満足するとする。

$\mathcal{P} = \{(i, \alpha) \mid 0 \leq i \leq k, \alpha \in G\}$, $\mathcal{B} = \{[j, \alpha] \mid 0 \leq j \leq k, \alpha \in G\}$ とおく。

各 $0 \leq i \leq k$ に対して, $\mathcal{P}_i = \{(i, \alpha) \mid \alpha \in G\}$,

各 $0 \leq j \leq k$ に対して, $\mathcal{B}_j = \{[j, \alpha] \mid \alpha \in G\}$ とおく。

このとき

\mathcal{P} と \mathcal{B} の結合関係を

$$\begin{aligned} 0 \leq i \leq k, \alpha, \beta \in G \text{ に対して, } (i, \alpha) I [i^h, \beta] \\ 0 \leq i^h \neq j \leq k \text{ に対して, } (i, \alpha) I [j, \beta] \iff \alpha\beta^{-1} = \varphi_{i,j} \end{aligned}$$

と定義すると, $\mathcal{D} = \mathcal{D}(H) = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ は点クラス $\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_k$, ブロッククラス $\mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_k$ を持ち, maximal holes を持つ $\text{SDD}_\lambda[k, u, k+1]$ ($k = u\lambda + 1, u \geq 2$) になる。

更に, 任意の $\alpha \in G$ に対して, $\mathcal{P} \cup \mathcal{B}$ 上の置換 f_α を

$$(i, \beta)^{f_\alpha} = (i, \beta\alpha), \quad [j, \gamma]^{f_\alpha} = [j, \gamma\alpha]$$

と定義すると, f_α は \mathcal{D} の自己同型写像になる。 G の $\mathcal{P} \cup \mathcal{B}$ 上のこの作用は忠実になるので f_α を単に α と書くことにする。 \mathcal{D} は G に関してクラス正則になる。

注意 4.7 命題 4.5 の行列 H に対して, $\mathcal{D}(H)$ は命題 4.5 の \mathcal{D} に同型になる。何故なら, $p_i^\alpha \longleftrightarrow (i, \alpha)$, $B_j^\beta \longleftrightarrow [j, \beta]$ と対応させると, $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}(H)$ が言える。従って, クラス正則 $\text{SDD}_\lambda[k, u, k+1]$ ($k = u\lambda + 1, u \geq 2$) を見つけるためには, 位数 u の群 G に対して命題 4.5 の (i),(ii) を満たす $G \cup \{0\}$ 上の $k+1$ 次の正方行列 A を見つければよい。しかしながら条件 (ii) は必要でないことが [J] の 6.7 Theorem でより一般的に示されている。

定義 4.8 $u, \lambda \in \mathbb{N}$, $u \geq 2$, $k = u\lambda + 1$ とする。
 G を位数 u の積を乗法記号で書かれた有限群とする。
 $h \in \text{Sym}\{0, 1, \dots, k\}$ とする。

$\varphi_{i,j} \in G$ ($0 \leq i^h \neq j \leq k$), $\varphi_{i,i^h} = 0$ ($0 \leq i \leq k$) とし

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_{0,0} & \varphi_{0,1} & \cdots & \varphi_{0,k} \\ \varphi_{1,0} & \varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{k,0} & \varphi_{k,1} & \cdots & \varphi_{k,k} \end{pmatrix}$$

(A は群環 $\mathbb{Z}[G]$ 上の行列と考える。また, $0^{-1} = 0$ と定義する) とおく。
 A が次の条件を満たすとき, A を **指数 λ の generalized conference matrix**,
 あるいは簡単に $GC(G; \lambda)$ という。(A は $|G|\lambda + 2$ 次の正方行列であることに
 注意せよ。) $0 \leq i_1 \neq i_2 \leq k$ に対して

$$\varphi_{i_1,0}\varphi_{i_2,0}^{-1} + \varphi_{i_1,1}\varphi_{i_2,1}^{-1} + \cdots + \varphi_{i_1,k}\varphi_{i_2,k}^{-1} = \lambda G$$

命題 4.9 $u, v, \lambda \in \mathbb{N}$, $u \geq v \geq 2$, $k = u\lambda + 1$ とする。

G, K をそれぞれ位数 u, v の有限群で $f : G \rightarrow K$ を上への準同型写像とする。
 このとき $A = (\varphi_{i,j})_{0 \leq i,j \leq k}$ を $GC(G; \lambda)$ とすると, $B = (\varphi_{i,j}^f)_{0 \leq i,j \leq k}$ は
 $GC(K; u\lambda/v)$ である。

§5 maximal holes を持つ $SDD_\lambda[k, u, k+1]$ の自己同型写像と maximal holes を持つ 2 つの $SDD_\lambda[k, u, k+1]$ の同型判定

$u, \lambda \in \mathbb{N}$, $u \geq 2$, $k = u\lambda + 1$ とする。 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を maximal holes を持つ
 $SDD_\lambda[k, u, k+1]$ とする。この節では \mathcal{D} の自己同型写像について考える。
 $\Omega = \Omega(\mathcal{D}) = \{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k\}$, $\Delta = \Delta(\mathcal{D}) = \{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k\}$ とする。 \mathcal{D} の
 maximal holes を $(\mathcal{P}_i, \mathcal{B}_i)$ ($0 \leq i \leq k$) とする。 $0 \leq i, j \leq k$ に対して,
 $\mathcal{P}_i = \{p_{iu}, p_{iu+1}, \dots, p_{iu+(u-1)}\}$, $\mathcal{B}_j = \{B_{ju}, B_{ju+1}, \dots, B_{ju+(u-1)}\}$ とする。
 Φ を u 次の置換行列全体からなる集合とする。このような点とブロックの番号
 付けに対応する \mathcal{D} の結合行列を

$$L = \begin{pmatrix} L_{0,0} & \cdots & L_{0,k} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{k,0} & \cdots & L_{k,k} \end{pmatrix}$$

とする。ここで, $L_{i,i} = O$ ($0 \leq i \leq k$), $L_{i,j} \in \Phi$ ($0 \leq i \neq j \leq k$)
 各点クラス, 各ブロッククラス でそれぞれの点とブロックの番号を適当に打ち
 変えて, $L_{i,0} = E$ ($1 \leq i \leq k$), $L_{0,j} = E$ ($1 \leq j \leq k$), $L_{1,2} = E$ としてよい。

定義 5.1 $S = \{0, 1, \dots, k\}$ とおく。 $f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & k \\ f(0) & f(1) & \cdots & f(k) \end{pmatrix} \in$
 $\text{Sym } S$ とし, $X_0, X_1, \dots, X_k \in \Phi$ とする。このとき

$$(i) (f, (X_0, X_1, \dots, X_k)) = \begin{pmatrix} X_{0,0} & \dots & X_{0,k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ X_{k,0} & \dots & X_{k,k} \end{pmatrix} \text{を}$$

$X_{i,j} = \begin{cases} X_i & \text{もし } j = f(i), \\ O & \text{その他} \end{cases}$ と定義する。ここで O は $u \times u$ 型の零行列である。

$$(ii) (f, \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} X_{0,0} & \dots & X_{0,k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ X_{k,0} & \dots & X_{k,k} \end{pmatrix} \text{を } X_{i,j} = \begin{cases} X_j & \text{もし } i = f(j), \\ O & \text{その他} \end{cases}$$

定義する。ここで O は $u \times u$ 型の零行列である。 \mathcal{D} の任意の自己同型写像は

$$(f, (X_0, X_1, \dots, X_k))L(g, \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{pmatrix}) = L$$

を満たす $(f, g, X_0, X_1, \dots, X_k, Y_0, Y_1, \dots, Y_k) \in \text{Sym } S \times \text{Sym } S \times \underbrace{\Phi \times \dots \times \Phi}_{2(k+1)}$

で与えられる。上の等式は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} X_0 L_{f(0),g(0)} Y_0 & X_0 L_{f(0),g(1)} Y_1 & \dots & X_0 L_{f(0),g(k)} Y_k \\ X_1 L_{f(1),g(0)} Y_0 & X_1 L_{f(1),g(1)} Y_1 & \dots & X_1 L_{f(1),g(k)} Y_k \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ X_k L_{f(k),g(0)} Y_0 & X_k L_{f(k),g(1)} Y_1 & \dots & X_k L_{f(k),g(k)} Y_k \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} L_{0,0} & L_{0,1} & \dots & L_{0,k} \\ L_{1,0} & L_{1,1} & \dots & L_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ L_{k,0} & L_{k,1} & \dots & L_{k,k} \end{pmatrix}$$

従って、任意の $0 \leq i \leq k$ に対して、 $L_{i,i} = O$ 故 $X_i L_{f(i),g(i)} Y_i = O$

$$\therefore L_{f(i),g(i)} = O \therefore f(i) = g(i) \therefore f = g$$

$$X_i L_{f(i),f(j)} Y_j = L_{i,j} \quad (0 \leq i, j \leq k)$$

$$1 \leq i \leq k \text{ に対して, } X_i L_{f(i),f(0)} Y_0 = E \therefore X_i = Y_0^{-1} L_{f(i),f(0)}^{-1}$$

$$1 \leq j \leq k \text{ に対して, } X_0 L_{f(0),f(j)} Y_j = E \therefore Y_j = L_{f(0),f(j)}^{-1} X_0^{-1}$$

$$\therefore 1 \leq i, j \leq k \text{ に対して, } Y_0^{-1} L_{f(i),f(0)}^{-1} L_{f(i),f(j)} L_{f(0),f(j)}^{-1} X_0^{-1} = L_{i,j}$$

$$\text{特に, } Y_0^{-1} L_{f(1),f(0)}^{-1} L_{f(1),f(2)} L_{f(0),f(2)}^{-1} X_0^{-1} = L_{1,2} = E$$

$$\therefore X_0^{-1} = L_{f(0),f(2)} L_{f(1),f(2)}^{-1} L_{f(1),f(0)} Y_0$$

$$\therefore Y_0^{-1} L_{f(i),f(0)}^{-1} L_{f(i),f(j)} L_{f(0),f(j)}^{-1} L_{f(0),f(2)} L_{f(1),f(2)}^{-1} L_{f(1),f(0)} Y_0$$

$= L_{i,j}$ ($1 \leq i, j \leq k$) こうして、次の定理を得る。

定理 5.2 $u, \lambda \in \mathbb{N}$, $u \geq 2$, $k = u\lambda + 1$ とする。

$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を maximal holes を持つ $\text{SDD}_\lambda[k, u, k+1]$ とする。 $\Omega = \Omega(\mathcal{D}) = \{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k\}$, $\Delta = \Delta(\mathcal{D}) = \{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k\}$ とする。 $0 \leq i, j \leq k$ に対して、 $\mathcal{P}_i = \{p_{iu}, p_{iu+1}, \dots, p_{iu+(u-1)}\}$, $\mathcal{B}_j = \{B_{ju}, B_{ju+1}, \dots, B_{ju+(u-1)}\}$ とする。 Φ を u 次の置換行列全体からなる集合とする。このような点とブロックの番号付けに対応する \mathcal{D} の結合行列を

$$L = \begin{pmatrix} L_{0,0} & \dots & L_{0,k} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{k,0} & \dots & L_{k,k} \end{pmatrix}$$

とする。ここで $L_{i,i} = O$ ($0 \leq i \leq k$), $L_{i,j} \in \Phi$ ($0 \leq i \neq j \leq k$) 各 point classes, 各 block classes でそれぞれの点とブロックの番号を適当に打ち変えて、 $L_{i,0} = E$ ($1 \leq i \leq k$), $L_{0,j} = E$ ($1 \leq j \leq k$), $L_{1,2} = E$ としてよい。このとき \mathcal{D} の任意の自己同型写像は

$$Y_0^{-1} L_{f(i),f(0)}^{-1} L_{f(i),f(j)} L_{f(0),f(j)}^{-1} L_{f(0),f(2)} L_{f(1),f(2)}^{-1} L_{f(1),f(0)} Y_0 = L_{i,j} \quad (1 \leq i, j \leq k)$$

を満たす $(f, Y_0) \in \text{Sym}\{0, 1, \dots, k\} \times \Phi$ で与えられる。

定理 5.3 $u, \lambda \in \mathbb{N}$, $u \geq 2$, $k = u\lambda + 1$ とする。 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$, $\mathcal{D}' = (\mathcal{P}', \mathcal{B}', I')$ を maximal holes を持つ 2 つの $\text{SDD}_\lambda[k, u, k+1]$ とする。 Φ を u 次の置換行列全体からなる集合とする。 \mathcal{D} , \mathcal{D}' の結合行列をそれぞれ

$$L = \begin{pmatrix} L_{0,0} & \dots & L_{0,k} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{k,0} & \dots & L_{k,k} \end{pmatrix}, \quad L' = \begin{pmatrix} L_{0,0}' & \dots & L_{0,k}' \\ \vdots & & \vdots \\ L_{k,0}' & \dots & L_{k,k}' \end{pmatrix}$$

とする。ここで $L_{i,i} = O$ ($0 \leq i \leq k$), $L_{i,j} \in \Phi$ ($0 \leq i \neq j \leq k$), $L_{1,2} = E$, $L_{i,i}' = O$ ($0 \leq i \leq k$), $L_{i,j}' \in \Phi$ ($0 \leq i \neq j \leq k$), $L_{1,2}' = E$ とする。

このとき \mathcal{D} と \mathcal{D}' が同型であるための必要十分条件は

$$Y_0^{-1} L_{f(i),f(0)}^{-1} L_{f(i),f(j)} L_{f(0),f(j)}^{-1} L_{f(0),f(2)} L_{f(1),f(2)}^{-1} L_{f(1),f(0)} Y_0 = L_{i,j}' \quad (1 \leq i, j \leq k)$$

を満たす $(f, Y_0) \in \text{Sym}\{0, 1, \dots, k\} \times \Phi$ が存在することである。

§6 generalized conference matrices の同値判定

定義 6.1 G を位数 $u (\geq 2)$ の有限群, λ を正の整数とする。 H, K を $GC(G; \lambda)$ とする。このとき

H と K は同値である ($H \sim K$ と書く)。 $\iff \mathcal{D}(H) \cong \mathcal{D}(K)$

と定義する。

命題 6.2 G を位数 $u(\geq 2)$ の有限群, λ を正の整数とする。 $\Phi = \Phi(G, \lambda)$ を $GC(G; \lambda)$ の全体からなる集合とする。このとき, \sim は Φ 上の同値関係である。

命題 6.3 G を位数 $u(\geq 2)$ の有限群, λ を正の整数とする。 $k = u\lambda + 1$ とする。 $H = (\varphi_{i,j})_{0 \leq i,j \leq k}$ を $GC(G; \lambda)$ とする。

- (i) K を H に任意の行の入れ替えを施して得られる行列とすると, K は $GC(G; \lambda)$ で, H と K は同値である。
- (ii) K を H に任意の列の入れ替えを施して得られる行列とすると, K は $GC(G; \lambda)$ で, H と K は同値である。
- (iii) K を H の**固定された任意の行**の各成分に, 固定された G の任意の元を**左から乗じて**得られる行列とすると, K は $GC(G; \lambda)$ で, H と K は同値である。
- (iv) K を H の**固定された任意の列**の各成分に, 固定された G の任意の元を**右から乗じて**得られる行列とすると, K は $GC(G; \lambda)$ で, H と K は同値である。
- (v) $\rho \in \text{Aut } G$ とする。すなわち, $\rho : G \rightarrow G$ は全単射写像で, 任意の $\alpha, \beta \in G$ に対して, $(\alpha\beta)^\rho = \alpha^\rho\beta^\rho$ とする。また, $0^\rho = 0$ と定義して ρ を $G \cup \{0\}$ 上の全単射写像に拡張する。このとき, $\tau_{i,j} = \varphi_{i,j}^\rho$ ($0 \leq i, j \leq k$) とおき, $K = (\tau_{i,j})_{0 \leq i,j \leq k}$ と定義すると, K は $GC(G; \lambda)$ で, H と K は同値である。

定義 6.4 G を位数 $u(\geq 2)$ の有限群, λ を正の整数とする。 $k = u\lambda + 1$ とする。 $H = (\varphi_{i,j})_{0 \leq i,j \leq k}$ を $GC(G; \lambda)$ とする。このとき, $\varphi_{i,i} = 0$ ($0 \leq i \leq k$), $\varphi_{i,0} = \varphi_{0,j} = 1$ ($1 \leq i, j \leq k$), $\varphi_{1,2} = 1$ であるならば, H は**正規化**されているという。

命題 6.5 任意の generalized conference matrix は, ある正規化された generalized conference matrix に同値である。

補題 6.6 G を位数 u の有限群とする。 Φ を u 次の置換行列の全体とする (Φ は行列の積に関して群をなす)。 G の元に順番を付け, それを固定しておく。 $G = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{u-1}\}$ 任意の $\varphi \in G$ に関して, $p(\varphi) = (p(\varphi)_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in G} \in \Phi$ を次のように定義する。

$$p(\varphi)_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1 & \text{もし } \alpha = \varphi\beta \\ 0 & \text{もし } \alpha \neq \varphi\beta \end{cases}$$

このとき, $p : G \ni \varphi \mapsto p(\varphi) \in \Phi$ は単射準同型写像である。

次の定理と系は, コンピュータを使って GC の同値性の判定したり, GC に対応する SDD の全自己同型群を計算するとき, 有用である。

定理 6.7 G を位数 $u(\geq 2)$ の有限群, λ を正の整数とする。 $k = u\lambda + 1$ と

する。 $H = (\varphi_{i,j})_{0 \leq i,j \leq k}$ と $K = (\tau_{i,j})_{0 \leq i,j \leq k}$ を共に正規化された $GC(G; \lambda)$ とする。 $S = \{0, 1, \dots, k\}$ とする。 このとき

H と K は同値である。

$$\begin{aligned} &\iff \varphi_{f(i),f(0)}^{-1} \varphi_{f(i),f(j)} \varphi_{f(0),f(j)}^{-1} \varphi_{f(0),f(2)} \varphi_{f(1),f(2)}^{-1} \varphi_{f(1),f(0)} \\ &= m(\tau_{i,j}) \quad (1 \leq i, j \leq k) \end{aligned}$$

を満たす $(f, m) \in \text{Sym } S \times \text{Aut } G$ が存在する。

系 6.8 G を位数 $u (\geq 2)$ の有限群, λ を正の整数とする。 $k = u\lambda + 1$ とする。 $H = (\varphi_{i,j})_{0 \leq i,j \leq k}$ を正規化された $GC(G; \lambda)$ とする。

$$S = \{0, 1, \dots, k\},$$

$$\Lambda = \{f \in \text{Sym } S \mid \varphi_{f(i),f(0)}^{-1} \varphi_{f(i),f(j)} \varphi_{f(0),f(j)}^{-1} \varphi_{f(0),f(2)} \varphi_{f(1),f(2)}^{-1} \varphi_{f(1),f(0)} = m(\varphi_{i,j}) \quad (1 \leq i, j \leq k) \text{ for some } m \in \text{Aut } G\}$$

このとき, $|\text{Aut } \mathcal{D}(H)| = |\Lambda|u$

§7 $GC(G; \lambda)$ の2つの型

この節では, G が有限アーベル群あるとき, $GC(G; \lambda)$ が2つの型を持つことを述べる。 このことは [IK] の 6.29 定理で書かれている。

補題 7.1 G を有限アーベル群とすると,

$$\prod_{x \in G} x = \begin{cases} 1 & \text{もし } |G| = \text{奇数} \text{ または } |I(G)| > 1, \\ \alpha & \text{もし } I(G) = \{\alpha\} \end{cases}$$

この補題を使って次の定理を証明することが出来る。

定理 7.2 ([IK] の 6.29 定理) G を位数 u のアーベル群とする。 $H = (\varphi_{i,j})_{0 \leq i,j \leq k}$ を正規化された $GC(G; \lambda)$ ($k = u\lambda + 1$) とする。 このとき任意の $0 \leq i \neq j \leq k$ に対して

$$\varphi_{j,i} = \begin{cases} \alpha \varphi_{i,j} & \text{もし } \lambda = \text{奇数}, I(G) = \{\alpha\}, \\ \varphi_{i,j} & \text{その他} \end{cases}$$

系 7.3 G を位数 u のアーベル群とする。 $H = (\varphi_{i,j})_{0 \leq i \neq j \leq k}$ を上の $GC(G; \lambda)$ ($k = u\lambda + 1$) とする。 このとき任意の $0 \leq i \neq j \leq k$ に対して

$$\varphi_{j,i} = \begin{cases} \alpha(\varphi_{0,i}\varphi_{j,0})\varphi_{i,j}(\varphi_{i,0}\varphi_{0,j})^{-1} & \text{もし } \lambda = \text{奇数}, I(G) = \{\alpha\}, \\ (\varphi_{0,i}\varphi_{j,0})\varphi_{i,j}(\varphi_{i,0}\varphi_{0,j})^{-1} & \text{その他} \end{cases}$$

命題 7.4 G を位数 u のアーベル群とする。 $H = (\varphi_{i,j})_{0 \leq i,j \leq k}$ を正規化された $GC(G; \lambda)$ とする。 u 次の行列 $L_{i,j}$ ($0 \leq i, j \leq u-1$) と p を補題 6.6 に

おけるように決めておく。このとき

- (i) $1 \leq i \neq j \leq k$ に対して,
 $\lambda = \text{奇数}$ で $I(G) = \alpha$ のとき, $L_{i,j} = p(\varphi_{i,j}) = p(\alpha)p(\varphi_{j,i}) = p(\alpha)L_{j,i}$
 $\lambda = \text{偶数}$ または $|I(G)| \neq 1$ のとき, $L_{i,j} = p(\varphi_{i,j}) = p(\varphi_{j,i}) = L_{j,i}$
(ii) $|G| = 2$ で $I(G) = \{\alpha\}$ のとき
 $\lambda = \text{奇数}$ ならば, $L_{i,j} = p(\alpha)L_{j,i}^T$ ($1 \leq i \neq j \leq k$)
 $\lambda = \text{偶数}$ ならば, $L_{i,j} = L_{j,i}^T$ ($1 \leq i \neq j \leq k$)
従って $\mathcal{D}(H)$ は self dual である。

補題 8.2 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を maximal holes を持つ $\text{SDD}_\lambda[2\lambda, 2, 2\lambda+2]$, $k = 2\lambda + 1$ とする。(補題 8.1 より \mathcal{D} はクラス正則である。) $H = (\varphi_{i,j})_{0 \leq i,j \leq k}$ を \mathcal{D} に対応する $\varphi_{i,0} = \varphi_{0,j} = 0$ ($1 \leq i, j \leq k$) である $GC(\mathbb{Z}_2; \lambda)$ (位数 2 の群 $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ の演算は加法的に書く) とする (ただし, $\varphi_{1,2}$ は 0 でも 1 でもよい)。ここで $\varphi_{i,j} \in \mathbb{Z}_2$ ($0 \leq i \neq j \leq k$), また $0^* = 1, 1^* = 0$ と定義する。このとき

- (i) $\lambda = \text{奇数}$ のとき
- 任意の異なる $0 \leq i, j \leq k$ に対して $\varphi_{i,j}^* = \varphi_{j,i}$
 - $\varphi_{i,i} \in \mathbb{Z}_2$ を

$$\varphi_{i,i} = \begin{cases} 0 & \text{もし } i = 0, \\ 1 & \text{もし } 1 \leq i \leq k \end{cases}$$

と定義しなおすと, $H = (\varphi_{i,j})_{0 \leq i,j \leq k}$ は \mathbb{Z}_2 上のアダマール行列になる。更に

$$f_{i,j} = \begin{cases} +1 & \text{もし } j = 0, \\ +1 & \text{もし } j \neq 0, 0 \leq i \leq k, \varphi_{i,j} = 1 \\ -1 & \text{もし } j \neq 0, 0 \leq i \leq k, \varphi_{i,j} = 0 \end{cases}$$

と定義すると $F = F(H) = (f_{i,j})_{0 \leq i,j \leq k}$ は $\{+1, -1\} (\subseteq \mathbb{C})$ 上の歪対称アダマール行列になる。

- (ii) $\lambda = \text{偶数}$ のとき
任意の異なる $0 \leq i, j \leq k$ に対して $\varphi_{i,j} = \varphi_{j,i}$

補題 8.3 $\lambda = \text{奇数}$, $k = 2\lambda + 1$ とする。 $F = (f_{i,j})_{0 \leq i,j \leq k}$ を $f_{i,0} = +1$ ($0 \leq i \leq k$), $f_{0,j} = -1$ ($1 \leq j \leq k$) である位数 $k+1$ の歪対称アダマール行列とする。このとき, \mathbb{Z}_2 上の $k+1$ 次の正方行列 $H = (\varphi_{i,j})_{0 \leq i \neq j \leq k}$ を次のように定義すると, H は $GC(\mathbb{Z}_2; \lambda)$ である。 $0 \leq i \neq j \leq k$ に対して

$$\varphi_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{もし } j = 0, 1 \leq i \leq k \\ 0 & \text{もし } 0 \leq i \neq j \leq k, j \neq 0, f_{i,j} = -1 \\ 1 & \text{もし } 0 \leq i \neq j \leq k, j \neq 0, f_{i,j} = +1 \end{cases}$$

例 8.4 $GC(\mathbb{Z}_2; 7)$

$$H = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & * & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & * & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & * & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & * & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & * & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & * & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & * & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & * & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & * & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & * & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & * \end{pmatrix}$$

(H から自然に $SDD_7[15, 2, 16]$ が定義される) に対応する位数 16 の歪対称アダマール行列は

$$F = \begin{pmatrix} + & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ + & + & - & - & - & - & - & - & + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & - & - & - & + & + & + & - & - & - & - & + & + & + \\ + & + & + & - & + & - & - & + & + & - & + & - & + & - & - & - \\ + & + & + & - & + & + & + & - & - & + & - & + & - & + & - & - \\ + & + & - & + & + & - & + & - & + & + & + & - & - & - & - & + \\ + & + & - & + & - & + & + & + & - & - & + & - & + & + & - & - \\ + & - & + & + & + & - & - & + & - & + & + & - & - & + & + & - \\ + & - & + & + & - & + & - & - & + & - & + & + & - & + & - & + \\ + & - & + & + & - & - & + & + & - & + & - & + & + & - & - & + \\ + & - & - & + & - & + & - & + & - & - & + & - & - & + & + & - \\ + & - & - & - & + & + & + & + & - & - & + & + & - & - & + & + \\ + & - & - & - & + & + & - & + & + & + & - & - & + & + & - & + \end{pmatrix}$$

である。ここで簡単のため $+1 = +$, $-1 = -$ と書いた。非同値な $GC(\mathbb{Z}_2; 7)$ は 1 個で、それは H である。非同値な位数 16 の歪対称アダマール行列は 2 個でそれらは F と F^T である。

§9 位数 n の射影平面と $SDD_1[n, n-1, n+1]$

定理 9.1 $\pi = (\mathcal{Q}, \mathcal{L}, J)$ を位数 n の有限射影平面とする。 $(r_\infty, L_\infty) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{L}$ を anti-flag, すなわち $r_\infty \not\perp L_\infty$ とする。 π の部分結合構造 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} (L_\infty) &= \{r_0, r_1, \dots, r_n\}, \\ (r_\infty) &= \{L_0 = r_0 r_\infty, L_1 = r_1 r_\infty, \dots, L_n = r_n r_\infty\}, \\ \mathcal{P}_i &= (L_i) \setminus \{r_i, r_\infty\}, \mathcal{B}_j = (r_j) \setminus \{L_j, L_\infty\} \quad (0 \leq i, j \leq n), \\ \mathcal{P} &= \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1 \cup \dots \cup \mathcal{P}_n, \mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_n, \end{aligned}$$

$$I = (\mathcal{P} \times \mathcal{B}) \cap J$$

このとき, \mathcal{D} は点クラスの集合 $\Omega = \{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n\}$, ブロッククラスの集合 $\Delta = \{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n\}$ を持つ $\text{SDD}_1[n, n-1, n+1]$ である。また任意の $p \in \mathcal{P}_i$ に対して, $(p) \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$, 任意の $B \in \mathcal{B}_j$ に対して, $(B) \cap \mathcal{P}_i = \emptyset$ ($0 \leq i, j \leq n$) が成り立つ。この \mathcal{D} を anti-flag (r_∞, L_∞) に関する $\text{SDD}_1[n, n-1, n+1]$ という。

定理 9.1 の逆が成り立つ。

定理 9.2 $n(\geq 2)$ を正整数とし, $\text{SDD}_1[n, n-1, n+1]$ とする。 $\Omega = \Omega(\mathcal{D}) = \{\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_n\}$, $\Delta = \Delta(\mathcal{D}) = \{\mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_n\}$ とする。また, \mathcal{D} は maximal holes $(\mathcal{P}_i, \mathcal{B}_i)$ ($0 \leq i \leq n$) を持つとする。 \mathcal{D} を部分構造として含む結合構造 $\pi = (\mathcal{Q}, \mathcal{L}, J)$ を次のように定義する。 $r_0, \dots, r_n, r_\infty, L_0, \dots, L_n, L_\infty$ を $\mathcal{P} \cup \mathcal{B}$ に属さない $2(n+2)$ 個の記号とする。 $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cup \{r_0, \dots, r_n, r_\infty\}$, $\mathcal{L} = \mathcal{B} \cup \{L_0, \dots, L_n, L_\infty\}$ とおく。 I を含む $\mathcal{Q} \times \mathcal{L}$ の部分集合 J を次のように与える。

$$p \in \mathcal{P}, L \in \mathcal{B} \text{ のとき, } pJL \iff pIL$$

$$p \in \mathcal{P} \text{ のとき, } pJL_i \iff p \in \mathcal{P}_i \text{ (} 0 \leq i \leq n \text{)}$$

$$L \in \mathcal{B} \text{ のとき, } r_jJL \iff L \in \mathcal{B}_j \text{ (} 0 \leq j \leq n \text{)}$$

$$r_iJL_j \text{ (} 0 \leq i, j \leq n \text{)} \iff i = j$$

$$r_\inftyJL_i \text{ (} 0 \leq i \leq n \text{)}$$

$$r_jJL_\infty \text{ (} 0 \leq j \leq n \text{)}$$

$$r_\infty \not J L_\infty$$

このとき, π は位数 n の射影平面である。

命題 9.3 $n \geq 2$ を正整数で, $\pi = (\mathcal{Q}, \mathcal{L}, J)$ を位数 $n(\geq 2)$ の射影平面とする。 $(r_\infty, L_\infty) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{L}$ を固定された π の anti-flag とする。 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を π の部分結合構造で, (r_∞, L_∞) に関する $\text{SDD}_1[n, n-1, n+1]$ とする。 \mathcal{D} の点クラスからなる集合, ブロッククラスからなる集合をそれぞれ Ω, Δ とする。このとき

(i) $f : (\text{Aut } \pi)_{r_\infty, L_\infty} \ni \varphi \mapsto \varphi|_{\mathcal{P} \cup \mathcal{B}} \in \text{Aut } \mathcal{D}$ は上への同型写像になる。

(ii) G を π の (r_∞, L_∞) -homology group とすると, G^f は $\Omega \cup \Delta$ 上自明に作用する。 ($\therefore G^f$ は $\mathcal{P} \cup \mathcal{B}$ 上半正則に作用する。)

(iii) H を $\text{Aut } \mathcal{D}$ の部分群で $\Omega \cup \Delta$ 上自明に作用すると, $H^{f^{-1}}$ は (r_∞, L_∞) -homology group である。

§10 $GC(\mathbb{Z}_2; \lambda)$ ($1 \leq \lambda \leq 11$) の分類

E. Spence [S](1995) は位数 $4l$ ($l = 1, 2, \dots, 7$) の非同値な歪対称アダマール行列がそれぞれ $1, 1, 1, 2, 2, 15, 54$ 個あることを示した。この節では $GC(\mathbb{Z}_2; \lambda)$ ($\lambda = 1, 2, \dots, 11$) の非同値類とそれらの全自己同型群を決定する。なお $GC(\mathbb{Z}_2; \lambda)$ ($\lambda = 1, 3, 5, 7, 9, 11$) は位数 $4, 8, 12, 16, 20, 24$ の歪対称アダマール行列に対応することを注意しておく。これらの計算のために定理 6.7

と系 6.8 を用いた。

表 10.1

λ	$k = 2\lambda + 1$	$GC(\mathbb{Z}_2; \lambda)$ の個数	全自己同型群の位数
1	3	1	48
2	5	1	240
3	7	1	672
4	9	1	2880
5	11	1	2640
6	13	1	4368
7	15	1	672
8	17	1	9792
9	19	2	240,13680
10	21	0	
11	23	9	

注意 10.2 (i) 定理 2.2 より, 表 10.1 は $\lambda = 1, 3, 5, 7, 9$ のとき, $SDD_\lambda[2\lambda + 1, 2, 2\lambda + 2]$ の分類も与えていることを注意しておく。
(ii) $\lambda = 11$ の場合の 9 個の GC に対応する SDD の全自己同型群の位数は, それぞれ 40,12,24,16,16,24,48,2640,24288 である。

参考文献

- [HM] T. C. Hine and V. C. Mavron, Translations of symmetric and complete nets, *Math. Z.* **182**, (1983), 237-244.
- [IK] Y. J. Ionin and H. Kharaghani, Balanced generalized weighing matrices and conference matrices, in *Handbook of Combinatorial Designs, 2nd ed.*, C. J. Colbourn and J. H. Dinitz (eds.), Boca Raton, CRC Press(2007), 306–313.
- [J] D. Jungnickel, On automorphism groups of divisible designs, *Canad. J. Math.* **34**(1982), 257-297.
- [S] E. Spence, Classification of Hadamard matrices of order 24 and 28, *Discrete Math.* **140**(1995), 185-243.