正則単体を含む極大な 2-距離集合について

愛知教育大学・数学教育講座　野崎寛
Hiroshi Nozaki
Department of Mathematics Education
Aichi University of Education

滋賀大学・教育学部　篠原雅史
Masashi Shinohara
Department of Education
Shiga University

1　はじめに

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ 上の有限集合 X に対し, 距離の集合を

$$A(X) = \{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})\colon \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}\}$$

と定義する. ここで, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ のユークリッド距離を表す. $|A(X)| = s$ を満たすとき, X を s-**距離集合**という. $\mathbb{R}^d$ 上の s-距離集合 X の元の個数には, 上界 $|X| \leq \binom{d+s}{s}$ が知られている [7, 4]. s-距離集合の主問題の一つは, s と d を固定したときに, 元の個数が最大となる s-距離集合を決定することである. $\mathbb{R}^d$ 上の s-距離集合 X の距離を $A(X) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ とおき, 元の個数が $|X| \geq 2\binom{d+s-1}{s-1} + 2\binom{d+s-2}{s-2}$ を満たすとき,

$$k_j = \prod_{i=1,\ldots,s, i\neq j} \frac{\alpha_j^2}{\alpha_j^2 - \alpha_i^2}$$

Nozaki is supported by JSPS KAKENHI Grant Numbers 16K17569, 17K05155, and 18K03396. Shinohara is supported by JSPS KAKENHI Grant Number 18K03396.

の値が整数になることが知られている [16]． $s = 2$ のとき，この結果は Larman–Rogers–Seidel [13] によって示されていた．この値は，元の個数がある程度大きい s-距離集合の特徴づけに非常に有効であり，k_j は **LRS** 比と呼ばれる．元の個数が $2\binom{d+s-1}{s-1} + 2\binom{d+s-2}{s-2}$ 以上である s-距離集合が有限個しか存在しないことも知られている [16]．最大な s-距離集合は $(s, d) = (1, \mathrm{any}), (\leq 6, 2), (2, \leq 8), (3, 3)$ においてしか決定されていない [8, 9, 14, 20, 21, 22, 23].

最大 s-距離集合の決定は, 具体例の構成と既存の上界の改善によって行なわれる．特に本稿では, 具体例の構成について扱う．球面 S^{d-1} 上の s-距離集合に対しては, アソシエーションスキームの埋め込みによって, サイズの大きいものがいくつも知られている ([5, 3])．特に, クラス 2 のジョンソンアソシエーションスキームの埋め込みにより, $d(d+1)/2$ 点の S^{d-1} 上の 2-距離集合が得られるが, $d = (2k+1)^2 - 3$（$k \in \mathbb{N}$）の場合を除く次元 d に対して, それが S^{d-1} 上の最大 2-距離集合であることが決定されている [11].

ここでは, 一つの球面にのらない s-距離集合の構成が問題である．その場限りの構成法のひとつは, 極大でない s-距離集合に s-距離の性質を保ったまま, 新たに点を付け加えて, 大きな s-距離集合を得ることである．ここで, 極大 s-距離集合 X とは, X に他の $\mathbb{R}^d$ の点を付け加えると s-距離でなくなってしまうもののことをいう．この構成法では, 極大であることの判定が難しいことが問題であるが, ジョンソンアソシエーションスキーム [6] とハミングアソシエーションスキーム [1] の埋め込みに対しては, その極大性の判定が上手くいき, 小さい s に対して, 埋め込みの s-距離集合を含む極大な距離集合の構成に成功した．ここで, 成功した理由のひとつは, 埋め込みのベクトルの成分が 0 または 1 により実現できることが大きく効いている．本稿では, 同じく成分が 0,1 により実現できる, d 次元正則単体 R_d($d+1$ 点 1-距離集合) を含む $\mathbb{R}^d$ 上の極大 s-距離集合について紹介する（表 1 参照）．次章以降の定理の証明は, [17] を参照されたい.

表 1　Maximal 2-distance set that contains R_d

d	size	added set
7	29	$J(8,3)$ (Largest 2-distance set in $\mathbb{R}^7$)
8	24	Hadamard matrix of order 8
8	30	Largest 2-intersecting family
8	45	$J(9,2)$ (Largest 2-distance set in $\mathbb{R}^8$)
23	144	2-$(21,7,12)$ design
24	278	4-$(23,7,1)$ design
26	280	4-$(23,7,1)$ design
26	280	The complement of 4-$(23,7,1)$ design
31	109	3-$(22,6,1)$ design
31	285	The complement of 4-$(23,7,1)$ design
48	302	The complement of 4-$(23,7,1)$ design
k^3+k^2-k-2	$2k^2(k+1)$	2-$(k^3,k^2,k+1)$ design

2　正則単体に付け加えるベクトル

$\mathbb{R}^{d+1}$ の標準基底を $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{d+1}\}$ と表す．また, $\mathbb{R}^{d+1}$ のアフィン空間 $H_d=\{(x_1,\ldots,x_{d+1})\in\mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^{d+1}x_i=1\}$ が $\mathbb{R}^d$ と等長 (isometric) であることに注意し, H_d 上の s-距離集合を扱う．ここで, d 次元正則単体は $R_d=\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{d+1}\}$ と表せる．R_d は 1-距離集合であり, $A(R_d)=\{\sqrt{2}\}$ である．

ある $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_{d+1})\in H_d$ が存在して, $R_d\cup\{\mathbf{x}\}$ が二つの距離 $\sqrt{2}$, $\sqrt{\alpha}$ のみを持つと仮定する．そのとき, $\beta=(\alpha-2)/2$ とすれば, $\mathbf{x}$ は次の $T_d(k,\beta)$ の元でなければならないことが分かる．ここで $k\in\{1,\ldots,d+1\}$ に対して,

$$T_d(k,\beta)=\{\mathbf{x}\in H_d\colon \forall i, x_i\in\{c,c+\beta\}, |N(\mathbf{x},c)|=k\},$$

ただし $N(\mathbf{x},a)=\{i\colon\ x_i=a\}$,

$$c=\frac{1}{d+1}-\frac{d+1-k}{d+1}\beta$$

と定める. さらに, β は次の補題のように, d と k で表せる.

Proposition 2.1. *d, k を, $d\geq 2$, $1\leq k\leq d+1$ を満たす整数であるとする. β を*

$$\beta=\begin{cases}\frac{k\pm\sqrt{k(d+1)(d+2-k)}}{k(d+1-k)}, & \textit{if } 2\leq k\leq d,\\ 1+\frac{2}{d}, & \textit{if } k=1,\\ -\frac{d+2}{2(d+1)}, & \textit{if } k=d+1\end{cases} \tag{2.1}$$

で定義すると, $\mathbf{x}$ が $T_d(k,\beta)$ の元であることと, $R_d\cup\{\mathbf{x}\}$ が H_d 上の 2-距離集合であることは必要十分である.

次に $T_d(k,\beta)$ の元を 2 つ以上付け加えるための必要十分条件を与える. $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_{d+1})$, $\mathbf{y}=(y_1,\dots,y_{d+1})$ に対して, $l=l(\mathbf{x},\mathbf{y})=|\{i\colon\ x_i\neq y_i\}|/2$ とする.

Proposition 2.2. *l, $T_d(k,\beta)$, R_d は上述のものとする. d, k, β は Proposition 2.1 の条件を満たすものとする. $X\subset T_d(k,\beta)$ に対して, $R_d\cup X$ が 2-距離集合であることと, 任意の $\mathbf{x},\mathbf{y}\in X$ ($\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$) に対して, $l(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\{1/\beta^2,(\beta+1)/\beta^2\}$ であることは必要十分である.*

3 正則単体を含む極大 2-距離集合

比較的大きな 2-距離集合を構成するためには, 前述した LRS 比を整数にする必要がある. LRS 比を整数にすると, 次の定理から, 大きな距離集合が構成できる可能性のある (d,k,β) は有限個に限られることが分かる.

Theorem 3.1. *R_d を d 次元正則単体 $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{d+1}\}$ とする. $\mathbf{x}\in T_d(k,\beta)$ に対して, $R_d\cup\{\mathbf{x}\}$ が二つの距離 $\sqrt{2},\sqrt{\alpha}$ しか持たないとすれば, 次が成り立つ.*

(1) $s \geq 2$ が $\alpha/2 = (s-1)/s$ を満たすとすると（LRS 比が s）, $2 \leq k \leq d$, $k \neq s^2$, $\beta = -1/s$,

$$d = k + s^2 - 2s - 1 + \frac{s^2(s-1)^2}{k - s^2} \tag{3.1}$$

が成り立つ.

(2) $s \geq 2$ が $2/\alpha = (s-1)/s$ を満たすとすると（LRS 比が s）, $2 \leq k \leq d$, $d + 2 \geq k + s$, $k \neq (s-1)^2$, $\beta = 1/(s-1)$,

$$d = k + s^2 - 2 + \frac{s^2(s-1)^2}{k - (s-1)^2} \tag{3.2}$$

が成り立つ.

3.1 LRS 比 $s = 2$, 距離 $1, \sqrt{2}$

Theorem 3.1 により, $d = k - 1 + 4/(k-4)$ が得られる. d, k が自然数であることに注意すれば, $(d,k) = (7,6), (8,5), (8,8)$ となる. 実際には, 構成できる $|X| \geq 2d + 2$ を満たす 2-距離集合は, $(d,k) = (8,5)$ のときに限られる. このとき, 8 次のアダマール行列の構造から得られるベクトルを含む 9 点を加えることが可能で, $|X| = 24$ の極大 2-距離集合が得られる.

3.2 LRS 比 $s = 2$, 距離 $\sqrt{2}, 2$

Theorem 3.1 より, $d = k+2+4/(k-1)$ であり, $(d,k) = (7,3), (8,2), (8,5)$ となる.

$(d,k) = (7,3)$ のとき, 1-交差集合 (1-intersecting family) [10, 24] の構造をもつ 21 点を付け加えることができ, 29 点の極大 2-距離集合を構成できる. この極大 2-距離集合は, $\mathbb{R}^7$ 上の最大 2-距離集合であることが知られている [8].

$(d,k) = (8,2)$ のとき, ジョンソンアソシエーションスキーム $J(9,2)$ の構造をもつ 36 点を付け加えることができ, 45 点の極大 2-距離集合を構成でき

る．この極大 2-距離集合は, $\mathbb{R}^8$ 上の最大 2-距離集合であることが知られている [14].

$(d,k)=(8,5)$ のとき, 2-交差集合 [2] の構造をもつ 21 点を付け加えることができ, 30 点の極大 2-距離集合を構成できる．

3.3 準対称デザインを加える

$T_d(k,\beta)$ の s-距離集合の構造は, ジョンソンアソシエーションスキーム $J(d+1,k)$ の s-距離集合の構造と同一視される． $J(d+1,k)$ 内の大きな 2-距離集合の構成は, 2 つの距離の種類が分かっている状況であっても難しく, 良い構成法は知られていない．組合せデザインのうち準対称デザイン（quasi-symmetric design） [15, 19] のブッロク集合は $J(d+1,k)$ の 2-距離集合に相当し, 元の個数が大きいものも, いくつか知られている．ここでは, 準対称デザインのブロック集合の埋め込みを正則単体 R_d に付け加えることを試みる．準対称デザインのブロックグラフは強正則グラフであることが知られており, 強正則グラフの LRS 比は, 最小固有値の絶対値であることが知られている [3]．LRS 比 $s=3$ のとき, ブロックグラフが最小固有値 -3 を持つ準対称デザインは [18] によって調べられている．この準対称デザインのブロックグラフの埋め込みを, そのままの形で R_d に付け加えることはできないが, 少し作り変えて付け加えることが可能である．以下の節であげる準対称デザインを R_d へ付け加える．

3.3.1 強分解可能デザイン

強分解可能デザイン（strongly resolvable design）とは, そのブロックグラフが正則完全多部グラフとなる準対称デザインである．素数べき s に対して, 強分解可能 2-$(s^3,s^2,s+1)$ デザインがアフィン空間 $AG(3,s)$ から得られる．有限体 $\mathbb{F}_s$ に対して, $AG(3,s)$ の点集合は $\mathbb{F}_s^3$ であり, ブロック集合 B は $\mathbb{F}_s^3$ の全ての 2-次元部分空間とその剰余類たちの集合である． $|B|=s^3+s^2+s$ であることに注意する．

Theorem 3.1 より, $\alpha < 2$ に対して, $\beta = -1/s$ であり, $k = s^2 + s - 1$ のとき, $d + 1 = (s-1)(s+1)^2$ となる．ここでは, $J(d+1, k)$ と $T_d(k, \beta)$ を同一視して考える．$AG(3, s)$ のブロック集合 B に対して,

$$B' = \{(\underbrace{1, \ldots, 1}_{s-1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s^2-2s}, \mathbf{b})\colon\ \mathbf{b} \in B\} \subset J(d+1, k) \tag{3.3}$$

と定義する．このとき, $R_d \cup B'$ は 2-距離集合となる．$d+1 = (s-1)(s+1)^2$ に対しては, Theorem 3.1 より, $k' = s^3$ の場合もベクトルが付け加えられる可能性がある．ここで, $\mathbf{x}_0 \in T_d(k', \beta)$ を

$$\mathbf{x}_0 = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{s^2-s-1}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{s^3}) \in J(d+1, k')$$

と定義すれば, $R_d \cup B' \cup \{\mathbf{x}_0\}$ は $2s^2(s+1)$ 点の 2-距離集合となる．

$R_d \cup B' \cup \{\mathbf{x}_0\}$ の極大性を示すために次の補題が必要である．

Lemma 3.2. *s を 2 以上の整数とする．a, b を $a - b = s$ と $b < s$ を満たす非負整数とする．(P, B) を強分解可能 2-$(s^3, s^2, s+1)$ デザインとする．そのとき, 次の性質を満たす $X \subset P$ は存在しない．「任意の $Y \in B$ に対して, $|X \cap Y| \in \{a, b\}$ となる．」*

Theorem 3.3. *s を素数べき, $d = (s-1)(s+1)^2 - 1$ とし, B' を (3.3) で定義する．そのとき, $R_d \cup B' \cup \{\mathbf{x}_0\}$ は極大 2-距離集合である．*

3.3.2 4-$(23, 7, 1)$ Witt デザイン

$\alpha = 3$ としたとき, Theorem 3.1 より, 可能なパラメーターは $(d, k) = (23, 10), (24, 8), (24, 13), (26, 7), (26, 16), (31, 6), (31, 22), (48, 5), (48, 40)$ である．ここでは表 1 における, $d = 24$, $k = 8$ の場合のみ紹介する．他の場合は同様に構成することが可能である．

B を 4-$(23, 7, 1)$ Witt デザイン [12] のブロック集合とする．B のサイズは 253 である．

$$B' = \{(1, 0, \mathbf{b})\colon\ \mathbf{b} \in B\} \subset J(25, 8)$$

とすれば, $X = R_{24} \cup B'$ は 278 点の極大 2-距離集合となる. これの極大性の決定は, Lemma 3.2 の類似を, コンピューターにより確認することで示した.

参考文献

[1] S. Adachi, R. Hayashi, H. Nozaki, and C. Yamamoto, Maximal m-distance sets containing the representation of the Hamming graph $H(n, m)$, *Discrete Math.* **340** (3) (2017), 430–442.

[2] R. Ahlswede and L.H. Khachatrian, The complete intersection theorem for systems of finite sets, *Europ. J. Combin.* **18** (1997), 125–136.

[3] E. Bannai and E. Bannai, A note on the spherical embeddings of strongly regular graphs, *Europ. J. Combin.* **26** (8) (2005), 1177–1179.

[4] E. Bannai, E. Bannai, and D. Stanton, An upper bound for the cardinality of an s-distance subset in real Euclidean space, II, *Combinatorica* **3** (1983), 147–152.

[5] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I: Association Schemes*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA, 1984.

[6] E. Bannai, T. Sato, and J. Shigezumi, Maximal m-distance sets containing the representation of the Johnson graph $J(n, m)$, *Discrete Math.* **312** (22) (2012), 3283–3292.

[7] A. Blokhuis, Few-distance sets, CWI Tract, **7** (1984), 1–70.

[8] S. J. Einhorn and I. J. Schoenberg, On Euclidean sets having only two distances between points. I. II. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **69**=*Indag. Math.* **28** (1966), 479–488, 489–504.

[9] P. Erdős and P. Fishburn, Maximum planar sets that determine k distances, *Discrete Math.* **160** (1996), 115–125.

[10] P. Erdős, C. Ko, and R. Rado, Intersection theorems for systems of finite sets, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) **12** (1961), 313–320.

[11] A. Glazyrin and W.-H. Yu, Upper bounds for s-distance sets and equiangular lines, *Adv. Math.*, **330** (2018), 810–833.

[12] J.M. Goethals and J.J. Seidel, Strongly regular graphs derived from combinatorial designs, *Canad. J. Math.* **22** (1970), 597–614.

[13] D.G. Larman, C.A. Rogers, and J.J. Seidel, On 2-distance sets in Euclidean space, *Bull. London Math. Soc.* **9** (1977), 261–267.

[14] P. Lisoněk, New maximal 2-distance sets, *J. Combin. Theory, Ser. A* **77**

(1997), 318–338.

[15] A. Neumaier, Regular sets and quasi-symmetric 2-designs, in Combinatorial Theory, D. Jungnickel and K. Vedder, eds., Springer, Berlin, 1982, 258–275.

[16] H. Nozaki, A generalization of Larman–Rogers–Seidel's theorem, *Discrete Math.* **311** (2011), 792–799.

[17] H. Nozaki and M. Shinohara, Maximal 2-distance sets containing the regular simplex, preprint.

[18] S.M. Nyayate, R.M. Pawale, and M.S. Shrikhande, Characterization of quasi-symmetric designs with eigenvalues of their block graphs, *Australas. J. Combin.*, **68** (1) (2017), 62–70.

[19] M.S. Shrikhande and S.S. Sane, *Quasi-Symmetric Designs*, Cambridge Univ. Press, 1991.

[20] M. Shinohara, Classification of three-distance sets in two dimensional Euclidean space, *European J. Combin.* **25** (2004), 1039–1058.

[21] M. Shinohara, Uniqueness of maximum planar five-distance sets, *Discrete Math.* **308** (2008), 3048–3055.

[22] M. Shinohara, Uniqueness of maximum three-distance sets in the three-dimensional Euclidean space, arXiv:1309.2047.

[23] X. Wei, A proof of Erdős–Fishburn's conjecture for $g(6) = 13$, *Electron. J. Combin.* **19** (4) (2012), #P38.

[24] R.M. Wilson, The exact bound on the Erdős–Ko–Rado theorem, *Combinatorica* **4** (1984), 247–257.