Defect groups, inertial quotients and fixed point algebras

千葉大学大学院理学研究院　　音喜多 純拓
Yoshihiro Otokita
Graduate School of Science,
Chiba University

概要

本稿は RIMS 共同研究（公開型）「代数的組合せ論と関連する群と代数の研究」（2018 年 12 月）における講演内容の要約と補足である．

以下では G を有限群とする．Maróti [1] はその共役類全体の集合 $\mathrm{Cl}(G)$ について，次の定理を示した：

Maróti (2016)

$|G|$ の最大素因数 p に対し，$2\sqrt{p-1} \leq |\mathrm{Cl}(G)|$.

これは有限群論の結果であるが，一方でこの不等式の右辺は環論的に解釈することもできる．kG を係数体 k 上の群環とすると，その中心 $\mathcal{Z}$ の次元は $|\mathrm{Cl}(G)|$ である．そこで本研究では k の標数，G の構造と $\mathcal{Z}$ の関係性を明らかにし，上の不等式を別の視点から精密化することを目標とする．特に本稿では G の Sylow 部分群と $\mathcal{Z}$ の Loewy 列に関する新たな結果を紹介する．なお，タイトルに含まれている「不足群（defect group）」,「惰性商群（inertial quotient）」,「固定点代数（fixed point algebra）」は主定理の証明に用いる特別な群，環の名称である．

1　Masckheの定理

ここでは群環 kG とその中心 $\mathcal{Z}$ の基本的な性質を述べる．

各共役類 $C \in \mathrm{Cl}(G)$ に対し，その元の kG における和を $\hat{C}$ とする．このとき $\{\hat{C} \mid C \in \mathrm{Cl}(G)\}$ は $\mathcal{Z}$ の基底となり，したがって次元は $|\mathrm{Cl}(G)|$ と一致する．この値は k の選び方とは無関係である．一方，$\mathcal{Z}$ の環論的構造は k の標数に依存しており，それを端的に示すのが次の Masckhe の定理である．以下では一般の環 Λ に対し，その Jacobson 根基を $\mathrm{rad}\,\Lambda$ とする．

定理 1.1 (Masckhe の定理). 以下は同値である．

(1) k の標数が 0，または正標数で $|G|$ と素である，

(2) $\mathrm{rad}\ kG = \{0\}$,

(3) $\mathrm{rad}\ \mathcal{Z} = \{0\}$.

この定理より k の標数が $|G|$ の素因数のときに $\mathrm{rad}\ \mathcal{Z}$ は非自明なイデアルとなり，これが本研究の考察対象である．

2 中心指標

k が特別な体の場合には $\mathcal{Z}$ の指標を用いて $\mathrm{rad}\ \mathcal{Z}$ を特徴付けることができる．講演では述べなかったが，重要な性質なので本章で紹介する．

ここでは p を素数，R を複素数体 $\mathbb{C}$ における代数的整数環とする．単項イデアル pR を含む R の極大イデアル $\mathfrak{p}$ を固定すると，剰余体 $k = R/\mathfrak{p}$ は標数 p を持つ．また $* : R \to k$ を自然な環準同型写像とする．

各既約指標 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対し，

$$\omega_\chi(\hat{C}) := |C|\chi(x)/\chi(1) \qquad (\text{ただし } x \in C)$$

とすると，この値は指標理論の基本定理により代数的整数であるから，多元環準同型写像

$$\begin{array}{rccc} \omega_\chi^* : & \mathcal{Z} & \longrightarrow & k \\ & \hat{C} & \longmapsto & \omega_\chi(\hat{C})^* \end{array}$$

が定義できる． この 1 次表現は異なる既約指標から定められた 2 つが一致する場合がある．そこで $\mathrm{Irr}(G)$ における同値関係を「$\omega_\chi^* = \omega_\psi^*$」によって導入し，その同値類における完全代表系を Ω とすると，次が成り立つ．

定理 2.1 (中心指標と Jacobson 根基の関係)**.**

(1) 集合 $\{\omega_\chi^* \mid \chi \in \Omega\}$ は $\mathcal{Z}$ の 1 次表現全体を成す．

(2) $\mathrm{rad}\ \mathcal{Z} = \displaystyle\bigcap_{\chi\in\Omega} \mathrm{Ker}\ \omega_\chi^*$.

3 Loewy 構造

本章では群環の中心の Loewy 構造に関する結果を述べる．

以下では係数体 k は素数標数 p を持つと仮定し，群環 kG の中心を $\mathcal{Z}$ とする．ここで Jacobson 根基から得られるイデアルの列

$$\mathcal{Z} \supsetneq \mathrm{rad}\ \mathcal{Z} \supsetneq (\mathrm{rad}\ \mathcal{Z})^2 \supsetneq \cdots \supsetneq \{0\}$$

とその長さ

$$L(\mathcal{Z}) = \min\{l \in \mathbb{N} \mid (\mathrm{rad}\ \mathcal{Z})^l = \{0\}\}$$

を考えると $L(\mathcal{Z}) \leq |\mathrm{Cl}(G)|$ である．また Masckhe の定理より $L(\mathcal{Z}) = 1$ となるのは p が $|G|$ と素の場合に限る．

さて，Okuyama [2] は $L(\mathcal{Z})$ の上限について次を示した．

定理 3.1. $L(\mathcal{Z}) \leq |S_p|$　（ただし S_p は G の Sylow p-部分群）．

一方，本研究では Maróti の結果との関係から $L(\mathcal{Z})$ の下限を知りたい．そこで次の定理を得た [3, Theorem].

定理 3.2 (主定理)**.** S_p を G の Sylow p-部分群とすると

$$\frac{p^{\varepsilon} + p - 2}{p - 1} \leq L(\mathcal{Z}).$$

ただし $p^{\varepsilon} = \exp(Z(S_p))$.

ここで上の定理における注意を 2 つ挙げる．

- $\varepsilon \neq 0, 1$ のときは $2\sqrt{p-1} < L(\mathcal{Z}) \leq |\mathrm{Cl}(G)|$ が成り立つ．
- $\varepsilon = 1$ のときは p や S_p に応じて変化する $L(\mathcal{Z})$ の下限を与えることは一般にはできない．整数 $a \geq 1$ に対し

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} u & 0 \\ v & 1 \end{bmatrix} \ ; \ u \in \mathbb{F}_q^{\times}, \quad v \in \mathbb{F}_q \right\}$$

（ただし $q = p^a$）とすると S_p は位数 p^a の初等可換群（つまり $\varepsilon = 1$ の場合）である．このとき a の値に依らず常に $L(\mathcal{Z}) = 2$ が成り立つ．

以下，主定理の証明を簡潔に述べる．

Masckhe の定理より $|S_p| \neq 1$ としてよい．また k は十分大きい（例えば代数的閉体）と仮定してよい．ここで b をブロックべき等元，D, E をその不足群，惰性商群とする．不足群と惰性商群の定義は省略するが，D は G の p-部分群で，E はその自己同型群 $\mathrm{Aut}(D)$ のある p'-部分群と同型である．特に b が主ブロックべき等元のとき，D は G の Sylow p-部分群で $E = N_G(D)/DC_G(D)$ である．このとき E は $Z(D)$ に作用するので群環 $k[Z(D)]$ にも作用し，固定点代数

$$\mathcal{A} = \{\alpha \in k[Z(D)] \mid \alpha^e = \alpha, \quad \forall e \in E\}$$

が定義できる．ここで Broué の同型定理（1979）より，$\mathcal{Z}b/N \simeq \mathcal{A}$ となる $\mathcal{Z}b$ のべき零イデアル N が存在する（この N は Brauer 準同型写像の核である）．したがって $\mathcal{Z}b$ について考察するために，まずは固定点代数 $\mathcal{A}$ について調べる必要があり，次の補題が示される．

補題 3.3. $p^m = \exp(Z(D))$, $t = p^{m-1} + \cdots + p + 1$ とすると $\alpha^t \neq 0$, $\alpha^{p^m} = 0$ となる $\alpha \in \mathcal{A}$ が存在する．

この補題を主ブロックべき等元に適用する．上で述べた主ブロックの性質より，$\beta^u \neq 0$, $\beta^{p^\varepsilon} \in N$ となる $\beta \in \mathcal{Z}b$ が存在する（ただし $u = p^{\varepsilon-1} + \cdots + p + 1$）．$N$ はべき零イデアルなので β はべき零元となり，したがって $0 \neq \beta \in \mathrm{rad}\ \mathcal{Z}b \subseteq \mathrm{rad}\ \mathcal{Z}$ より $u < L(\mathcal{Z})$ を得る．ここで u に 1 を加えた値が主定理の左辺なので，以上で証明を完了する．

References

[1] A. Maróti, *A lower bound for the number of conjugacy classes of a finite group*, Adv. Math. **290** (2016), 1062–1078.

[2] T. Okuyama, *On the radical of the center of a group algebra*, Hokkaido Math. J. **10** (1981), 406–408

[3] Y. Otokita, *Lower bounds on Loewy lengths of centers of blocks*, submitted.