Existence of positive radial solutions for a semipositone elliptic equation

佐賀大学・理工学部　梶木屋 龍治

Ryuji Kajikiya

Department of Mathematics, Faculty of Science and Engineering,

Saga University, Saga, 840-8502, Japan

1　主結果

本研究は, 韓国, Keimyung 大学の Eunkyung Ko 准教授との共同研究に基づくものである. つぎの半線形楕円型偏微分方程式の正値球対称解の存在と非存在について考察する.

$$-\Delta u = \lambda f(u) \quad (x \in \Omega), \quad u = 0 \quad (x \in \partial\Omega), \tag{1.1}$$

ここで Ω は, $\mathbb{R}^N$ における円環領域 A または単位球 B のいずれかとする. ただし $N \geq 2$ とする.

$$A := \{x \in \mathbb{R}^N : a < |x| < b\}, \quad B := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1\}.$$

$\lambda > 0$ はパラメーターであり, 非線形項 $f(s)$ は, semipositone 条件 $f(0) < 0$ をみたすものとする.

$f(0) \geq 0$ ならば, 非負値解 $(u(x) \geq 0)$ は, 正値解 $(u(x) > 0)$ になる. 実際に, Ω を任意の有界領域, f がリプシッツ連続で, $f(0) \geq 0$, u が 非自明な非負値解と仮定する. $R := \max_{\overline{\Omega}} u(x)$ とおく. f がリプシッツ連続なので, ある $C > 0$ が存在して, $|f(s) - f(0)| \leq C|s|$ $(|s| \leq R)$ となる. $g(s) := f(s) - f(0)$ とおく. $f(0) \geq 0$ なので, $f(s) \geq g(s)$ となり,

$$-\Delta u = \lambda f(u) \geq \lambda g(u) \geq -\lambda C u.$$

すなわち, $(\lambda C - \Delta)u \geq 0$ となる. 強最大値原理より, $u(x) > 0$ $(x \in \Omega)$ である.

[1]本研究は日本学術振興会, 基盤 (C) 課題番号 16K05236 の助成を受けたものである.

$f(0) < 0$ の場合, 非負値解が領域内部に零点を持つことがある. 実際に, $N = 1$, $\Omega = (-2\pi, 2\pi)$, $f(s) := s - 1$ のとき, $u(x) := 1 - \cos x$ は, 次の方程式の非負値解である.

$$-u'' = f(u) \quad (x \in (-2\pi, 2\pi)), \quad u(-2\pi) = u(2\pi) = 0.$$

$u(0) = 0$ なので, $x = 0$ に零点を持っている. しかしながら, $N \geq 2$ の球の場合に, 非負値解が正値解になることが, 次の結果により知られている.

定理 1.1 (Castro and Shivaji [4])**.** *$N \geq 2$, Ω を球とする. $f \in C^1[0, \infty)$, $f(0) < 0$ とする. このとき, 非負値解は, 正値解であり, 球対称になる.*

この講演の目的は, つぎの 2 点である.

(i) 正値解が存在するための, $f(s)$ に対する一般的で弱い十分条件を与えること.

(ii) $\Omega = A$ と $\Omega = B$ において同一の方法で, 解の存在, 非存在を証明すること.

(1.1) の正値球対称解を考える. $u = u(r)$, $r = |x|$ とおくと,

$$u'' + \frac{N-1}{r} u' + \lambda f(u) = 0 \quad (r \in (a, b)). \tag{1.2}$$

ただし, $\Omega = B$ (球) の場合, $a = 0$, $b = 1$ とする. 境界条件は, 次のようになる.

$$u'(0) = u(1) = 0 \quad (\Omega = B \text{ のとき}),$$
$$u(a) = u(b) = 0 \quad (\Omega = A \text{ のとき})$$

次の関数を定義する.

$$F(s) := \int_0^s f(t) dt. \tag{1.3}$$

定理 1.2. *$f(s)$ は, 次の条件を満たすものとする.*

$$\limsup_{s \to \infty} F(s)/s^2 < \infty.$$

このとき (1.2) は, 十分小さな $\lambda > 0$ に対して, 正値解を持たない.

定義 1.3. $\Omega = A$ または B とする. つぎの関数空間と汎関数 $I(u)$ を定義する.

$$H^1_{0,r}(\Omega) := \{u \in H^1_0(\Omega) : u(x) \text{ is radial}\},$$

$$H^+ := \{u \in H^1_{0,r}(\Omega) : u(x) \geq 0 \quad \text{in } \Omega\}.$$

$$I(u) = I(u, \lambda) := \int_a^b \left(\frac{1}{2} u'(r)^2 - \lambda F(u(r)) \right) r^{N-1} dr.$$

ただし, $F(s)$ は (1.3) により定義する. $\Omega = B$ の場合は $a = 0$, $b = 1$ とする. さらに, 次の関数 $i(\lambda)$ を定義する.

$$i(\lambda) := \inf_{u \in H^+} I(u, \lambda) \geq -\infty.$$

$I(0, \lambda) = 0$ なので, $i(\lambda) \leq 0$ となる.

仮定 1.4. $f(s)$ は, 連続で $f(0) < 0$ であり, 以下の条件を満たすものとする.

(i) つぎの条件を満たす $Z > 0$ が存在する. $F(s) \leq 0 \quad (s \in [0, Z])$, $F(Z) = 0, \quad F(s) > 0, f(s) > 0 \ \ (s \in (Z, \infty))$.

(ii) $\lim_{s \to \infty} F(s)/s^2 = 0$.

(iii) $\Omega = B$(球) の場合, つぎの条件を満たす定数 $p, C > 0$ があると仮定する.

$$|f(s)| \leq C(s^p + 1) \quad (s \geq 0),$$

$$1 < p < \infty \quad (N = 2), \qquad 1 < p < (N+2)/(N-2) \quad (N \geq 3).$$

定理 1.5. 仮定 1.4 の下に次の結果が成り立つ.

(i) 任意の $\lambda > 0$ に対して, $I(u, \lambda)$ は下に有界である. すなわち, $i(\lambda) > -\infty$.

(ii) ある $\lambda_0 > 0$ が存在して, $i(\lambda) = 0 \ (\lambda \in (0, \lambda_0])$, $i(\lambda) < 0 \ (\lambda \in (\lambda_0, \infty))$. $\lim_{\lambda \to \infty} i(\lambda) = -\infty$.

(iii) $\lambda \geq \lambda_0$ のとき, (1.2) は次の式を満たす正値解 u_λ を持つ.

$$I(u_\lambda, \lambda) = \inf_{v \in H^+} I(v, \lambda) (= i(\lambda)).$$

(iv) u_λ における線形化作用素の第一固有値は, 非負である.

この問題の困難な点は, H^+ が内点を持たない集合になっていることである. 一般の領域 Ω についても同じことが成り立つ. $\mathbb{R}^N$ の開部分集合 Ω に対して, 次の集合を定義する.

$$H_0^1(\Omega)^+ := \{u \in H_0^1(\Omega) : u(x) \geq 0\}.$$

この集合は $H_0^1(\Omega)$ の部分集合として, 内点を持たないことが, つぎのように証明される. $u \in H_0^1(\Omega)^+$ を任意にとる. $C_0^\infty(\Omega)$ は, $H_0^1(\Omega)$ において稠密な

ので, $\phi \geq 0$ なる $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ で u に十分近いものがとれる. ϕ のサポートは, コンパクトなので, 境界近傍で $\phi(x) = 0$ となる. すなわち, ある $\delta > 0$ が存在して, $\phi(x) = 0$ $(x \in \Omega_\delta)$ となる. ここで Ω_δ は次により定義される.

$$\Omega_\delta := \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}.$$

ただし, $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ は点 x から $\partial\Omega$ までの距離を表す. つぎのような関数 $v \in C_0^\infty(\Omega)$ を定義する. $x \in \Omega \setminus \Omega_\delta$ に対して, $v(x) := \phi(x)$ と置き, ある点 $x_0 \in \Omega_\delta$ において, $v(x_0) < 0$ となるように $v(x)$ を定義する. さらに $v(x)$ の $C^1(\overline{\Omega}_\delta)$ ノルムが十分小さくなるようにとる. このとき, $v - \phi$ の $H_0^1(\Omega)$ ノルムも十分小さい. 結局, つぎのことが成り立つ. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\|u - v\|_{H_0^1(\Omega)} < \varepsilon$ となる符号変化する $v \in H_0^1(\Omega)$ が存在する. 従って, $H_0^1(\Omega)^+$ は内点を持たない.

内点を持たない集合 H^+ 上に制限した汎関数 $I(u)$ が, $u_0 \in H^+$ において最小となった場合, $I'(u_0) = 0$ が一般には保証されない. これがこの問題の困難な点である. たとえば, 滑らかな関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を考える. それを平面上の滑らかな曲線 C 上に制限したとき, $f|_C$ が点 $(x_0, y_0) \in C$ で最小になったとしても, $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ は, 一般に成り立たない. これと同様の理由での困難さが $I|_{H^+}$ にも現れる.

2 証明の概略

補題 2.1. $\lambda > \lambda_0$ のとき, $I(u_\lambda, \lambda) = i(\lambda)$ をみたす $u_\lambda \in H^+$ が存在する. すなわち, minimizer が存在する.

証明. $I(u_n, \lambda) \to i(\lambda)$ となる列 $\{u_n\} \subset H^+$ を取る. このとき, u_n に対して, a priori 評価を導くことができる. よって, u_n の部分列が収束する. 極限を u_λ とすると, これが minimizer になる. 証明終.

以下において, $\lambda > \lambda_0$ とし, u は, $I(\cdot, \lambda)$ の minimizer とする. すなわち,

$$u \in H^+, \quad I(u, \lambda) = \inf_{v \in H^+} I(v, \lambda) = i(\lambda) < 0.$$

補題 2.2.

$$u(r_1) = u(r_2) = 0, \quad u \not\equiv 0 \quad (r_1 \leq r \leq r_2),$$

ならば, $u(r) > Z$ となる $r \in (r_1, r_2)$ が存在する.

証明. $a \leq s < t \leq b$ に対して, 次の記号を用意する.

$$I(u; s, t) = \int_s^t \left(\frac{1}{2}u'(r)^2 - \lambda F(u(r))\right) r^{N-1} dr. \tag{2.1}$$

任意の分割 $a=r_0<r_1<r_2<\cdots<r_n=b$ に対して, 次が成り立つ.

$$I(u,\lambda)=\sum_{i=1}^{n} I(u;r_{i-1},r_i). \tag{2.2}$$

補題 2.2 を証明する．すべての $r\in(r_1,r_2)$ に対して, $u(r)\le Z$ と仮定する．このとき $F(u(r))\le 0$ なので,

$$I(u;r_1,r_2)=\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{1}{2}u'(r)^2-\lambda F(u(r))\right)r^{N-1}dr>0. \tag{2.3}$$

次のように v を定義する.

$$v(r):=\begin{cases} u(r) & r\in(a,b)\setminus[r_1,r_2] \\ 0 & r\in[r_1,r_2] \end{cases}$$

このとき, $v\in H^+$ であり,

$$I(v;a,r_1)=I(u;a,r_1),\quad I(v;r_2,b)=I(u;r_2,b),\quad I(v;r_1,r_2)=0,$$

が成り立つ．(2.2) の性質を利用し, 上の式と (2.3) を使うと,

$$\begin{aligned} I(v;a,b) &= I(v;a,r_1)+I(v;r_1,r_2)+I(v;r_2,b) \\ &< I(u;a,r_1)+I(u;r_1,r_2)+I(u;r_2,b)=I(u;a,b) \end{aligned}$$

となる．すなわち, $I(v;a,b)<I(u;a,b)$. これは, u が minimizer であることに反する．従って, $u(r)>Z$ となる $r\in(r_1,r_2)$ が存在する．証明終.

補題 2.3. $\Omega=A$ または B のとき, $u(t_n)>0$, $t_n\to b$ となる列 $t_n\in(a,b)$ が存在する．$\Omega=A$ のとき, $u(s_n)>0$, $s_n\to a$ となる列 $s_n\in(a,b)$ が存在する.

証明. $\Omega=B$, $a=0$, $b=1$ の場合に,

$$u(t_n)>0,\quad t_n\in(0,1),\quad t_n\to 1\quad(n\to\infty),$$

をみたす列 t_n の存在のみを証明する．$\Omega=A$ の場合や, s_n の存在については, [11] を参照せよ．上の性質を持つ t_n が存在しないと仮定する．このとき, ある $\theta\in(0,1)$ が存在して, $u(r)\equiv 0$ ($r\in[\theta,1]$) となる．$v(r):=u(\theta r)$ とおく．このとき, $v\in H^+$. 変数変換 $s=\theta r$ を行うと, 次の結果が得られる.

$$\begin{aligned} I(v,\lambda) &= \int_0^1\left(\frac{1}{2}v'(r)^2-\lambda F(v)\right)r^{N-1}dr \\ &= \theta^{-N}\int_0^{\theta}\left(\frac{\theta^2}{2}u'(s)^2-\lambda F(u)\right)s^{N-1}ds \\ &= \theta^{-N}\int_0^{1}\left(\frac{\theta^2}{2}u'(s)^2-\lambda F(u)\right)s^{N-1}ds. \end{aligned}$$

次に, $g(t) := St^{-N+2} - Tt^{-N}$ とおく. ただし,

$$S := \frac{1}{2}\int_0^1 u'(r)^2 r^{N-1} dr, \quad T := \lambda\int_0^1 F(u(r)) r^{N-1} dr,$$

とする. このとき, $I(v) = g(\theta)$, $I(u) = g(1) = S - T$ が成り立つ. $I(u) = i(\lambda) \leq 0$ なので, $S \leq T$ である. $u \not\equiv 0$ なので, $S > 0$ となる. $N \geq 3$ のとき, $t \in (0, 1]$ に対して,

$$\begin{aligned} g'(t) &= (-N+2)St^{-N+1} + NTt^{-N-1} \\ &= Nt^{-N-1}(T - ((N-2)/N)St^2) > Nt^{-N-1}(T - S) \geq 0. \end{aligned}$$

$N = 2$ のときも, $g'(t) > 0$ となる. 従って, $g(t)$ は単調増加であり, $I(v) = g(\theta) < g(1) = I(u)$ となる. これは, u が minimier であることに反する. 従って, $u(t_n) > 0$, $t_n \to 1$ となる列 t_n が存在する. 証明終.

補題 2.4. minimizer $u(r)$ は, Ω 内に零点を持たない.

証明. $\Omega = A$ の場合のみ証明する. $u(r)$ が零点 r_0 を持ったと仮定する. 補題 2.2, 2.3 より, 次のような点 s, t が存在する.

$$a < s < r_0 < t < b, \quad u(s) = u(t) = Z \quad u(r) < Z \quad (s < r < t). \tag{2.4}$$

このとき, 次のように v を定義する.

$$v(r) := \begin{cases} u(r) & r \in (a, b) \setminus [s, t] \\ Z & r \in [s, t] \end{cases}$$

このとき, $v \in H^+$ であり,

$$I(v; a, s) = I(u; a, s) \quad I(v; t, b) = I(u; t, b) \quad I(v; r_1, r_2) = 0.$$

(2.4) より, $I(u; s, t) > 0$. よって, $I(v; a, b) < I(u; a, b)$ となる. これは u が minimizer であることに反する. 従って, $u(r)$ は, Ω 内に零点を持たない. 証明終.

定理 1.5 の証明. $\lambda > \lambda_0$ のときの, (1.2) の解の存在を示す. $\Omega = A$ の場合のみ証明する. 補題2.1 より, I の minimizer u が存在する.

$$I(u, \lambda) = \inf_{v \in H^+} I(v, \lambda) (= i(\lambda)).$$

これが (1.2) の解になることを示す. つぎの埋め込みが成り立つ.

$$H^1_{0,r}(A) = H^1_0(a, b) \hookrightarrow C^{1/2}[a, b].$$

よって, minimizer $u(r)$ は, $[a,b]$ で連続である. 補題2.4 より, $u(r)>0$ $(a<r<b)$ となる.

$\phi\in C_0^\infty(a,b)$ を任意に与える.

$$\exists\delta>0:\quad \phi(r)=0\quad (a\le r\le a+\delta,\quad b-\delta\le r\le b).$$

$$\exists\varepsilon>0:\quad u(r)\ge\varepsilon\quad (a+\delta\le r\le b-\delta).$$

上の式より,

$$u(r)+t\phi(r)\ge\varepsilon-|t|\|\phi\|_\infty>0\quad (|t|<\varepsilon/\|\phi\|_\infty,\quad a+\delta\le r\le b-\delta),$$

$$u(r)+t\phi(r)=u(r)>0\quad (a<r\le a+\delta,\ b-\delta\le r<b).$$

従って, $|t|<\varepsilon/\|\phi\|_\infty$ のとき, $u+t\phi\in H^+$ となる. $g(t):=I(u+t\phi)$ は, $t=0$ で極小になる. ゆえに

$$0=g'(0)=I'(u)\phi.$$

u は, I の critical point. よって, (1.2) の解になる. 証明終.

定理 1.2 の証明. 次を定義する.

$$E(r):=\frac{1}{2}u'(r)^2+\lambda F(u(r)). \tag{2.5}$$

このとき,

$$E'(r)=-\frac{N-1}{r}u'(r)^2\le 0, \tag{2.6}$$

なので, $E(r)$ は減少関数となる.

$\limsup_{s\to\infty}F(s)/s^2<\infty$, $f(0)<0$ なので,

$$\exists M>0:\quad F(s)\le Ms^2\quad (s\ge 0). \tag{2.7}$$

$\Omega=A$ とする. $u(r)$ を (1.2) の正値解とする. このとき, エネルギー関数 $E(r)$ を使うと, ある $r_0\in(a,b)$ が存在して, 次が成り立つことが証明できる.

$$\exists r_0\in(a,b):\quad u'(r)>0\quad (r\in(a,r_0)),\qquad u'(r_0)=0,$$

$$u'(r)<0\quad (r\in(r_0,b)),\qquad u(r_0)>Z.$$

(2.6) から次の式が得られる.

$$-E'(r)=\frac{N-1}{r}u'(r)^2\ge\frac{N-1}{b}u'(r)^2.$$

この式の両辺を $[r_0,b]$ 上で積分すると,

$$E(r_0)-E(b)\ge\frac{N-1}{b}\int_{r_0}^{b}u'(r)^2dr. \tag{2.8}$$

シュワルツの不等式を使って,

$$u(r_0) = -\int_{r_0}^{b} u'(r)dr \le \sqrt{b-r_0}\left(\int_{r_0}^{b} u'(r)^2 dr\right)^{1/2},$$

書き換えると,

$$\int_{r_0}^{b} u'(r)^2 dr \ge \frac{u(r_0)^2}{b-r_0} \ge \frac{u(r_0)^2}{b-a}.$$

これと (2.8) より,

$$E(r_0) - E(b) \ge \frac{N-1}{b(b-a)} u(r_0)^2,$$

$u'(r_0) = 0$ と $u(b) = 0$ を使うと, 上式は次の式に書き換わる.

$$\lambda F(u(r_0)) - \frac{1}{2}u'(b)^2 \ge \frac{N-1}{b(b-a)} u(r_0)^2.$$

上の式と (2.7) より,

$$\left(\lambda M - \frac{N-1}{b(b-a)}\right) u(r_0)^2 \ge \frac{1}{2}u'(b)^2.$$

$\lambda > 0$ が十分小さいならば, 矛盾が起きる. よって, 十分小さな $\lambda > 0$ に対して, 正値解は存在しない. 証明終.

References

[1] D. Arcoya and A. Zertiti, Existence and non-existence of radially symmetric non-negative solutions for a class of semi-positone problems in an annulus, Rend. Mat. Appl. (7) 14 (1994), no. 4, 625–646.

[2] A. Castro, J. B. Garner and R. Shivaji, Existence results for classes of sublinear semipositone problems, Results Math. 23 (1993), no. 3-4, 214 – 220.

[3] A. Castro and R. Shivaji, Nonnegative solutions for a class of nonpositone problems, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 108 (1988), no. 3-4, 291–302.

[4] A. Castro and R. Shivaji, Nonnegative solutions to a semilinear Dirichlet problem in a ball are positive and radially symmetric, Comm. Partial Differential Equations 14 (1989), no. 8-9, 1091–1100.

[5] A. Castro and R. Shivaji, Positive solutions for a concave semipositone Dirichlet problem, Nonlinear Anal. 31 (1998), no. 1-2, 91–98.

[6] A. Castro and G. Sudhasree, Uniqueness of stable and unstable positive solutions for semipositone problems, Nonlinear Anal. 22 (1994), no. 4, 425–429.

[7] M. Chhetri, D.D. Hai and R. Shivaji, On positive solutions for classes of p -Laplacian semipositone systems, Discrete Contin. Dyn. Syst. 9 (2003), no. 4, 1063–1071.

[8] P. Clément and G. Sweers, Existence and multiplicity results for a semilinear elliptic eigenvalue problem, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 14 (1987), no. 1, 97–121.

[9] D. Costa, H. Tehrani and J. Yang, On a variational approach to existence and multiplicity results for semipositone problems, Electron. J. Differential Equations 2006, No. 11, 10 pp.

[10] D.D. Hai and R. Shivaji, Positive solutions for semi-positone systems in an annulus, Rocky Mountain J. Math. 29 (1999), no. 4, 1285–299.

[11] R. Kajikiya and E. Ko, Existence of positive radial solutions for a semipositone elliptic equation, J. Math. Anal. Appl. To appear.

[12] J. A. Smoller and A. G. Wasserman, Symmetry-breaking for solutions of semilinear elliptic equations with general boundary conditions, Comm. Math. Phys. 105 (1986), no. 3, 415–441.

[13] J. A. Smoller and A. G. Wasserman, Existence of positive solutions for semilinear elliptic equations in general domains, Arch. Rational Mech. Anal. 98 (1987), no. 3, 229–249.